4

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-HUITIÈME — ANNÉE 1951

(87e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1951

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-HUITIÈME — ANNÉE 1951

(87e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1951

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

PAR M. LÉONCE FOURÈS.

INTRODUCTION.

De nombreux travaux ont été consacrés aux surfaces de Riemann depuis H. Poincaré et P. Kœbe qui en 1907 énonçaient le théorème fondamental de l'uniformisation déjà énoncé par Riemann pour les surfaces algébriques. Poincaré et Kœbe utilisaient les fonctions de Green définies sur des surfaces de Riemann obtenues par prolongement analytique de Weierstrass. H. Weyl (1913) et T. Rado (1925) donnent des définitions axiomatiques des surfaces de Riemann, construites sur des espaces topologiques. R. Courant (1922) donne une démonstration du théorème de l'uniformisation utilisant encore les fonctions harmoniques : cette démonstration sera précisée dans l'édition de 1929 de sa Funktionentheorie et par G. Valiron dans son cours à la faculté des Sciences de Paris en 1949-1950 (1). En 1927, Kœbe (*Acta Mathematica*, t. 50) avait donné la première démonstration de ce théorème sans utiliser les fonctions harmoniques, et Bieberbach publiait dans sa Funktionentheorie, une démonstration originale ne faisant intervenir que la définition du prolongement analytique de Weierstrass. Les deux premiers Chapitres du présent travail sont consacrés à une extension des travaux de Bieberbach : au Chapitre I, j'étudie une suite de fonctions univalentes définies dans des domaines de plus en plus grands : l'utilisation du Verzerrungsatz de

(1) A paraître dans *Cours d'Analyse*, t. III.

Bieberbach, et des familles normales de P. Montel, permet d'obtenir des résultats précis sur la fonction limite et son comportement à la frontière. La suite du chapitre est consacrée au raccordement de domaines plans, dont certains cas ont été étudiés par Bieberbach; d'autres types de raccordement sont ici étudiés, et trouveront une application au chapitre suivant et dans des travaux ultérieurs; une large part est consacrée à l'étude des frontières.

Au Chapitre II je rappelle la définition de Rado, des surfaces de Riemann, en utilisant les axiomes de topologie sous la forme que leur a donnée Bourbaki (dont je conserve aussi les notations) : j'en déduis la représentation paramétrique des surfaces de Riemann, et l'étude de l'intersection de deux éléments de définition souligne l'importance de la régularité de l'espace topologique sur lequel est définie la surface de Riemann. L'étude du raccordement des surfaces de Riemann, conduit alors aux théorèmes de l'uniformisation, étendus aux surfaces définies par H. Weyl. Le premier de ces théorèmes concerne les surfaces simplement connexes, le second les surfaces ouvertes quelconques.

Le deuxième théorème de l'uniformisation conduit à la considération des surfaces de recouvrement de la surface initiale. De la définition des recouvrements d'espaces topologiques, donnée par C. Chevalley, je déduis une définition axiomatique des recouvrements abstraits de surfaces de Riemann, et de la surface de recouvrement relativement non ramifiée. Tout ce qui suit ne concerne plus alors que des surfaces de Riemann définies par prolongement analytique de Weierstrass. L'arbre topologique défini par Speiser, et utilisé par Nevanlinna, Ulrich, Elfving, etc. permet-il de déterminer si la surface qu'il représente est, ou non, la surface de recouvrement d'une surface de Riemann? Ayant défini dans ce but les arbres topologiques régulièrement ramifiés, je caractérise parmi eux une classe d'arbres qui satisfont à la question posée. On peut pour chacun de ces arbres, déterminer une surface fermée dont la surface de recouvrement admet précisément pour arbre topologique l'arbre donné. Ces considérations font l'objet du Chapitre III.

Le Chapitre IV est consacré à la décomposition en feuillets des surfaces de Riemann simplement connexes, ou, ce qui revient au même, à la construction des domaines d'univalence pour la fonction inverse de l'uniformisante. Ce problème a été abordé en 1931 par F. Marty, dans le cas général, et par T. Schimizu dans le cas des surfaces de Riemann de type parabolique. G. Valiron (1946) a mis en évidence certaines singularités possibles pour les domaines d'univalence et leur disposition. J'indique une première méthode de résolution qui consiste à enfermer les singularités transcendantes dans des domaines de diamètres décroissants, quand cela est possible. On obtient ainsi une classification des points transcendants isolés, d'après l'allure des domaines d'univalence. Dans le cas des surfaces de Riemann de type parabolique la méthode des étoiles d'holomorphie permet de résoudre le problème : les

domaines d'univalence correspondants, pour la fonction inverse de l'uniformisante, ont tous leurs points frontières accessibles, mais leur répartition peut présenter le cas de division impropre.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude pour MM. Montel, Valiron et Cartan dont les cours à la faculté des Sciences et à l'École Normale Supérieure, ont décidé de l'orientation de mes recherches, et je suis heureux qu'ils aient bien voulu accepter de constituer le jury de ma thèse. Je remercie tout particulièrement M. G. Valiron pour l'intérêt bienveillant qu'il n'a cessé d'apporter à mon travail. Ses encouragements et ses conseils m'ont été extrêmement précieux.

CHAPITRE I.

THÉORIE DU RACCORDEMENT.

A. — Sur les suites de fonctions univalentes.

Soit une suite de fonctions $z_{n+1}=f_n(z_n)$ vérifiant les conditions suivantes :

a. $f_n(z_n)$ est holomorphe univalente dans C_n ($|z_n|\leq r_n$) avec $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=1$;

b. l'image de C_n par f_n est un domaine $\Gamma_n \subset C_{n+1}$.

1. $r_{n+1}\geq \max|f_n(z_n)|\geq r_n$. Soit R la limite finie ou infinie de la suite r_n.

2. $f_{n-h}(z_{n-h})$ est une fonction $\varphi_{n,h+1}(z_n)$ holomorphe univalente dans C_n et normalisée au centre. Les $\varphi_{n,h}$ (n fixe, $h>0$) formant une famille bornée normale dans l'intérieur de C_n, soit φ_{n,h_i} une suite convergeant uniformément dans l'intérieur de C_n vers $\Phi_n(z_n)$ holomorphe, univalente dans C_n, normalisée au centre.

Soit $m>n$, et δ_n un ensemble fermé intérieur à C_n, d'image δ_m dans C_m. La famille $\varphi_{m,k_i}(z_m)$, $(m+k_i=n+h_i,\ k_i>0)$ bornée dans l'intérieur de C_m, converge dans δ_m donc uniformément dans l'intérieur de C_m vers $\Phi_m(z_m)$, holomorphe, univalente et normalisée au centre de C_m. $\Phi_m\circ\varphi_{n,m-n}=\Phi_n$ dans C_n pour tout $m>n$.

3. Soit C le cercle $|z|<R$.

α. Si $\zeta_n\in C_n$, $\Phi_n(\zeta_n)\in C$ sinon il existerait h_i tel que $|\varphi_{n,h_i}(\zeta_n)|>R\geq r_{n+h_i}$ ce qui est contraire à la condition *b*.

β. Tout cercle $|z|\leq\rho<R$ est couvert par l'image par $z=\Phi_n(z_n)$ d'un cercle C_n pour n assez grand.

Choisissons ρ_1 et r_n vérifiant $\rho < \rho_1 < r_n < R$. Désignons par $\varphi_{n,p}$ la suite φ_{n,h_n};

(B) $\begin{cases} \text{Si R est fini, } \left|\dfrac{\varphi_{n,p}}{z_n}\right| \leq \dfrac{R}{r_n}. \text{ Soit } A > 1. \text{ On peut choisir } n \text{ assez grand pour que } \dfrac{R}{r_n} < A. \\ \text{Si R est infini, } \left|\dfrac{\varphi_{n,p}}{z_n}\right| \leq \dfrac{r_n^2}{(r_n - z_n)^2} < \dfrac{r_n^2}{(r_n - r')^2}. \text{ En se limitant au disque } |z_n| < r' < r_n \\ \quad \text{avec } r' > \rho_1; \text{ une fois } r' \text{ fixé on peut choisir } n \text{ pour que } \dfrac{r_n^2}{(r_n - r')^2} < A. \end{cases}$

Par un calcul fait par Bieberbach (1) on trouve :

$$|\varphi_{n,p} - z_n| < \sqrt{A^2 - 1}\,.\rho_1.\sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{\rho_1}{r}\right)^2}} = H$$

valable pour $|z_n| \leq \rho_1 < r$, avec $r < r_n$ si R est fini, $r < r'$ si R est infini.

Soit ε donné : choisissons alors $\rho_1 > \rho + \varepsilon$, puis $r > \rho_1$ (et $r' > r$ si R est infini). Ayant calculé A pour que $H < \varepsilon$, on peut déterminer n pour que $r_n > r$ ($r_n > r'$ si R est infini), et que les conditions (B) soient satisfaites.

Dans ces conditions $|\Phi_n - z_n| \leq \varepsilon$, et l'image par Φ_n du cercle $|z_n| \leq \rho_1$ est limitée par une courbe située dans la couronne $((\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 + \varepsilon))$. L'image du cercle C_n, *a fortiori*, couvre le cercle $|z| \leq \rho$.

4. Supposons que les $\varphi_{n,h}(z_n)$ ne convergent pas. On peut définir une fonction $\Psi_n(z_n)$ possédant les mêmes propriétés que Φ_n. Soit $\zeta \in C$, et $\zeta_p \in C_p$ tel que $\Phi_p(\zeta_p) = \zeta$ avec représentation conforme biunivoque des voisinages; ζ_p est unique dans C_p. Soit $\zeta' = \Psi_p(\zeta_p)$, ζ_p est le seul point de C_p dont l'image par Ψ_p est ζ'. ζ' est indépendant de p :

$$\Phi_p(\zeta_p) = \Phi_q \circ \varphi_{p,q-p}(\zeta_p) = \zeta \qquad \text{quel que soit } q > p$$

$\zeta_q = \varphi_{p,q-p}(\zeta_p)$ est le seul point de C_q dont l'image par Φ_q est ζ

$$\Psi_q(\zeta_q) = \Psi_q \circ \varphi_{p,q-p}(\zeta_p) = \Psi_p(\zeta_p) = \zeta'.$$

On peut donc réaliser une correspondance $\zeta \leftrightarrow \zeta'$ de C sur lui-même, avec représentation conforme biunivoque des voisinages, dans laquelle le centre de C est son propre homologue, la dérivée γ étant 1. C'est l'identité.

5. *Si un arc de la circonférence* C_n *est représenté par tout* $\varphi_{n,h}$ *suivant un arc de la circonférence* C_{n+h}, *la fonction* Φ_n *représente l'intérieur de cet arc analytiquement sur un arc de la circonférence de* C *qui est de rayon fini.*

Soit γ cet arc de la circonférence C_n et T un morceau simplement connexe de C_n et contigu à γ. Les fonctions $\varphi_{n,h}(z_n)$ analytiques dans T et sur sa frontière (sauf peut-être aux extrémités de γ), représentent T sur $T_h \subset C_{n+h}$, et sont aussi holomorphes univalentes dans $\Theta = \mathring{T} \cup \mathring{T}' \cup \gamma$ (où $\mathring{A}$ est l'intérieur de A, et T'

(1) *Funktionentheorie*, 1931, p. 181 (édition Chelsea).

l'image de T par rapport à la circonférence C_n). De la limitation de $\varphi_{n,h}$ et $|\varphi'_{n,h}|$ dans l'intérieur de T on déduit l'existence d'une borne pour $|\varphi_{n,h}|$ dans l'intérieur de Θ : il suffit pour cela d'introduire un nombre fini de cercles intérieurs à $C \cup \Theta$, recouvrant un domaine arbitraire intérieur à Θ; dans chacun d'eux les $|\varphi_{n,h}|$ sont bornés, ce qu'on peut voir en opérant de proche en proche à partir de ceux de ces cercles qui ont leur centre dans $\mathring{C}_n$. La suite φ_{n+h} converge donc uniformément dans tout domaine intérieur à Θ, domaine que l'on peut supposer contenir n'importe quel arc $\gamma' \subset \mathring{\gamma}$.

Posons $z_n = r_n e^{i\theta}$; γ' correspond à $\theta'_1 \leq \theta \leq \theta'_2$. On a $|\varphi_{n,h}(r_n e^{i\theta})| = r_{n-h}$. On peut trouver h assez grand pour que $|\Phi_n - \varphi_{n,h}| < \varepsilon$ dans tout un

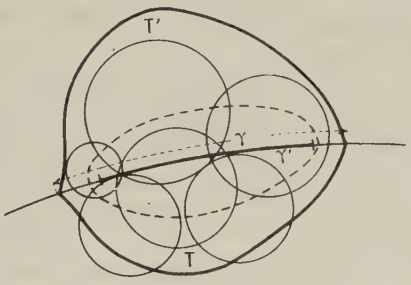


Fig. 1.

domaine contenant γ' à son intérieur. Si $|\Phi_n| \neq$ const. sur γ' on aurait $|\Phi_n(r_n e^{i\theta'})| - |\Phi_n(r_n e^{i\theta''})| = \alpha$. Prenant $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$ on aurait

$$|r_{n+h} - \Phi_n(r_n e^{i\theta'})| < \frac{\alpha}{3} \quad \text{et} \quad |r_{n-h} - \Phi_n(r_n e^{i\theta''})| < \frac{\alpha}{3},$$

ce qui est impossible, donc $\alpha = 0$.

$|\Phi_n| =$ const. sur γ' mais $\Phi_n \neq$ const. sinon elle serait aussi constante dans C_n. $|\Phi_n|$ est bornée dans Θ, donc C est un cercle de rayon fini et la représentation de γ' sur un arc de la circonférence de C est analytique.

B. — Raccordement de première espèce.

1. Position du problème.

Définitions. — Soient dans les plans z et ζ deux domaines A et B et deux parties A' et B' de A et B en correspondance conforme biunivoque par $\zeta = \psi(z)$. A' et B' sont supposés *maxima*, c'est-à-dire que $\zeta = \psi(z)$ n'est pas prolongeable dans A — A', $\psi(z)$ restant univalente à valeurs dans B.

Définition. — *Raccorder les domaines* A *et* B *des plans* z *et* ζ, *par* ψ, *ou suivant* A', *c'est déterminer une fonction* $w = f(z)$ *et une fonction* $w = \varphi(\zeta)$.

méromorphes et univalentes dans A *et dans* B, *prenant les mêmes valeurs en deux points homologues de* A′ *et* B′ [*associés par* $\zeta = \psi(z)$] *et des valeurs distinctes pour tout autre couple* $z \in A$ *et* $\zeta \in B$.

On écrira que w est méromorphe univalente dans $A \overset{A'}{\sim} B$ ou $(A \overset{B'}{\sim} B)$.

Si le raccordement est possible l'ensemble Δ des valeurs prises par w lorsque z parcourt A et ζ parcourt B forme un domaine : soient A^* et B^* les domaines images de A et B par f et φ. z_0 et ζ_0 étant choisis homologues dans A′ et B′, $w_0 = f(z_0) = \varphi(\zeta_0)$: $w_A \in A^*$ et $w_B \in B^*$ peuvent être joints à w_0 par deux courbes respectivement intérieures à A^* et B^* donc à Δ. Δ connexe est bien un domaine. Nous écrirons $\Delta = (A \overset{A'}{\sim} B)$.

Si $P \in \mathring{A}$ (ou $\mathring{B}$) son image par $f(z)$ [ou $\varphi(\zeta)$] $\in \mathring{\Delta}$. et inversement $P^* \in \mathring{\Delta}$ est l'image d'un point $\in \mathring{A}$ ou $\in \mathring{B}$.

Si Δ est simplement connexe, soit Δ^1 une image conforme de Δ : Δ^1 est un cercle dont le centre est l'image de $z_0 \in \mathring{A}$, avec $\left(\frac{dw^1}{dz}\right)_{z_0} = 1$, on écrira $\Delta^1 = (A \overset{A'}{\sim} B)_{z_0}$.

Unicité. — Soient $\Delta^1 = (A \overset{A'}{\sim} B)_{z_0}$ et $\Delta^2 = (A \overset{A'}{\sim} B)_{z_0}$. $P^*(w^1) \in \mathring{\Delta}^1$ est l'image de $z \in \mathring{A}$ (ou de $\zeta \in \mathring{B}$) qui a lui-même pour image dans Δ^2, Q^*. Cette image est unique même si $z \in A'$, et en vertu de l'univalence des fonctions f^1, φ^1, f^2, φ^2, la correspondance établie entre P^* et Q^* est localement conforme biunivoque, donc aussi globalement. La représentation de Δ^1 sur Δ^2 normalisée au centre est l'identité.

Types de raccordement. — Soient un cercle A, A′ une portion connexe de ce cercle limitée par des arcs de Jordan (sans points doubles) dont tous les points sont accessibles par l'intérieur (une exception sera envisagée : voir remarque 3, p. 13). Soit $\mathfrak{A} = \mathring{A} - \mathring{A}'$.

1° *Disposition en croissant.* — A′ simplement connexe, et $\mathfrak{A}$ admettent chacune au moins un arc de la circonférence de A, comme élément frontière. Cette circonférence est partagée en un nombre fini d'arcs frontières de A′ et $\mathfrak{A}$;

2° *Disposition en pince.* — $\mathfrak{A}$ connexe; A′ simplement connexe admet toute la circonférence de A comme frontière, un point de cette circonférence étant frontière de $\mathfrak{A}$;

3° *Disposition en anneau.* — Aucun point de la circonférence de A n'est frontière pour $\mathfrak{A}$. A′ est de connexion finie ≥ 2.

Nous étudierons quatre types de raccordement :

Raccordement par croissants lorsque les décompositions de A et B se font en croissants. On se bornera au cas où $\mathfrak{B}$ est simplement connexe.

Raccordement par croissant et pince : décomposition de A en croissant, de B en pince.

Raccordement par pinces : décomposition de A et B en pinces;

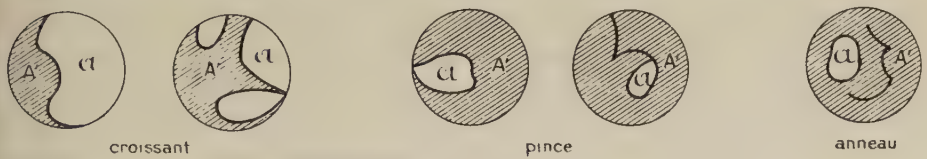


Fig. 2.

Raccordement par anneaux : décomposition de A et B en anneaux. On se bornera au cas où A′ (donc aussi B′) est doublement connexe.

Cas d'impossibilité. — Sur la frontière de A′ nous distinguerons les arcs *externes* qui appartiennent à la circonférence de A et les arcs *internes* dont les intérieurs $\subset \mathring{A}$. Les frontières de A′ et B′ se correspondent ponctuellement et continûment par $\zeta = \psi(z)$. On pourra donc distinguer sur la périphérie de A′ les arcs homologues d'arcs internes de B′ et les arcs homologues d'arcs externes de B′.

Théorème. — *Si sur la périphérie de* A′ *les homologues des arcs externes de* B′ *ne couvrent pas les arcs internes de* A′, *le raccordement* $A \perp B$ *ne peut être réalisé.*

Remarque. — Si les homologues des arcs externes de B′ couvrent les arcs internes de A′, c'est que tout point d'un arc interne de A′ correspond à un point de la circonférence de B, donc un point d'un arc interne de B′ ne peut correspondre qu'à un point de la circonférence de A; c'est dire que les homologues des arcs externes de A′ couvrent les arcs internes de B′.

Soient sur la circonférence de A, l et l' les ensembles des arcs frontières de $\mathfrak{A}$ et A′; soient l'' la frontière interne de A′, et μ' l'ensemble des homologues

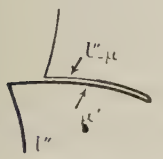
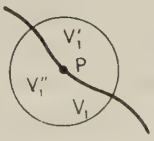


Fig. 3.



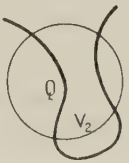
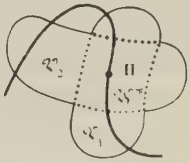


Fig. 4.



des arcs externes de B′. De la même façon, m désigne l'ensemble des arcs frontières de $\mathfrak{B}$, situés sur la circonférence de B, m' la frontière externe de B′, m'' sa frontière interne.

Supposons $l'' - \mu'$ non vide, il s'agit d'un arc $l'' - \mu'$ au sens de l'accessibilité dans A′ : il se pourrait pour un point de l'' que pour certains chemins d'accès

il appartienne à μ' et pour d'autres il appartienne à $l''-\mu'$ (*fig.* 3). Soit $P_0 \in l''-\mu'$ ($P_0 \in \mathring{A}$) et V_0 un voisinage de P_0, $V_0 \subset \mathring{A}$. Comme l'' est une courbe de Jordan on peut trouver dans $\mathring{V}_0$ un point $P(P \in l''-\mu')$ et $V_1(P) \subset V_0$ partagé par l'' en deux morceaux seulement V_1' et V_1'' dont l'un au moins vérifie $V_1' \subset A'$. Supposons le raccordement $A \overset{A'}{\perp} B$ réalisable : $w=f(z)$ holomorphe univalente dans V_1 le représente sur $\mathfrak{V}_1$. D'autre part la correspondance $A' \leftrightarrow B'$ continue sur les frontières associe à P au moins un point Q sur m'' ($Q \in \mathring{B}$), unique si $V_1'' \not\subset A'$. $w=\varphi(\zeta)$ représente sur $\mathfrak{V}_2$ un voisinage V_2 de Q. La considération de deux suites de points homologues dans $\mathring{V}_1'$ et $\mathring{V}_2$ tendant respectivement vers P et Q montre que P et Q ont même image H dans le plan w. $H \in \mathfrak{V}_1$, $H \in \mathfrak{V}_2$ donc $\mathfrak{V}_1 \subsetneq \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{W}^* \neq 0$: soit $\mathfrak{W}' \subsetneq \mathfrak{W}^*$ un voisinage de H partagé en deux morceaux seulement $\mathfrak{W}'$ et $\mathfrak{W}''$ par l'image de l''. Soient alors W_1, W_1', W_1'' les images dans le plan z par $z=f^{-1}(w)$ de $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$; W_2, W_2', W_2'' leurs images dans le plan ζ par $\zeta=\varphi^{-1}(w)$. $\zeta=\psi(z)$ définit une correspondance conforme biunivoque entre W_1' et W_2'; $\zeta=\varphi^{-1}(w)$ est holomorphe univalente dans $\mathfrak{W}'$ donc $\zeta=\varphi^{-1}\circ f(z)$ est holomorphe univalente dans W_1, identique à $\psi(z)$ dans W_1'; $\psi(z)$ est alors prolongeable dans $A''=A' \cup W_1$ ses valeurs restant dans B puisqu'elles sont dans W_2 : deux cas sont alors possibles :

a. $\psi(z)$ ainsi prolongée est univalente dans un domaine $A''' \supset A'$: A' ne serait pas maximum;

b. m'' ne pénétrant pas dans W_2' et certains points de W_2'' appartenant à B', c'est que $W_2'' \subset B'$. Soit $W_1''' = \psi^{-1}(W_2'')$; $\mathfrak{W}'' = f(W_1'') = \varphi(W_2'') = f(W_1''')$; mais f est univalente donc $W_1''' \equiv W_1''$, et $W_1'' \subset A'$. La fonction $\psi(z)$ donnée est identique dans W_1' au prolongement dans W_1 entier de $\psi(z)$ donnée dans W_1'. La correspondance $A' \overset{\psi}{\underset{z}{\longleftrightarrow}} B'$ s'étend donc à la portion de l'' (et m'') intérieure à W_1 (et W_2) : A' ne serait pas maximum.

Remarque. — Soit $\tilde{A}=A-(l''-\mu')$ que nous supposons simplement connexe. Un « raccordement » de A et B suivant A', où l'on admettrait la possibilité pour les points de $(l''-\mu')$ d'avoir pour image, des points frontières du domaine image de ce « raccordement » n'est autre que le raccordement $\tilde{A}^* \overset{B}{\perp} B$, où $\tilde{A}^*$ est une image conforme circulaire de $\tilde{A}$. On est ainsi ramené au cas où $\mu' \supset l''$.

2. Raccordement par croissants.

Soient β_1 et β_2 les extrémités de m', β_1' et β_2' celles de μ'. Soient α_1 et α_2 sur la circonférence de A les extrémités de l'arc de cette circonférence, frontière de A' et contenant $\widehat{\beta_1'\beta_2'}$ = frontière de $A'-\mu'$. β_1 sera dit extrémité régulière de B' s'il est possible de construire à l'intérieur de B' une courbe aboutissant

en β_1 en coupant la circonférence de B sous un angle $\neq 0$ (à $k\pi$ près); dans le cas contraire on dira que β_1 est une extrémité irrégulière de B'. Remarquons que la frontière interne de B' reste à une distance finie de tout arc intérieur à m'.

Cas régulier. — β_1 et β_2 sont extrémités régulières de B'. On peut alors construire un arc de cercle C_1 intérieur à B' coupant Γ_B (circonférence de B) en β_1 et β_2 sous un angle $\theta = \frac{\pi}{2^n}$ (n entier). A C_1 correspond dans A' un arc γ_1 joignant β'_1 et β'_2, séparant A' en deux parties dont l'une $\mathfrak{A}'_1$ est contiguë à $\mathfrak{A}$. Posons $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'_1 \cup l''$. ξ étant un point choisi dans $\mathfrak{A}$, il existe $z_1 = f_1(z)$ représentant $\mathfrak{A}_1$ simplement connexe, sur un cercle A_1, la correspondance étant analytique entre les frontières (sauf en β'_1 et β'_2), et avec $f_1(\xi) = 0$, $f'_1(\xi) = 1$. Soit Γ_1 l'image de γ_1 : les autres éléments de A_1 seront notés par

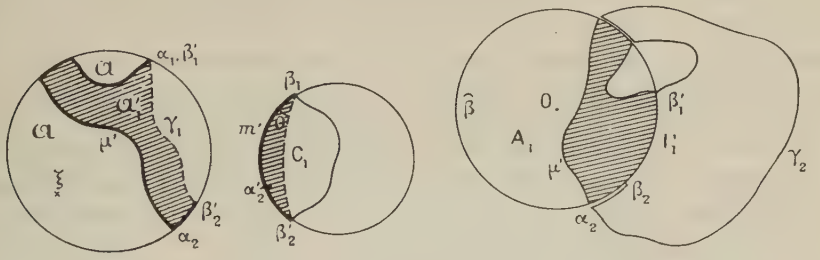


Fig. 5.

les mêmes lettres que leurs éléments homologues dans A; soit β l'arc de la circonférence de A_1, autre que Γ_1. Le domaine $< m', C_1 >$ limité par m' et C_1 (plan ζ) est en correspondance conforme biunivoque avec $< \mu', \Gamma_1 >$ du plan z_1; cette correspondance peut être prolongée par la méthode des images par rapport aux côtés homologues C_1 et Γ_1. Soit C_2 l'image de m' par rapport à C_1, et γ_2 l'image de μ' par rapport à Γ_1. $< \beta, \gamma_2 >$ simplement connexe, à frontière accessible, est représenté sur A_2 par $z_2 = f_2(z_1)$ normalisée à l'origine $A_2 = (\mathfrak{A}_1 \underline{\mathfrak{A}'_1} < m', C_2 >)_\xi$. Soit Γ_2 l'image de γ_2. De la même façon le prolongement de la correspondance existant entre $< m', C_2 >$ et $< \mu', \Gamma_2 >$ au delà de C_2 et Γ_2 fournit dans un plan z_3, $A_3 = (\mathfrak{A}_1 \underline{\mathfrak{A}'_1} < m', C_3 >)_\xi$. On poursuivra l'opération, et l'on obtiendra dans le plan z_{n+1},

$$A_{n+1} = (\mathfrak{A}_1 \underline{\mathfrak{A}'_1} < m', C_{n+1} >)_\xi = (\mathfrak{A}_1 \underline{\mathfrak{A}'_1} B)_\xi$$

puisque $B \equiv < m', C_{n+1} >$ (1).

Soient $z_{n+1} = f(z)$ et $z_{n+1} = \varphi(\zeta)$ les fonctions ainsi déterminées dans $\mathfrak{A}_1$

(1) Cette construction, sous des hypothèses moins larges, est indiquée dans *Bieberbach* (ouv. cité p. 172), la validité du raccordement n'étant pas assurée dans A entier.

et B. Pour $z \in \mathfrak{A}_1$, $f(z) = \varphi \circ \psi(z)$; mais $\varphi \circ \psi$ est défini dans tout A', donc aussi $f(z)$ qui satisfait à $f(z_0) = \varphi(\zeta_0)$, pour z_0 et ζ_0 homologues quelconques dans A' et B'. Donc $A_{n-1} = (\mathfrak{A}_1 \overset{\alpha'_1}{\perp} B)_\xi = (A \overset{\alpha'}{\perp} B)_\xi$. On peut enfin par une transformation homographique $w = h(z_{n-1})$ de A_{n-1} sur un cercle Δ obtenir $\Delta = (A \overset{\alpha'}{\perp} B)_Z$ où Z est un point quelconque de A ou de B.

Remarque. — A et B n'ont pas joué initialement le même rôle : on a été conduit à supposer $\mathfrak{B}$ simplement connexe pour déterminer m' donc μ', ce qui ne pouvait se faire si aucun des deux domaines $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ n'était connexe.

On a construit C_1 dans B', mais on pourrait réaliser la construction de Δ par le même processus fini à partir d'un arc de cercle C'_1 intérieur à A' et d'extrémité α_1 et α_2 (pourvu qu'elles soient régulières).

Cas irrégulier. — Si le problème ne peut être résolu par l'examen précédent c'est que l'une au moins des extrémités (α_1, α_2), et l'une au moins des extrémités (β_1, β_2) sont irrégulières. Remarquons aussi que si β_2 et α'_2 sont distincts, on peut prendre sur l'arc $\overset{\frown}{\beta_2 \alpha'_2}$ un point quelconque β_3 comme extrémité régulière de B' (ou α_3 sur l'arc correspondant $\overset{\frown}{\alpha_2 \beta'_2}$). Le seul cas exceptionnel est donc le suivant : dans B, $\alpha'_i \equiv \beta_i$ extrémité irrégulière de B' pour au moins une valeur de i (1 ou 2); dans A, $\alpha_j = \beta'_j$ extrémité irrégulière de A', pour au moins une valeur de j (1 ou 2).

Supposons $\alpha'_1 \equiv \beta_1$ extrémité irrégulière. Soit une exhaustion de m, $m'_1 \subset m'_2 \subset \ldots \subset m'_n \subset \ldots$; $m'_n \subset m'$ ayant pour extrémités $\beta_{1,n}$ et $\beta_{2,n}$. La suite des $\beta_{1,n}$ converge vers β_1, et $\beta_{2,n}$ pourra être choisi $\equiv \beta_2$ si β_2 est extrémité régulière de B', ou à β_3 si $\beta_2 \neq \alpha'_2$, sinon $\beta_{2,n} \to \beta_2$. Pour $n > n_0$, $\beta'_{1,n} \in \mathring{A}$ (où $\beta'_{1,n}$ correspond à $\beta_{1,n}$), $\beta'_{1,n} \to \alpha_1$. Soit A_n le domaine obtenu en retirant de A l'arc $\overset{\frown}{\alpha_1 \beta'_{1,n}}$ (arc interne de A') et éventuellement l'arc $\overset{\frown}{\alpha_2 \beta'_{2,n}}$. Soit dans le plan w_n, $\Delta_n = (A_n \overset{\alpha'}{\perp} B)_{\zeta_0}$. Tout point $P_n \in \mathring{\Delta}_n$, étant lui-même image d'un point $P_0 \in \mathring{A}_n$ ou $\mathring{B}$ avec représentation conforme biunivoque des voisinages, se représente de la même façon sur $P_m \in \mathring{\Delta}_m$ $(m > n)$ où P_m est unique. Inversement $P_m \in \mathring{\Delta}_m$ est image soit d'un point $P_0 \in \mathring{B}$, soit de $P_0 \in \mathring{A}_m$; P_0 est alors soit frontière soit intérieur à A_n, et dans ce dernier cas seulement P_m est l'image d'un point $P_n \in \mathring{\Delta}_n$ unique. En particulier si $m = n+1$ on définit une suite $w_{n-1} = \varphi_{n-1}(w_n)$ satisfaisant aux conditions du paragraphe A. Soit Δ le cercle limite des cercles Δ_n. $P \in \mathring{\Delta}$ est image d'un $P_n \in \mathring{\Delta}_n$ (n assez grand) lui-même image de $P_0 \in$ soit à $\mathring{B}$ soit à $\mathring{A}_n$ donc à $\mathring{A}$. Inversement si $P_0 \in \mathring{B}$ ou $\in \mathring{A}$, il existe n tel que $P_0 \in \mathring{B}$ ou $\mathring{A}_n$, et P_0 a une image unique $P_n \in \mathring{\Delta}_n$ donc une image $P \in \mathring{\Delta}$. Comme toutes ces images s'accompagnent de représentation conforme biunivoque des voisinages et que deux points homologues par $\zeta = \psi(z)$ ont même image dans tout Δ_n, donc dans Δ on a $\Delta = (A \overset{\alpha'}{\perp} B)_{\zeta_0}$.

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses du raccordement par croissants* (p. 6), *si l'homologue de l'arc externe* (*unique*) *de* B′ *couvre l'ensemble des arcs internes de* A′, *le raccordement* $A \overset{A'}{\perp\!\!\!\perp} B$ *est réalisable*, $\Delta = (A \overset{A'}{\perp\!\!\!\perp} B)_{\tilde{z}_0}$ *étant un cercle de rayon fini.*

LA FRONTIÈRE DE Δ. — Soient sur la circonférence de A, $(\alpha_1\alpha_2)$ l'arc $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2} \supset l$, et $(\alpha_1\alpha_2)'$ son complémentaire. Soit $(\alpha_1\alpha_2)''$ le complémentaire de $(\alpha_1\alpha_2)'$ sur la frontière de A′. $(\beta_1\beta_2)$, $(\beta_1\beta_2)'$, $(\beta_1\beta_2)''$ représentent les éléments analogues dans B.

La construction de Δ dans le cas régulier montre que les points $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$ ont pour images sur la circonférence de Δ, Γ_Δ, des points $\alpha_1^*\alpha_2^*\beta_1^*\beta_2^*$, la correspondance entre $(\alpha_1\alpha_2)$ et $(\alpha_1^*\alpha_2^*)$, $(\beta_1\beta_2)$ et $(\beta_1^*\beta_2^*)$ étant analytique, et les arcs $(\alpha_1\alpha_2)''$ et $(\beta_1\beta_2)''$ ayant pour images des courbes de Jordan aboutissant en α_1^*, α_2^* et β_1^*, β_2^*.

Cas irrégulier. — Δ est de rayon fini : $(\alpha_1\alpha_2)$ a une image suivant un arc de circonférence de chaque Δ_n. En appliquant le résultat (§A, 5) on trouve que $(\alpha_1^*\alpha_2^*)$ se représente analytiquement sur un arc ouvert de F_Δ. De même pour $(\beta_1^*\beta_2^*)$.

Image des extrémités α_1 et α_2 : soit dans $\mathfrak{A}$ une courbe L aboutissant en α_1. Supposons que son image L^* dans Δ n'aboutisse pas en un point de F_Δ; L^* approche uniformément un arc K de F_Δ. $\bar{K}$ ne peut contenir deux points accessibles de la frontière de A^* (image de A dans Δ), sinon on pourrait trouver sur L^* deux suites de points convergeant respectivement vers chacun de ces points, et auxquelles devraient correspondre dans A deux suites convergeant vers des points distincts de Γ_Λ, ce qui est contraire au fait que L aboutit en α_1. Soit donc $K' \subset F_\Delta$, le support inaccessible de la frontière de A^*; $K \subset K'$. Soit $\lambda_n = \overset{\frown}{\alpha_1\beta'_{1.n}} = \mathring{A} - \mathring{A}_n$. Δ_n a pour image dans Δ, $\Delta_n^* = \Delta - \lambda_n^*$, où λ_n^* est l'image de λ_n. Pour la même raison que précédemment $\bar{K}$ ne peut contenir deux points accessibles de la frontière de Δ_n^* : soit alors $k \subset F_\Delta$, l'arc limite de λ_n^*; $K \subset k$. Ni K′, ni K, ni k ne peuvent couvrir F_Δ, donc ils ont chacun deux extrémités :

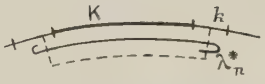


Fig. 6.

a. K et k ont au moins une extrémité commune; sinon $K \subset \mathring{K}'$ et l'on pourrait construire un rectangle dont K serait un arc frontière et contenant L^* (à partir d'un certain point); mais ce même rectangle serait séparé en deux régions par

un arc de λ_n^*, et cela aussi près de K (uniformément) que l'on veut. L^* ne pourrait traverser cet arc donc s'approcher de K (*fig.* 6).

b. $K' \equiv k$. k ne peut contenir deux points accessibles de la frontière de A^* donc $K' \supset k$. Mais $\beta_1 = \alpha_1'$ et pour B^* les rôles de K′ et k sont permutés et $(\beta_1 \beta_2)''$ possède au voisinage de β_1 les mêmes propriétés que λ_n au voisinage de α_1. Donc $k \supset K'$ soit $k \equiv K'$.

c. K′ est un bout premier de la frontière de A^* : soient une suite quelconque de points intérieurs ou frontières (accessibles) de A^*, ayant tous ses points limites sur K′ et deux points accessibles quelconques de A^* qui sont soit sur l'image de $(\alpha_1 \overset{\frown}{\alpha_2})$, extrémités comprises, soit sur celle de $(\alpha_1 \overset{\frown}{\alpha_2})'$. Dans tous les cas à partir d'un certain rang les traces des points de la suite ne séparent pas les deux points : la suite initiale est une suite pure et les suites ainsi définies sont toutes équivalentes.

Remarque 1. — Supposons β_2 extrémité régulière de $(\beta_1 \beta_2)''$. Soit sur Γ_Δ $(\alpha_1 \beta_2')$ l'arc $\overset{\frown}{\alpha_1 \beta_2'}$ contenant $(\alpha_1 \alpha_2)$. Sur la circonférence de Δ_n il y a un arc γ_n formé des images de $(\alpha_1 \beta_2')$ et $(\beta_1 \beta_2)$ ayant une extrémité commune image continue de β_2' et β_2. Les résultats du paragraphe A, 5 s'appliquent à γ_n, donc $(\alpha_1 \beta_2')$ et $(\beta_1 \beta_2)$ ont pour image sur F_Δ deux arcs ayant une extrémité commune image continue de β_2' et β_2.

2. L'arc K′ peut effectivement exister sans être réduit à un point. Soient dans un cercle Δ deux courbes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ s'accumulant suivant le même arc K′ de la circonférence de Δ, et partageant Δ en trois domaines $\mathfrak{A}^*$, A'^* (limité par $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$) et $\mathfrak{B}^*$. Soit $A^* = \mathfrak{A}^* \cup A'^* \cup \mathfrak{L}$ et $B^* = A'^* \cup \mathfrak{M} \cup B^*$. Dans la représentation de A^* sur un cercle A, K′ est un bout premier correspondant à un point α_1 de la circonférence de A, et $\mathfrak{L}$ a pour image l aboutissant en α_1. Soit sur la circonférence de B (image de B^*), β_1 le point image du bout premier K′ et m

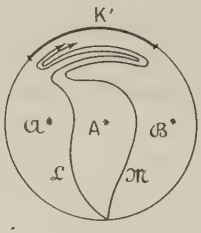


Fig. 7.

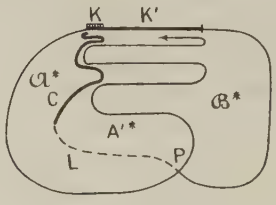


Fig. 8.

aboutissant en β_1 l'image de $\mathfrak{M}$. α_1 et β_1 sont nécessairement extrémités irrégulières de A′ et B′ (images de A'^* dans A et B) sinon $A \simeq B$ serait possible avec correspondance ponctuelle des frontières même en α_1 (*fig.* 7).

Application. — L'étude précédente fournit une solution simple à un problème de représentation conforme au voisinage de la frontière : soit D un domaine

simplement connexe, et K′ un arc support inaccessible d'éléments frontières; soit C une courbe issue d'un point $\in \mathring{D}$ et s'accumulant suivant $K \subset K'$. Complétons C de façon à former une courbe L aboutissant en P accessible sur la frontière de D; L sépare D en $\mathfrak{A}^*$ et A'^*; soit $\mathfrak{B}^*$ un domaine limité par la frontière de D et une courbe construite à l'extérieur de D, joignant P à l'extrémité de K′ non accessible dans D. Dans la représentation de D sur un cercle A, K′ est un bout premier correspondant à α_1 qui est extrémité irrégulière de A′ image de A'^*. Cela résulte de ce que $D \cup \mathfrak{B}^*$ peut être considéré comme $(A \overset{\vee}{\subset} B)$ ou B est l'image circulaire de $A'^* \cup \mathfrak{B}^*$. Si α_1 n'était pas irrégulière K serait réduit à un point (*fig.* 8).

Théorème. — K *bout premier d'un domaine* D *représenté sur un cercle* A, *a pour image un point* α *de ce cercle. A une courbe aboutissant régulièrement en* α *correspond dans* D *un arc aboutissant à l'extrémité accessible du bout premier* K.

3. Si nous admettons la possibilité pour la frontière de A′ de s'accumuler suivant un arc de la circonférence de A, on peut cependant réaliser $A \overset{\vee}{\subset} B$ par

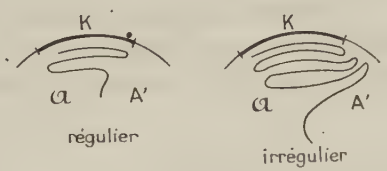


Fig. 8 *bis*.

la méthode indiquée dans l'étude du cas irrégulier. Chaque cas nécessitera une étude spéciale des frontières et l'on sera amené à distinguer les arcs inaccessibles extrémités régulières et irrégulières de A′ suivant que de l'extrémité accessible du bout premier on peut ou non construire une courbe intérieure à A′ faisant avec la circonférence de A′ un angle $\neq 0$ (*fig.* 8 *bis*).

3. — Réduction au raccordement par croissants.

A. Raccordement par pince et croissant. — β_1 et β_2 distincts sur la frontière de B′ sont confondus en β sur la circonférence de B.

a. $\alpha'_1 \neq \beta_1$. 1° β_2 extrémité non irrégulière de B. On prendra pour C_1 un arc de cercle $\overset{\frown}{\alpha'_1 \beta_2}$; 2° $\beta_2 = \alpha'_2$ se repporter aux méthodes *b* ci-dessous.

b. $\alpha'_1 = \beta_1$, $\alpha'_2 = \beta_2$. 1° α_1 et α_2 sont extrémités régulières de A′. On construit dans A′ l'arc de cercle C_1 et l'on construit $(A \overset{\text{IV}}{\subset} B)_\xi$ où $\xi \subset \mathring{\mathfrak{B}}$ si $\mathring{\mathfrak{B}} \neq 0$. Il est possible que $\mathring{\mathfrak{B}} = 0$, c'est donc $\mathfrak{B}$ est formé d'un ou plusieurs arcs de courbes issus de β. On prendra alors pour ξ une extrémité de $\mathfrak{B}$ et l'on devra après chaque opération représenter sur un cercle un domaine simplement connexe

constitué par le plan privé d'une courbe joignant à l'infini un point image de β. On peut encore construire $(A \overset{B'}{\perp} B)_\xi$ donc aussi $(A \overset{A'}{\perp} B)_\xi$ par un processus fini;

2° si α_1 (ou α_2) est irrégulière on entaillera A suivant $\overset{\frown}{\lambda_n = \alpha_1 \beta'_{1,n}}$ ce qui conduira à la construction de Δ comme limite de domaines Δ_n (*cf*, cas irrégulier).

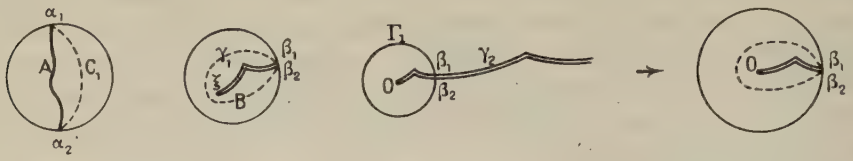


Fig. 9.

Frontière de Δ. — Dans tous les cas Δ est un cercle de rayon fini dont la circonférence contient un arc image analytique de $(\alpha_1 \alpha_2)$: dans le cas *a* 1°, la circonférence F_Δ est image analytique de $(\beta'_1 \beta'_2)$, dans le cas *b* 1°, elle est image analytique de $(\alpha_1 \alpha_2) \equiv (\beta'_1 \beta'_2)$, Dans le cas *a* 2°, il peut apparaître sur F_Δ un arc K bout premier correspondant à α_2 ; dans le cas *b* 2°, on peut avoir deux arcs K_1 et K_2 bout à bout ou se chevauchant, arcs d'accumulation de l'image de $(\alpha_1 \alpha_2)''$: ces singularités peuvent avoir lieu même si β_1 et β_2 sont extrémités régulières de B'. Les figures suivantes donnent des exemples de singularités.

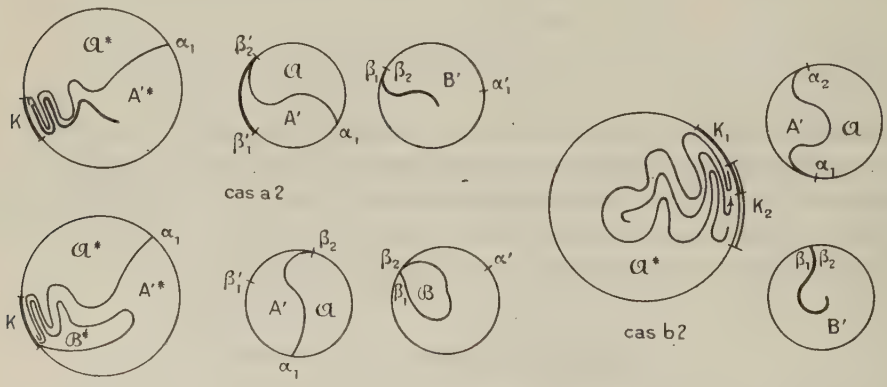


Fig. 10.

B. Raccordement par pinces. — Sur Γ_A, $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha$ et sur Γ_B, $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \beta$.

c. $\alpha'_1 \neq \beta$. 1° On peut réaliser le raccordement par un processus fini comme dans *a* 1° sauf si : 2° $\alpha_2 = \beta'_2$ avec α_2 et β_2 extrémités irrégulières de A' et B'. On introduit alors les domaines A_n, en retirant de A des arcs $\overset{\frown}{\alpha_2 \beta'_{2,n}}$ de $(\alpha_1 \alpha_2)''$.

d. $\alpha_1 \equiv \beta'_1$, $\alpha_2 \prec \beta'_2$. Nous ne distinguerons pas entre les cas d'extrémités régulières et irrégulières. On introduit les domaines A_n obtenus en retirant de A des arcs $\overset{\frown}{\alpha_1 \beta'_{1,n}}$ et $\overset{\frown}{\alpha_2 \beta'_{2,n}}$ de $(\alpha_1 \alpha_2)''$ — dans le cas où une des extrémités

β_i ou α_j est régulière, on peut prendre $\beta_{2n} \equiv \beta_2$. — La suite des cercles $\Delta_n = (A_n \underline{\wedge} B)_{z_0}$ « converge » vers un cercle $\Delta = (A \underline{\wedge} B)_{z_0}$ de rayon fini ou infini.

Frontière de Δ. — Dans le cas *c*, l'arc $(\alpha_1 \overset{\frown}{\beta_1})'$ de Γ_Δ correspondant à $(\alpha'_1 \overset{\frown}{\beta_1})'$ Γ_B est en correspondance analytique avec un arc de F_Δ qui peut être la circonférence de Δ tout entière ou seulement un arc dont le complémentaire K est alors bout premier dans la représentation, de A^* sur A (et correspondant à α) et de B^* sur B (et correspondant à β).

Dans le cas *d*, Δ est de rayon fini ou infini, de frontière F_Δ; à toute suite de

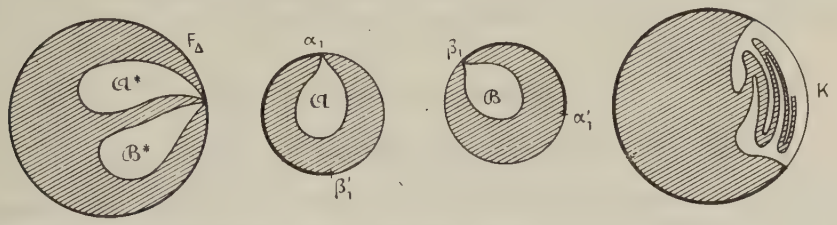


Fig. 11.

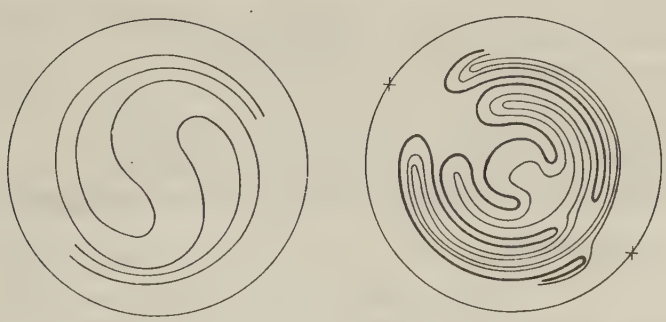


Fig. 12.

points convergeant dans Δ vers F_Δ correspond une suite de points dans A ou dans B (ou dans chacun des deux) dont le seul point limite est α ou β. Supposons Δ de rayon fini. Supposons que deux points de F_Δ soient frontières accessibles de A^* : deux suites de points intérieurs à A^* et convergeant vers ces points, seraient les images de deux suites convergeant dans A vers deux points distincts de Γ_Δ, ce qui est impossible, ces suites ne pouvant converger que vers α. Il y a au plus sur F_Δ un point frontière accessible de A^* et un point frontière accessible de B^*. Tout point de F_Δ est donc frontière à la fois pour A^* et pour B^*. D'autre part un point de F_Δ frontière accessible de A'^* serait frontière accessible de A^* et B^*; il ne peut y avoir qu'un tel point au plus. La circonférence F_Δ est un bout premier correspondant à α (resp. β) dans la représentation de A^* sur A (resp. B^* sur B) : Toutefois s'il y a sur F_Δ un point frontière accessible de A^*, il peut être exceptionnel pour certaines suites pures convergeant vers le bout premier F_Δ

4. — Raccordement par anneaux.

Décomposition de A et B en anneau. A′ et B′ doublement connexes. Introduisons dans B′ un cercle de même centre que B et d'image γ_1 dans A′. Soit $\mathcal{A}_1$ l'intérieur de γ_1 et $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}$. La méthode utilisée par Bieberbach (1) permet de construire $(\mathcal{A}_1 \underline{\mathcal{A}'_1} B)$. Les deux fonctions obtenues $w = f(z)$ et $w = \varphi(\zeta)$ prennent la même valeur en deux points homologues de $\mathcal{A}'_1$ et $\psi(\mathcal{A}'_1)$. $f(z) = \varphi \circ \psi(z)$ pour $z \in \mathcal{A}'_1$ mais $\varphi \circ \psi$ est défini dans tout A′, donc on définit un prolongement de f dans A′. f ainsi définie dans A réalise avec $\varphi(\zeta)$ le raccordement $A \underline{\wedge} B$. Le domaine image de ce raccordement est le plan entier.

C. — Raccordement de deuxième espèce.

1. — Représentation conforme des bandes.

Soit C une courbe de Jordan fermée, analytique par morceaux, présentant un nombre fini de points doubles. C sépare le plan en un nombre fini de régions S_i. Soit $M(t)$ un point sur C, t étant le paramètre de C. Une bande étroite entourant C est un domaine B(C) satisfaisant à la condition :

1° $P \in B(C)$ s'il existe $M(t) \in C$ tel que $MP \leq \varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t)$ est une fonction donnée caractérisant la bande $0 < \varepsilon(t) < \varepsilon$ et satisfaisant à :

2° Toute région S_i contient au moins un point $Q_i \notin B(C)$.

3° L'ensemble des points $Q \in S_i$ et $\notin B(C)$ forme un seul domaine connexe Σ_i.

Les transformations de la forme $w_1 = (z - \zeta)^{\frac{1}{\nu}}$, $\nu > 0$ ou $w_2 = \log(z - \zeta)$ où ζ est l'affixe d'un point $\in \bar{\Sigma}_i$, représentent une bande étroite conformément et biunivoquement sur une autre bande étroite pour ν convenablement choisi, et ζ dans une Σ_i convenable. Cela suppose qu'initialement on a considéré deux branches de B(C) dans le voisinage d'un point double de C. Après avoir effectué sur le plan de B(C) une transformation homographique, on considérera un élément de la fonction $w_3 = e^{i \arccos z}$: cet élément prolongé dans B(C) représente B(C) sur une autre bande étroite. La combinaison des transformations w_1, w_2, w_3 permet de représenter conformément et biunivoquement B(C) sur une bande étroite $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est sans points doubles; on se ramène ensuite à une couronne circulaire par les procédés classiques de la représentation conforme.

2. — Hypothèses du raccordement.

Soit dans le plan z une partition du cercle D en trois morceaux simplement connexes A, A′, $\mathcal{A}$ (A et A′ non contigus). Il existe entre points de A et A′ une correspondance $z' = \psi(z)$ holomorphe univalente.

---

(1) Ouvrage cité p. 174.

DÉFINITION. — *Raccorder* D *par* ψ (*ou suivant* A, A′) *c'est déterminer une fonction* $w = f(z)$ *holomorphe dans* D, *univalente dans* $\mathfrak{A} \cup A$ *et dans* $\mathfrak{A} \cup A'$ *et prenant la même valeur en deux points homologues* z et $z'[z \in A, z' \in A', z' = \psi(z)]$.

Le domaine couvert par $w = f(z)$ sera $\Delta = (D \overset{\Delta}{-} D)$.

Supposons que dans chacun des domaines A, A′, $\mathfrak{A}$ les frontières soient accessibles : soient m, m', les arcs externes, l et l' les arcs internes respectivement de A et A′; soient α, β les extrémités de l, γ' et δ' celles de l'. La correspondance continue existant par ψ entre les contours de A et A′ associe les éléments suivants : $\alpha \leftrightarrow \alpha'$, $\beta \leftrightarrow \beta'$, $\gamma \leftrightarrow \gamma'$, $\delta \leftrightarrow \delta'$, $l \leftrightarrow \lambda'$, $\lambda \leftrightarrow l'$. Comme pour le raccordement de première espèce, $D \overset{\Delta}{-} D$ n'est possible que si $m \supset \lambda$ (alors $m' \supset \lambda'$).

Supposons qu'il existe une fonction $\mathcal{F}(z)$ *holomorphe et univalente sur* A, *prolongeable analytiquement, suivant une courbe* $\mathcal{C}$ *sans points doubles, intérieure à* D, *jusque dans* A′, *sur lequel* $\mathcal{F}(z)$ *prolongée est univalente et prend en tout point de* A′ *la même valeur qu'au point homologue de* A.

Raccorder D par ψ c'est déduire de l'existence de $\mathcal{F}(z)$ l'existence d'une fonction $f(z)$ vérifiant la condition précédente, et prolongeable dans D entier, univalente dans $A \cup \mathfrak{A}$.

De l'hypothèse précédente et de la théorie de la représentation conforme des bandes on déduit qu'il existe une bande $B \subset \mathfrak{A}$, reliant A et A′, et une fonction $w_1 = \Phi_1(z)$ réalisant $U \overset{\Delta}{-} U$ où $U = A \cup B \cup A'$, le domaine couvert par w_1 étant une couronne $((\Gamma_1, \Gamma_1'))$.

3. — Construction de $(D \overset{\Delta}{-} D)$.

Soient $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ les deux composantes simplement connexes de $D - U$. Soit dans un plan z_1 un cercle C_1 image du domaine $A \cup \mathfrak{A}_1 \cup B$, C_1' étant l'image de $B \cup A$. La décomposition de C_1 en C_1' et $C_1 - C_1'$. Soit Γ_1 dans le plan w_1 la circonférence extérieure de $((\Gamma_1, \Gamma_1'))$. Soient Δ_1 le cercle limité par Γ_1, Δ_1' l'image simplement connexe de $A \cup B$. On peut construire $\Delta_2 = (\Delta_1 \overset{\Delta_1'}{-} C_1)$; la correspondance entre Δ_1' et C_1' étant définie par l'intermédiaire de $A \cup B$. La courbe Γ_1' a pour image une courbe fermée Γ_2' intérieure à Δ_2. Représentons $A' \cup \mathfrak{A}_1 \cup B$ sur un cercle $\mathbb{C}_1$ et soit $\mathbb{C}_1' = \mathbb{C}_1 -$ image de $\widehat{k'\gamma'}$. Comme Δ_2 contient une image de $((\Gamma_1, \Gamma_1'))$, on peut considérer l'image de A dans Δ_2 comme une image de A′, et noter Δ_2' l'image de $\mathbb{C}_1'$ dans Δ_2. Soit $\Delta_3 = (\Delta_2 \overset{\Delta_2'}{-} \mathbb{C}_1)$ à l'intérieur duquel Γ_2' est l'image de Γ_2'; Γ_3 étant la circonférence de Δ_3, la couronne $((\Gamma_3, \Gamma_2'))$ peut être représenté conformément et biunivoquement sur une couronne circulaire $((\Gamma_3', \Gamma_1'))$, la circonférence extérieure Γ_3' correspondant à Γ_2'. Nous appellerons Δ_4 le cercle intérieur à Γ_3'. Soient C_2 un cercle image conforme de $D - A'$, et Δ_2' l'image dans Δ_1 de $A \cup B \cup \mathfrak{A}_1$ représenté dans C_2

sur C_2. Construisons $\Delta_5 = (\Delta_4 \overset{\Delta'_4}{\frown} C_2)$. Soit $\mathfrak{C}_2$ un cercle image conforme de D — A. et $\mathfrak{C}'_2 = \mathfrak{C}_2 —$ image de $\widehat{j'\delta'}$. $\mathfrak{C}'_2$ a pour image dans Δ_5 un domaine Δ'_5 et l'on peut construire $\Delta_6 = (\Delta_5 \overset{\Delta'_5}{\frown} \mathfrak{C}_2)$. Soit Γ_6 l'image dans Δ_6 de la courbe fermée Γ_4

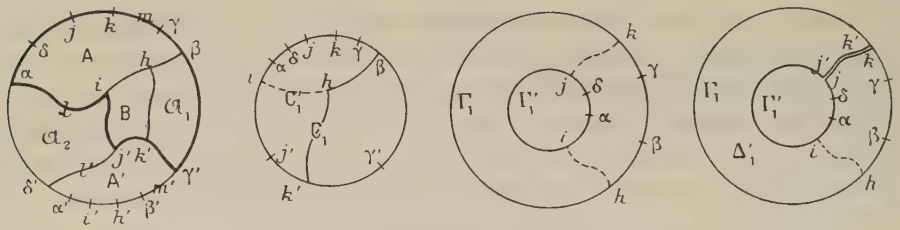


Fig. 13.

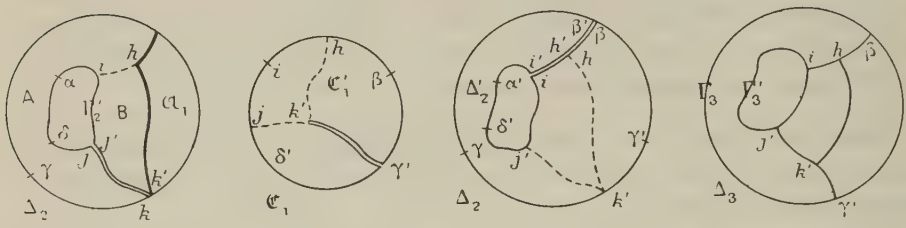


Fig. 14.

représentée en Γ_5 dans Δ_5. Le domaine doublement connexe compris entre les courbes Γ_6 et Γ'_6 (contour extérieur de Δ_6) est représentable conformément et biunivoquement sur une couronne circulaire $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D} = (D \overset{\Delta}{\frown} D)$

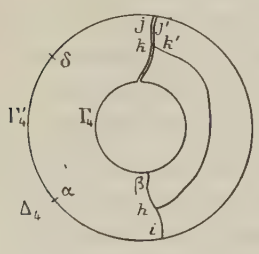


Fig. 15.

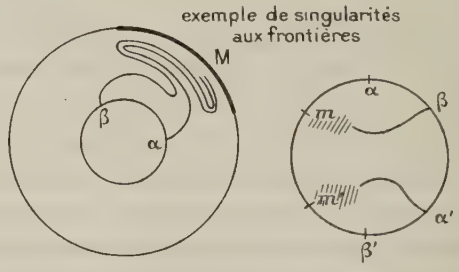


Fig. 16.

Remarque. — Supposons qu'il existe initialement (*voir* hypothèse § 2) une fonction $\mathcal{F}^*(z)$ holomorphe et univalente dans A, prolongeable analytiquement suivant une courbe $\mathcal{C}$ sans points doubles, non-nécessairement intérieure à D, jusque dans A', sur lequel .... etc. On peut alors construire un domaine H simplement connexe contenant A, A' et $\mathcal{C}$ et une partie de D simplement connexe dans laquelle on peut construire une bande B reliant A et A'. H est

représentable sur un cercle H* d'un plan z^*; le domaine $A \cup A' \cup B$ se représente suivant un anneau, sans point multiple, d'où l'existence d'une fonction $z^* = f(z)$ satisfaisant à l'hypothèse du paragraphe 2.

CHAPITRE II.

UNIFORMISATION DES SURFACES DE RIEMANN.

A. — Définition des surfaces de Riemann (1).

1. — Variétés a deux dimensions.

Soient E un espace topologique régulier [au sens de Bourbaki (2)], et U(P) un voisinage faisant partie de la famille $\mathfrak{U}(P)$ des voisinages du point P. Un domaine $G \subset E$ est un domaine élémentaire s'il est topologiquement représentable sur un cercle : une variété à deux dimensions est un espace topologique connexe pour lequel il existe un système de voisinages qui sont des domaines élémentaires à deux dimensions (3).

Triangulabilité. — Il y a équivalence entre l'hypothèse de triangulabilité et la suivante : *Il existe un ensemble dénombrable de domaines élémentaires, qui recouvre la variété.*

Représentation conforme locale. — Supposons données les représentations topologiques T(U) qui représentent topologiquement les U sur le cercle unité :

Axiome de conformité. — *Soit* $G \subset (U_1 \cap U_2)$, G'_1 et G'_2 *les domaines images de* G, *respectivement par* $T(U_1)$ *et* $T(U_2)$. *La correspondance* $T(U_2) \circ [T(U_1)]^{-1}$ *est une représentation conforme directe de* G'_1 *sur* G'_2.

Définition. — *Une surface de Riemann est une variété à deux dimensions, triangulable pour laquelle sont données les* T(U) *satisfaisant à l'axiome de conformité.*

La surface S, variété triangulable à partir de laquelle est définie la surface de Riemann $\mathcal{R}$ s'appellera *support de* $\mathcal{R}$. L'ensemble des cercles unités $\mathfrak{V}_i$ (images des U_i), et des correspondances entre régions des $\mathfrak{V}_i$ constitue l'*atlas* de $\mathcal{R}$. La représentation $T(U_i)$ sera appelée l'*uniformisante locale* (Ortsuniformisierende) *de* U_i, ou *échelle de* $\mathfrak{V}_i$.

---

(1) H. Weyl, *Die Idie der Riemannshe Fläche*; T. Rado, *Acta Szeged*, 2, 1925.

(2) Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. I. E satisfait aux axiomes $\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2\mathfrak{V}_3\mathfrak{V}_4$, à l'axiome de Hausdorff H, et à l'axiome O_{III}.

(3) Dans la suite les systèmes de voisinages seront toujours des domaines élémentaires.

Identité de deux surfaces de Riemann. — Pour que deux surfaces de Riemann soient identiques, il faut qu'elles aient *même support* (kollokale). Soient deux surfaces de même support $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$, (U^1) et (U^2) les systèmes de voisinages (équivalents) de $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$, (T^1) et (T^2) les ensembles des uniformisantes locales correspondantes. La réunion $(U^1)\cup(U^2)$ forme un système de voisinages de S; si alors en conservant les mêmes uniformisantes locales, l'axiome de conformité est vérifié par le nouvel atlas les deux surfaces sont identiques.

Pour vérifier la transitivité de l'identité : $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_2 \equiv \mathcal{R}_0$, $\rightarrow \mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2$, il suffira de vérifier la transitivité pour les structures analytiques, la transitivité de l'équivalence (topologique) des systèmes de voisinages définissant S_0, S_1 et S_2 étant connues.

Morceau de surface de Riemann. — Un morceau G de $\mathcal{R}$ est un sous-espace de S sur lequel les voisinages définissant la structure analytique, sont ceux définissant $\mathcal{R}$ et contenus dans G, les uniformisantes locales étant les mêmes.

2. — Représentations conformes.

Définition. — Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de supports respectifs S et S′ et Φ une représentation topologique de S sur S′. $A(U)$ correspond par Φ, (U^*) sur S′. Les représentations $T^*(U^*) = T(U)\circ\Phi^{-1}(U^*)$ constituent un système d'uniformisantes locales d'une surface de Riemann $\mathcal{R}^*$ de support S′. Nous dirons que Φ représente conformément $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$ si et seulement si $\mathcal{R}^* \equiv \mathcal{R}'$.

Justification de l'identité. — Soient $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2$. Φ leur fait correspondre $\mathcal{R}_1^*$ et $\mathcal{R}_2^*$, dont les systèmes (U_1^*) et (U_2^*) avec leurs uniformisantes locales, $T_1\circ\Phi^{-1}(U_1^*)$ et $T_2\circ\Phi^{-1}(U_2^*)$ forment par réunion un système vérifiant l'axiome de conformité comme $T_1(U_1)$ et $T_2(U_2)$. L'identité de deux surfaces de Riemann se conserve par représentation conforme.

Inversion. — Φ représentant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$, on peut définir $\mathcal{R}'$ par (U^*) et les uniformisantes locales $T^*(U^*)$. Φ^{-1} transforme (U^*) en (U) et les uniformisantes locales sont $T^*(U^*)\circ\Phi(U) = T(U)\circ\Phi^{-1}(U^*)\circ\Phi(U) = T(U)$. Φ^{-1} représente conformément $\mathcal{R}'$ sur $\mathcal{R}$.

Transitivité. — $\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_2$ par Φ_1, $\mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_3$ par Φ_2. Prenons pour (U_2) les (U_1^*) et pour (U_3) les (U_2^*). $\Phi_2\circ\Phi_1$ réalise une représentation topologique de $\mathcal{R}_1$ sur $\mathcal{R}_3$ et le système (U_3) admet pour uniformisantes locales :

$$T_1(U_1)\circ|\Phi_2\circ\Phi_1|^{-1}(U_3) = T_1(U_1)\circ\Phi_1^{-1}(U_2)\circ\Phi_2^{-1}(U_2^*) = T_2(U_2)\circ\Phi_2^{-1}(U_3) = T_3(U_3).$$

$\Phi_2\circ\Phi_1$ transforme conformément $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_3$.

Théorème. — $T(U)$ *représente conformément* U *sur le cercle unité.*

Le cercle unité est muni de la topologie ordinaire (métrique euclidienne) et

les uniformisantes locales sont les représentations conformes ordinaires entre domaines plans.

Soit U_0 représenté par $T_0(U_0)$ sur le cercle unité V_0; soient $\mathfrak{V}$ la famille des voisinages définissant la topologie dans V_0, V l'image conforme sur le cercle unité de $\mathfrak{V}$. Soit $U \subset U_0$, T_0 représente U sur $U^* \subset V_0$. $T(U) \circ T_0^{-1}(U^*)$ définit sur V_0 une surface de Riemann. Par hypothèse T_0 est topologique, il reste à vérifier que les systèmes $(\mathfrak{V})$ et (U^*) équivalents, vérifient l'axiome de conformité. Soit $H_1 = U_1^* \cap \mathfrak{V}_1$. La correspondance entre points de H_1 considérés comme points de U_1^* et de $\mathfrak{V}_1$ est l'identité, donc est conforme après représentation de $\mathfrak{V}_1$ sur V_1. Comme $U_0 \cap U_1 = U_1$, les images de U_1 par T_0, et par $T(U_1)$ sont en correspondance conforme; ces images sont U_1^* et son image par $T(U) \circ T_0^{-1}(U_1^*)$. Les images de H_1 sur V_1 d'une part, et par $T(U) \circ T_0^{-1}(U_1^*)$ d'autre part sont en correspondance conforme.

Théorème. — *Les représentations conformes classiques sont des représentations conformes au sens ci-dessus.*

Soient D et Δ deux domaines plans, (F) et (Φ) les familles des voisinages de D et Δ, T(F) et Θ(Φ) les uniformisantes locales. ψ représente D sur Δ, donc F sur F^* et, le système (F^*) avec les uniformisantes locales $T(F) \circ \psi^{-1}(F^*)$, définissent sur Δ une surface de Riemann, identique à celle définie par (Φ) avec les uniformisantes locales Θ(Φ) -- on le reconnaît en remarquant que les uniformisantes locales $T(F) \circ \psi^{-1}(F^*)$ et Θ(Φ) sont toutes deux des représentations conformes classiques.

3. — Représentation paramétrique de $\mathcal{R}$ (1).

Soient $P \in \mathcal{R}$ et $U(P) \in (U)$ un voisinage de P, ayant pour image par T, V, dans lequel Q est l'image de P. Soit V' déduit de V par l'homothétie $\mathcal{H}(Q, 1/2)$, et $\mathfrak{V}$ l'image par l'homothétie $\mathcal{H}(Q, 2)$ de l'ensemble des points de V, intérieurs à V'. Soit $\mathfrak{U}$ l'image de V' par $[T(U)]^{-1}$: c'est un domaine élémentaire $\mathfrak{U} \subset U(P)$ et $P \in \mathfrak{U}$. Tous les points frontières de $\mathfrak{U}$ sont des points de $\mathcal{R}$. A chaque point P associons un $\mathfrak{U}$ particulier, $\mathfrak{U}_P$.

S peut être recouvert par un ensemble dénombrable de domaines élémentaires, D_i, ayant pour image par une certaine transformation topologique Φ_i, un cercle d_i. Soit une suite C_i' de cercles fermés concentriques à d_i et de rayons croissants tendant vers 1. Les C_i' étant compacts, leurs images C_i' sur S par $\overline{\Phi}^{-1}$ le sont aussi. Tout point de C_i' est intérieur à un domaine élémentaire $\mathfrak{U}_P$. C_i' peut être recouvert par un nombre fini de $\mathfrak{U}_P$, donc D_i et aussi S peuvent

(1) Nevanlinna, *Ein Satz uber offene Riemannsche Flächen* (*Ann. Ac. Sci. Fenn.*, Ser. A. t. 34, n° 3); *Eindeutigkeitsfragen in der theorie der konformen Abbildung* (*V^e Congr. Math. Scand.*, Copenhague, 1946).

être recouverts par une infinité dénombrable de $\mathfrak{U}_p$. Appelons *éléments* $\mathcal{E}_\nu$ les $\overline{\mathfrak{U}}_p$ ainsi choisis pour recouvrir S.

Soit une surface de Riemann $\mathcal{R}$ de support S définie par (U) et [T(U)] : on sait en déduire la famille des $\mathfrak{U}_p$ et leurs images $\mathcal{V}_p$ par $\mathcal{H}(Q, 2) \circ T(\mathfrak{U}_p) = \mathfrak{T}(\mathfrak{U}_p)$. Soient $D \cap (\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2)$, D_1 et D_2 ses images par $\mathfrak{T}(\mathcal{E}_1)$ et $\mathfrak{T}(\mathcal{E}_2)$, D'_1 et D'_2 ses images par $T(U_1)$ et $T(U_2)$. Les correspondances ponctuelles (déduites par identité des images sur D) sont conformes directes entre D_1 et D'_1, ainsi qu'entre D_2 et D'_2. Or le système (U) et [T(U)] satisfait à l'axiome de conformité, donc la correspondance est conforme directe entre D'_1 et D'_2 et aussi entre D_1 et D_2.

On dit qu'on a obtenu une représentation paramétrique de $\mathcal{R}$ lorsqu'on a défini sur $\mathcal{R}$ une famille de domaines $(\mathcal{E}_\nu)$ satisfaisant aux conditions :

1° *Tout point de* $\mathcal{R}$ *appartient à un élément au moins de la famille dénombrable* $(\mathcal{E}_\nu)$.

2° *La frontière de tout* $\mathcal{E}_\nu$ *appartient à* $\mathcal{R}$.

3° *Deux points quelconques de* $\mathcal{R}$ *peuvent être joints par une chaîne d'un nombre fini de* $(\mathcal{E}_\nu)$ *chacun ayant une partie commune avec le précédent.*

4° *Tout* $(\mathcal{E}_\nu)$ *est représentable conformément sur un cercle* A_ν *(du plan* z*)* $|z| \leq 1$. *Cette représentation conforme biunivoque doit être prolongeable et rester biunivoque dans* $\mathcal{E}'_\nu \supset \overline{\mathcal{E}}_\nu$, $\mathcal{E}'_\nu \subset \mathcal{R}$.

5° *Les images dans* A_ν *et* A_μ *de* $\delta = \mathcal{E}_\nu \cap \mathcal{E}_\mu$ *sont en correspondance conforme.* Les cercles A_ν sont appelés *cercles paramètre*, leur ensemble et celui des correspondances conformes entre parties de A_ν et A_μ[1] constituent l'*Atlas réduit* de $\mathcal{R}$.

Construction de $\mathcal{R}$. — Donnons-nous un atlas réduit satisfaisant aux conditions suivantes :

a. A tout point frontière d'un A_ν correspond par relation d'enchaînement un point intérieur d'un A_μ au moins;

b. Si $d_\nu \subset A_\nu$ correspond à $d_\mu \subset A_\mu$ et à $d_\lambda \subset A_\lambda$, la relation d'enchaînement entre A_μ et A_λ représente conformément d_μ sur d_λ.

Bornons-nous à la construction d'une surface de Riemann étalée (obtenue par prolongement d'éléments de Weierstrass) admettant l'atlas donné comme atlas réduit. La surface $\mathcal{R}$ (si elle existe) dépend de l'élément $\mathcal{E}_1$ que l'on fait correspondre au cercle paramètre A_1; avec un même atlas, la construction de $\mathcal{R}$ peut être possible ou impossible suivant le choix de $\mathcal{E}_1$, sous la condition que les T(U) soient des représentations conformes classiques.

---

[1] Ou relations d'enchaînement.

Exemple. — Soient dans un plan z les trois cercles suivants :

$$C_1 : |z-\sqrt{2}| \leq 1, \qquad C_2 : |z| \leq 1, \qquad C_3 : |z+\sqrt{2}| \leq 1.$$

Représentons ces trois cercles sur les cercles A_1, A_2, A_3; les diverses images de $C_1 \cap C_2$ et $C_2 \cap C_3$ définissent des relations d'enchaînement entre A_1 A_2 et A_3, qui peuvent être regardés comme atlas réduit du morceau du plan complexe z $C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Soit alors C_2' : $|z| \leq 1+a$ $(0<a<\sqrt{2}-1)$. Représentons C_2' sur le demi-plan $\xi < 0$ de la variable $\zeta = \xi + i\eta$ en associant $1+a \leftrightarrow 0$, $-1-a \leftrightarrow \infty$. Aux cercles C_1 et C_2 correspondent les cercles Γ_1 et Γ_2, et la fonction $\log(\zeta - h)$, holomorphe dans Γ_1 et Γ_2 leur associe des domaines (pouvant se recouvrir), $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Associons à A_1 l'élément $\mathcal{E}_1$; par prolongement de la relation d'enchai-

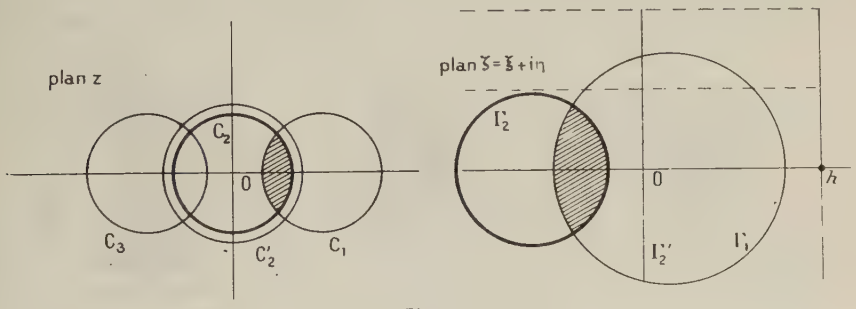


Fig. 17.

nement entre parties de A_1 et A_2, on construit $\mathcal{E}_2$ comme image de A_2 sur $\mathcal{R}$ cherchée; la relation d'enchaînement entre A_2 et A_3 fournit une représentation conforme biunivoque entre un morceau de $\mathcal{E}_2$ et un morceau de A_3, prolongeable dans une partie de A_3 mais pas dans A_3 entier (il y a un point exceptionnel correspondant à $z=-1-a$). A l'atlas A_1, A_2, A_3 correspond un morceau de surface de Riemann si l'on associe C_1 à A_1, mais ce n'est plus vrai si l'on associe $\mathcal{E}_1$ à A_1. Ainsi toutes les relations d'enchaînement interviennent pour déterminer la possibilité de construction d'une surface de Riemann admettant un atlas réduit donné, le premier élément étant aussi donné, la métrique conforme étant imposée.

4. Caractères topologiques.

a. Une surface $\mathcal{R}$ est *fermée* si *toute suite infinie de points intérieurs à* $\mathcal{R}$ *admet un point limite intérieur à* $\mathcal{R}$. Du fait que $\mathcal{R}$ peut être recouverte par une infinité dénombrable d'éléments on déduit que cette définition des surfaces fermées (compacte au sens de Fréchet) est équivalente à la suivante : $\mathcal{R}$ peut être recouverte par un nombre fini d'éléments. Ces surfaces sont aussi compactes au sens de Bourbaki. $\mathcal{R}$ est dite ouverte si elle n'est pas fermée;

b. On appelle *genre* d'une surface $\mathcal{R}$ le nombre maximum de courbes fermées, disjointes que l'on peut tracer à l'intérieur de la surface sans la morceler.

Les surfaces de genre zéro, ou quasi simples (schlichtartige), sont homéomorphes à des domaines plans.

c. Une surface de genre zéro est *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur elle la sépare en deux morceaux dont l'un est formé exclusivement de points intérieurs à la surface, lorsqu'on lui ajoute son adhérence.

5. Intersection de deux éléments.

Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ formés à partir de U_1 et U_2, ayant pour images par T(U), V_1 et V_2 contenant V'_1 et V'_2 images de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Soient d_1 et d_2 les images de $d = U_1 \cap U_2$, limités par les circonférences C_1 et C_2 de V_1 et V_2 et par des

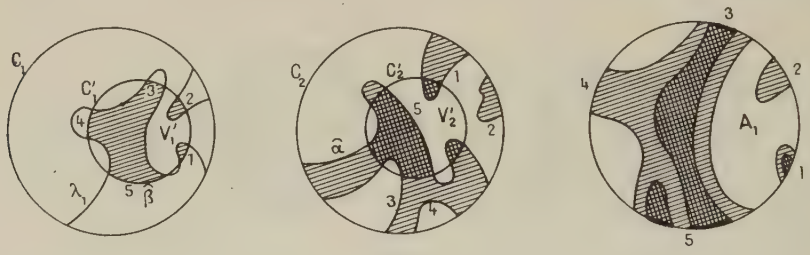


Fig. 18.

courbes λ_1 et λ_2. Soit m_1 un point de λ_1 : la correspondance résultant de l'identité des images sur $\mathcal{R}$, ne peut associer à m_1 un point $m_2 \in \bar{V}_2$: soit M l'image de m_1 sur S; $M \in U_1$, donc il existe $U^1(M) \subset U_1$; de même il existerait $U^2(M) \subset U_2$. Posons $U(M) = U^1(M) \cap U^2(M)$; $U(M) \in (U)$. Soient $v(m_1) \subset V_1$ et $v(m_2) \subset V_2$ les images par T(U) de U(M). On aurait $v(m_1) \subset d_1$ et $v(m_2) \subset d_2$, ce qui serait contraire au fait que m_1 (et m_2) sont frontières de d_1 et d_2.

Soient C'_1 et C'_2 les circonférences de V'_1 et V'_2. C'_1 est partagée par λ_1 (image de C_2) en un nombre fini ou infini d'arcs $\bar{\beta}$ joignant deux points de λ_1, et auxquels correspondent dans V_2 des arcs $\bar{\alpha}$ joignant deux points de C_2. Une courbe γ intérieure à V_2 (en particulier C'_2) ne peut être coupée que par un nombre fini d'arcs $\bar{\alpha}$: sinon on pourrait considérer une suite de points communs à γ et aux arcs $\bar{\alpha}$; à cette suite correspondrait une suite de points sur C'_1 s'accumulant en un point qui serait aussi point d'accumulation d'extrémités d'arcs $\bar{\beta}$; donc en revenant à l'image de la portion de $\mathcal{R}$ correspondante, sur V_2, des points de C_2 auraient même point limite que des points de γ. Un arc $\bar{\alpha}$ ne peut couper C'_2 qu'en un nombre fini de points : on peut extraire de $\bar{\alpha}_0$ un arc $\bar{\alpha}'_0 \subset d_2$ (en supprimant des voisinages des extrémités); à $\bar{\alpha}'_0$

correspond $\beta'_0 \subset \dot{d}_1$: α'_0 est l'image par une fonction analytique de l'arc de cercle β'_0 donc c'est un arc analytique ne pouvant couper C'_2 qu'en un nombre fini de points.

THÉORÈME. — *Soient deux éléments $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_j$ d'images A_i, A_j. L'image dans A_j de $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j$ est limitée par un nombre fini d'arcs analytiques intérieurs à A_j et correspondant à des arcs de la circonférence de A_i.*

$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ comprend un nombre fini de composantes connexes. Si l'une n'est pas simplement connexe il existe une courbe fermée intérieure à V'_1 correspondant à un arc de C'_2 donc à C'_2 entière. C'est aussi le cas, si l'une des composantes de $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ n'est pas simplement connexe. $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, satisfait à l'une des conditions suivantes :

THÉORÈME. — *$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, sont formés d'un nombre fini de composantes simplement connexes ;*

— $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ doublement connexe est limité par la périphérie de $\mathcal{E}_1$ et celle de $\mathcal{E}_2$;

— $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$: l'un des éléments est contenu dans l'autre.

B. — Raccordement des surfaces de Riemann.

Soient sur $\mathcal{R}$ deux domaines D et C, limités par un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments $\mathcal{E}_\nu$. D et C sont représentés conformément sur les cercles Δ et Γ des plans complexes u et v. $D \cap C$ a pour image Γ' dans Γ. Soit dans un plan z $\Omega = (\Delta \overset{\Gamma'}{\cup} \Gamma)$ s'il existe.

a. A tout point $M \in (D \cup C)$ correspond un point $z \in \Omega$ et inversement. Il est immédiat que la représentation $z = \Phi(M)$ de $D \cup C$ sur Ω est topologique.

b. Soit $U \in (U)$ qui définit $\mathcal{R}$; $U \subset (D \cup C)$ et $W = \Phi(U)$. Soit V un voisinage dans Ω et $\dot{\omega} = W \cap V$. Pour montrer que $z = \Phi(M)$ est conforme il suffit de vérifier que $\dot{\omega}$ et son image par $T(U) \circ \Phi^{-1}(\dot{\omega})$, ou W et $T(U) \circ \Phi^{-1}(W)$ (c'est-à-dire les images de U par Φ et T) sont en correspondance conforme. Soit $P \in U$, il existe $U(P) \subset U$. $P \in (\dot{D} \cup \dot{C})$ donc $P \in \dot{D}$ ou $P \in \dot{C}$. Supposons $P \in \dot{D}$, on peut prendre $U(P) \subset D$. Comme $U \cap U(P) = U(P)$ les images de $U(P)$ par $T(U)$ et $T[U(P)]$ sont en correspondance conforme. La représentation conforme de D sur Δ représente $U(P)$ sur $U'(p)$ en correspondance conforme avec l'image de $U(P)$ par $T[U(P)]$. L'image de $U(P)$ par Φ se déduisant de $U'(p)$ par représentation conforme est elle-même image conforme du transformé de $U(P)$ par $T(u)$. Cela ayant lieu pour tout $P \in U$, $z = \Phi(M)$ est bien conforme.

1. — Correspondance entre frontières.

Supposons Γ' connexe. Si Γ' était doublement connexe il n'y aurait pas d'éléments frontières de Ω (plan entier). Supposons Γ' simplement connexe.

Nous supposerons désormais que C est un morceau simplement connexe d'un élément $\mathcal{E}$ décomposé en C' (image de Γ' sur $\mathcal{R}$) et C — C' tous deux simplement connexes.

a. Raccordement par croissants. — Si $(\Delta \overset{\Gamma'}{\sim} \Gamma)$ est obtenu par un processus fini, la correspondance entre frontières est ponctuelle, analytique dans l'intérieur des arcs de circonférence, et continue même en α_1, β_1, α_2, β_2 (notation ch. I).

— Soit A le cercle image de $\mathcal{E}$ et V l'image de U (dont $\mathcal{E}$ est extrait) par prolongement de la représentation précédente. Soit b l'image dans V de $D \cap U$; b est limité par une courbe λ dont toute portion intérieure à V est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques. Soit G l'image de C dans A, décomposée en G' et G — G'. λ coupe la périphérie de G en deux points seulement dont l'un β est, après représentation de G sur un cercle, extrémité singulière de l'image de G'.

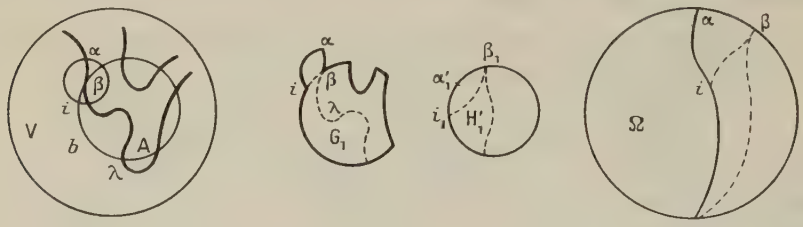


Fig. 19.

Construisons un petit cercle de centre β, coupant λ en deux points seulement (c'est possible d'après l'analyticité de λ au voisinage de β), dont l'un α est extérieur à A. Soit i le point où ce petit cercle coupe l'arc de circonférence de A intérieur à b. Soit $G_1 = G \cup$ triangle $\beta\alpha i$; λ décompose G_1 en $G'_1 = G' \cup$ triangle $\beta\alpha i$, et G — G'. Soit H_1 l'image circulaire de G_1, G'_1 ayant pour image H'_1; β_1, α'_1, i_1 correspondent à β, α, i. Les parties de Δ et H en correspondance conforme par identité des images sur $\mathcal{R}$ ou V, sont dans Δ et dans H, (H'_1), du type « en croissant ». Dans Δ, c'est l'homologue de α'_1 qui est extrémité de Δ' (correspondant à H'_1). Donc $\Omega = (\Delta \overset{H'_1}{\sim} H_1)$ se construit par un processus fini (puisque $\alpha'_1 \neq \beta_1$). On reconnaît que $\Omega = (\Delta \overset{C'}{\sim} G) = (\Delta \overset{\Gamma'}{\sim} \Gamma)$. La correspondance est encore continue au point β de V.

Remarque. — Si cela est nécessaire on fera la même construction autour du deuxième point d'intersection de λ avec la périphérie de G.

b. Raccordement par pince et croissants. — La périphérie de l'un des deux domaines ne sort pas de l'autre. Si $\lambda \subset A$, ce serait une courbe fermée ayant en commun avec la circonférence, soit un ou plusieurs arcs, soit plusieurs points, soit un point. Dans les deux premiers cas on aurait à réaliser un raccordement par croissants entre Δ et une partie de A, dans le troisième cas on aurait à

réaliser un raccordement par pinces (*fig. a*); $\lambda \subset \bar{A}$ c'est le cas de raccordement par anneaux. Supposons donc la périphérie de $G \subset b$. Le partage de G est du type « en pince » : Le partage de Δ est du type « en croissant » (*fig. c*), $\Delta - \Delta'$ pouvant être formé d'un nombre fini de composantes connexes. Si $(\Delta \overset{\Gamma}{\smile} \Gamma)$ est obtenu par un processus fini, la correspondance entre frontières est ponctuelle continue; sinon soient β et β^* (*fig. b*) les points confondus où les deux branches de λ coupent la périphérie de G. Dans le voisinage de β chaque branche est composée de deux arcs analytiques, l'un extérieur, l'autre intérieur à A. Construisons un petit cercle de centre β coupant chaque branche de λ en deux points seulement, deux points d'intersection α et $\alpha^* \notin \bar{A}$. Soient i et i^* les

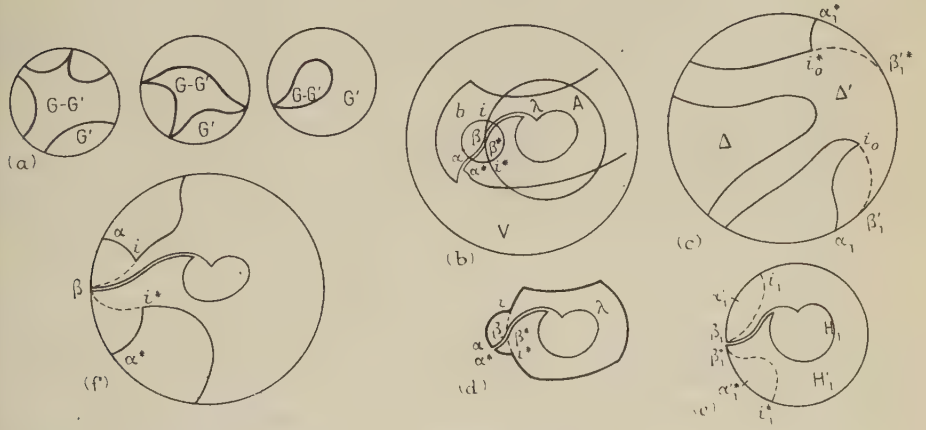


Fig. 20.

points où ce petit cercle coupe la circonférence de A. Soient $G_1 = G \cup$ triangle $\beta\alpha i \cup$ triangle $\beta^*\alpha^* i^*$, H_1 l'image circulaire de G_1 (*fig. e*): α'_1, α''_1, i_1, i''_1, β_1, β''_1 correspondent à α, α^*, i, i^*, β, β^*. La partie de Δ en correspondance conforme avec H_1, par identité des images sur V est encore du type en croissant (*fig. c*). α''_1, β''_1, i''_0, α_1, β'_1, i_0 correspondent à α^*, β^*, i^*, α, β, i; $\Omega = (\Delta \overset{H_1}{\smile} H_1)$ se construit par un processus fini en introduisant les arcs de cercles d'extrémités β'_1 β''_1. $\Omega = (\Delta \overset{\Gamma}{\smile} \Gamma)$ et la correspondance est ponctuelle continue au point β de V (*fig. f*).

c. Raccordement par pinces. — La périphérie de chaque domaine est intérieure à l'autre. λ ne sort pas de A et a un point commun avec sa circonférence; dans le voisinage de ce point λ est formé de deux arcs analytiques. La méthode précédente, par l'introduction d'un petit cercle de centre β conduit par raccordement par anneaux au domaine Ω, et la correspondance est encore ponctuelle continue en β.

THÉORÈME. — *Soient sur $\mathcal{R}$ deux domaines* D *et* C *limités chacun par un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments $\mathcal{E}_\nu$.* $D \cap C = C'$. $C \subset \mathcal{E}_i$ *avec* C *et* $C - C'$ *simplement connexes.* D *et* C *sont représentables sur des cercles* Δ *et* Γ *des plans complexes* z *et* ζ. *Dans ces conditions* $\mathring{D} \cup \mathring{C}$ *est représentable conformément sur un domaine d'un plan complexe* Z (*plan entier, plan pointé ou cercle fini*), *la correspondance entre frontières étant ponctuelle continue.*

REMARQUES 1. — D'après le rôle joué par λ on peut se borner à faire sur la nature de la frontière de D, l'hypothèse suivante : *la périphérie de* D *est une courbe* Λ *dont toute portion intérieure à un voisinage* U *est formée d'un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments $\mathcal{E}_\nu$.* Nous dirons que Λ est une courbe *normale* sur $\mathcal{R}$. Le théorème est encore valable.

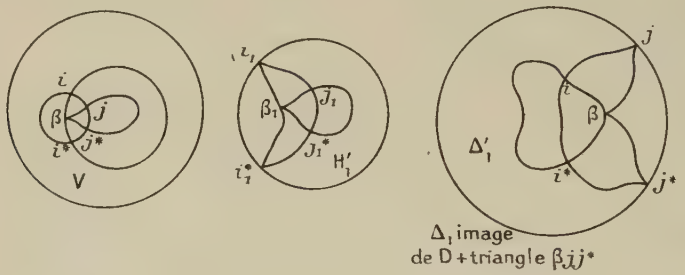


Fig. 21.

2. Conservons toujours les mêmes hypothèses sur C, et considérons un cercle Δ dont un morceau $\hat{\delta}$, simplement connexe, est représentable conformément sur $d \subset \mathcal{R}$, où d est limité par une courbe normale. Soit $d' = C' = d \cap C$, ayant pour images $\hat{\delta}'$ et Γ' dans $\hat{\delta}$ et Γ. On sait alors construire $\Omega = (\Delta \overset{\hat{\delta}'}{\frown} \Gamma)$ la correspondance entre frontières étant ponctuelle et continue.

2. RECOLLEMENT.

Soient sur la circonférence d'un cercle Δ, deux arcs $\widehat{pq'}$, $\widehat{pq''}$ $\left(\widehat{pq'} \cap \widehat{pq''} = \{p\}\right)$. Supposons qu'il existe $\hat{\delta} \subset \Delta$ contigu à $\widehat{q'pq''}$, représenté conformément par ψ sur $d \subset \mathcal{R}$, de sorte que $\widehat{pq'}$ et $\widehat{pq''}$ aient pour image une même courbe γ, normale, d'extrémités P et Q. Soit C l'intérieur de $d \cup \gamma$, que nous supposons intérieur à un élément $\mathcal{E}_i$ (et simplement connexe), représentable sur un cercle Γ, dans lequel d a pour image Γ'. On dit que $\widehat{pq'}$ et $\widehat{pq''}$ sont *contigus associés*. D'après la remarque 2 (ci-dessus), on sait construire $\Omega = (\Delta \overset{\hat{\delta}}{\frown} \Gamma)$, les points de $\widehat{q'pq''}$ correspondant à des points intérieurs à Ω. Si $\widehat{q'pq''}$ couvre la circonférence de Δ, avec $\hat{\delta}$ doublement connexe, Ω est le plan entier (*fig. b*); si $\hat{\delta}$ est simplement

connexe (*fig. c*), $Q \notin C$, et Ω est le plan pointé (privé de l'image de Q). Si $\widehat{q'pq''}$ ne couvre pas la circonférence de Δ, Ω est un cercle dont la circonférence est une image ponctuelle continue de l'arc $\widehat{q'q''}$ ne contenant pas p(*fig a*). Dans tous les cas on dit qu'on est passé de Δ à Ω par *recollement* suivant les arcs contigus associés $\widehat{pq'}$ et $\widehat{pq''}$.

Dans le cas où Ω est un cercle que nous notons Δ_0, p_1 étant l'image de q' (et q''), il se peut que p_1 soit l'extrémité commune de deux arcs contigus associés $\widehat{p_1 s'_1}$, $\widehat{p_1 s''_1}$ correspondant à $\widehat{q'q'_1}$ et $\widehat{q''q''_1}$ sur la circonférence de Δ. Soit Δ_1 obtenu par recollement de Δ_0 suivant $\widehat{p_1 s'_1}$ et $\widehat{p_1 s''_1}$. Il se peut que l'on puisse recoller Δ_2 et ainsi de suite :

a. Si Δ_n ne peut pas être recollé : si $q'_n \neq q''_n$ la circonférence de Δ_n est en correspondance ponctuelle continue avec $\widehat{q'_n q''_n}$ qui $\ni p$. Cette correspondance

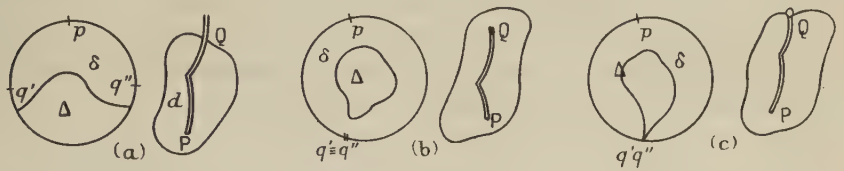


Fig. 12.

est analytique entre les intérieurs de ces arcs; si $q'_n = q''_n$, Δ_n est soit le plan pointé soit le plan entier, suivant la façon dont a pu être effectué le recollement de Δ_{n-1} (*fig. b* et *c*) : Dans ces deux cas on dira encore que $\widehat{pq'_n}$ et $\widehat{pq''_n}$ sont contigus associés.

b. La suite des Δ_n étant infinie, chaque Δ_n contient une image conforme de Δ_{n-1}. Toutes les représentations de Δ dans Δ_n étant normalisées au centre de Δ, on peut appliquer les résultats du Chapitre 1, A. Soit Ω le cercle limite. Sur la circonférence de Δ, $q'_n \to Q'$, $q''_n \to Q''$. L'intérieur de $\widehat{Q'pQ''}$ se représente sur un arc $\lambda \subset \mathring{\Omega}$, tandis que l'intérieur de $\widehat{Q'Q''}$ est représenté analytiquement sur un arc de la circonférence de Ω, mais plusieurs éventualités sont possibles concernant la représentation des points Q' et Q'' : il se peut que un arc de circonférence de Ω soit un bout premier correspondant à Q' ou Q'', ou que la circonférence entière de Ω soit bout première correspondant à Q' si $Q' \equiv Q''$, Ω étant de rayon fini. On dit que $\widehat{pQ'}$ et $\widehat{pQ''}$ sont contigus associés *au sens large*.

Application. — *Soit sur* $\mathcal{R}$ *un domaine* D *limité par un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments* $\mathcal{E}_\nu$, *représentable conformément sur un cercle* Δ, *la correspondance étant ponctuelle, continue entre les frontières. Supposons que deux arcs frontières de* D, $\widehat{PQ}$ *et* $\widehat{PQ'}$ *suivent le même tracé* λ *sur* $\mathcal{R}$ *et correspondent à* pq

et pq'' sur la circonférence de Δ. Les deux arcs $\widehat{pq'}$ et $\widehat{pq''}$ sont contigus associés : en d'autres termes $D \cup \Lambda$ est représentable conformément sur un cercle, la correspondance étant encore ponctuelle continue entre les frontières, le cercle image de $D \cup \Lambda$ pouvant être de rayon infini.

Il suffit de remarquer que Λ peut être recouvert par un nombre fini d'éléments $\mathcal{E}_i$, et de prendre pour domaines C les morceaux les plus grands possibles de ces $\mathcal{E}_i$. On se trouve alors nécessairement dans le cas *a* ci-dessus.

3. — Soudure.

Soient deux cercles Δ_1 et Δ_2, et deux morceaux simplement connexes $\delta_1 \subset \Delta_1$, $\delta_2 \subset \Delta_2$, contigus aux arcs λ_1 et λ_2 des circonférences de Δ_1 et Δ_2. Supposons qu'il existe deux représentations conformes, de δ_1 sur $d_1 \subset \mathcal{R}$, et de δ_2 sur $d_2 \subset \mathcal{R}$ telles que $d_1 \cap d_2 = 0$ et que λ_1 et λ_2 aient pour images sur $\mathcal{R}$ une même courbe normale Λ. Dans ces conditions on peut réaliser la soudure de Δ_1 et Δ_2 suivant λ_1 et λ_2, c'est-à-dire construire un cercle Δ contenant une image conforme de Δ_1, de Δ_2 et de $d_1 \cup d\Lambda \cup_2$. Si l'une des extrémités de Λ appartient à $\mathcal{R}$, il lui correspond un point sur la circonférence de Δ.

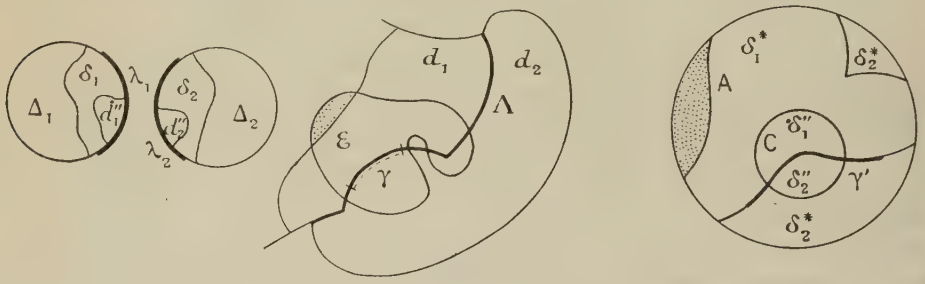


Fig. 13.

Soit $\gamma \subset \Lambda$, et périphérique de $\mathcal{E}_i$. Sur Λ, image de $\mathcal{E} \supset \gamma$ (γ est pris assez petit pour qu'un tel $\mathcal{E}$ puisse exister), γ a pour image un arc analytique, dont γ est une portion connexe intérieure à A. Soient δ_1^* et δ_2^* les images dans A de $\mathcal{E} \cap d_1$ et $\mathcal{E} \cap d_2$, δ_1' et δ_2' les composantes connexes de δ_1^* et δ_2^* contiguës à γ'. On peut construire dans $\delta_1' \cup \gamma' \cup \delta_2'$ un cercle C coupant γ' en deux points seulement sous des angles $\neq 0$ et π. $\delta_1'' = C \cap \delta_1'$, $\delta_2'' = C \cap \delta_2'$. La représentation de δ_1' sur le morceau correspondant de δ_1 restant analytique au voisinage de l'arc γ', la périphérie de d_1'' image de δ_1'' coupe la circonférence de Δ_1 sous des angles $\neq 0$, π. $\mathcal{D}_1 = (\Delta_1 \overset{d_1''}{\smile} C)$ s'obtient alors par un processus fini. Soit d_2'' l'image dans $\mathcal{D}_1$ de δ_2''. Dans Δ_2 la périphérie de d_2'' est un arc analytique coupant la circonférence de Δ_2 sous des angles $\neq 0$, π. Donc $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1 \overset{d_2''}{\smile} \Delta_2)$ s'obtient par un processus fini. On a réalisé la *soudure* de Δ_1 et Δ_2 suivant λ_1'' et λ_2'' corres-

pondant à $\gamma'' = C \cap \gamma'$. Soient λ_1^1, λ_1^2 les deux arcs de la circonférence de $\mathcal{O}$. correspondant à $\lambda_1 - \lambda_1''$, et λ_2^1, λ_2^2 ceux qui correspondent à $\lambda_2 - \lambda_2''$. λ_1^1 et λ_1^1 sont contigus associés (au sens large seulement si Λ n'a pas d'extrémité correspondante sur $\mathcal{R}$) ainsi que λ_1^2 et λ_2^2. La réalisation du recollement de $\mathcal{O}$ suivant λ_1^1, λ_2^1 d'une part, $\lambda_1^2 \lambda_2^2$ d'autre part conduit à un domaine Ω qui réalise la soudure de Δ_1 et Δ_2 suivant λ_1 et λ_2. On dit que λ_1 et λ_2 sont des arcs *associables*.

C. — Représentation conforme des surfaces de Riemann découpées.

1. — Découpage de $\mathcal{R}$.

A_1 étant le cercle image de $\mathcal{E}_1$, toutes les représentations considérées seront définies dans A_1 et normalisées au centre.

a. Soit $\mathcal{E}_2$ l'élément de plus faible indice tel que $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq 0$.

— Si $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$, A_1 ou A_2 réalisent la représentation sur un cercle de $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.

— Si $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ est doublement connexe, $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ couvre S (fermée). On sait construire $z = \Phi(M)$ représentant $\mathcal{R}$ sur le plan entier.

— $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ est formé d'un nombre fini de composantes simplement connexes $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ ... $\mathcal{C}_n$. $\mathcal{C}_1$ est contiguë à $\mathcal{E}_1$ suivant un arc au moins : soit Γ_1 l'un deux (le plus grand possible) et soit $\mathcal{C}_1'$ la composante de $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ contiguë à Γ_1. Soient C_1, C_1', γ_1 les images dans A_2 de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_1'$, Γ_1 ; $\mathring{C}_1 \cup \gamma_1 \cup \mathring{C}_1'$ simplement connexe est représentable sur un cercle $\mathbf{C}_1$ dans lequel $\mathbf{C}_1'$ est l'image de C_1'. Soit $\mathcal{O}_1 = (A_1 \underline{\mathcal{C}_1'} \mathbf{C}_1)$, l'image conforme de $\mathcal{O}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \gamma_1 \cup \mathcal{C}_1$. Opérant avec $\mathcal{O}_1'$ et $\mathcal{C}_2$ comme avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{C}_1$, on construit $\mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \underline{\mathcal{C}_2'} \mathbf{C}_2)$. $\mathcal{O}_n$ est une image conforme circulaire de $\mathfrak{D}_2 \subset \mathcal{R}$ constituée par les points de $\mathcal{E}_1$ et de $\mathcal{E}_2$, certains points intérieurs de $\mathcal{E}_2$, points frontières de $\mathcal{E}_1$ pouvant être frontières de $\mathfrak{D}_2$. La frontière de $\mathfrak{D}_2$ est formée d'un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments $\mathcal{E}_\nu$, et la correspondance entre la frontière de $\mathfrak{D}_2$ et la circonférence de $D_2 = \mathcal{O}_n$ est ponctuelle continue.

b. Soit $\mathcal{E}_3$ l'élément de plus faible indice tel que $\mathfrak{D}_2 \cap \mathcal{E}_3 \neq 0$. Les composantes de $\mathfrak{D}_2 \cap \mathcal{E}_3$ sont les composantes de $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_3$ et celles de $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3$, peuvent être réunies ou séparées par la suppression et la conservation d'arcs frontières de $\mathcal{E}_3$ pénétrant dans $\mathcal{E}_2$. En remarquant que, s'il existe dans $\mathfrak{D}_2$ une courbe fermée frontière de $\mathfrak{D}_2 \cap \mathcal{E}_3$, c'est la périphérie complète de $\mathcal{E}_3$ et qu'elle est donc unique on déduit que le théorème relatif à l'intersection de deux éléments $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ est valable pour l'intersection de $\mathfrak{D}_2$ et $\mathcal{E}_3$, en remplaçant dans son énoncé $\mathcal{E}_1$ par $\mathfrak{D}_2$ et $\mathcal{E}_2$ par $\mathcal{E}_3$.

Les mêmes cas que dans *a* peuvent se rencontrer, et dans le troisième l'opéra-

tion peut se poursuivre : on obtient un cercle D'_3 image conforme de $\mathfrak{D}'_3 \subset \mathcal{R}$, constitué par les points de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, certains points intérieurs de $\mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$ (frontières de $\mathfrak{D}_2$ donc de $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$) pouvant être points frontières de $\mathfrak{D}'_3$. La frontière de $\mathfrak{D}'_3$ est l'image sur $\mathcal{R}$ d'un nombre fini d'arcs des circonférences de A_1, A_2, A_3. Il peut arriver que D'_3 possède deux arcs frontières contigus associés. Par recollement de D'_3 suivant ces arcs on obtient D_3 qui est soit le plan entier (D_3 est image conforme de $\mathcal{R}$ entière), soit un cercle fini (D_3 est image de $\mathfrak{D}_3 \subset \mathcal{R}$ avec correspondance ponctuelle continue entre les frontières), soit le plan pointé (c'est le cas où la frontière de $\mathfrak{D}_2$ est intérieure à $\overline{\mathcal{E}}_3$, où la frontière de $\mathcal{E}_3$ est intérieure à $\mathfrak{D}_2$ et où les deux frontières ont un ou plusieurs points communs. Ces points sont intérieurs à des $\mathcal{E}_\nu$ d'indice plus élevés et l'opération peut se poursuivre).

• *c.* L'introduction de $\mathcal{E}_4$ conduit à la construction de D_4 image de $\mathfrak{D}_4 \subseteq \mathcal{R}$. . . .

$\mathcal{R}$ SURFACE FERMÉE. — On a construit sur $\mathcal{R}$ une suite finie de domaines $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3 \subset \ldots \subset \mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}$. Ou bien $\mathfrak{D} = \mathcal{R}$ et $D_n = D$ est le plan entier, ou bien D est un cercle fini et la frontière de $\mathfrak{D}$ est formée d'un nombre fini d'arcs périphériques des éléments $\mathcal{E}_i$. On a construit $z = \Phi(P)$ représentant conformément $\mathfrak{D}$ ($\subseteq \mathcal{R}$) sur le plan entier ou un cercle fini D.

$\mathcal{R}$ SURFACE OUVERTE. — La suite $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3 \subset \mathfrak{D}_4 \subset \ldots \subset \mathfrak{D}_n \subset \ldots$ est infinie. Tout $\mathcal{E}_\nu$ est atteint : $\mathcal{E}_\nu$ peut être joint à $\mathcal{E}_1$ par une chaîne finie d'éléments $\mathcal{E}_i$; chaque élément de cette chaîne est atteint au bout d'un nombre fini d'opérations après que le précédent ait été atteint. Les cercles D_n de rayon croissant ont pour limite un cercle D (application du Chapitre I, A), et les $\varphi_{n,h}$ convergent uniformément dans $\mathring{D}_n$ vers $z = \Phi_n(z_n)$. Soit $P \in \mathring{\mathfrak{D}}_m$, alors $P \in \mathring{\mathfrak{D}}_i$ (tout $i > m$) et notons ζ_i son image dans $\mathring{D}_i$; $z = \Phi_i(\zeta_i)$ est indépendante de i. On a donc défini $z = \Phi(P)$. Un domaine $\Gamma \subset \mathfrak{D}_i$ est représentable conformément sur D_i, donc aussi sur G du plan z par $z = \Phi(P)$.

Si P frontière de $\mathfrak{D}_K$, ou bien $P \in \mathring{\mathfrak{D}}_n$ pour $n \geq N$ (alors $\Phi(P)$ est une représentation conforme définie dans un domaine contenant P) ou bien P est frontière de tous les $\mathfrak{D}_n$ ($n \geq K$). Soit alors $\mathcal{E}_\nu$ le premier élément de la suite $\mathcal{E}_i$ (la dernière formée) tel que $P \in \mathring{\mathcal{E}}_\nu$; P fait partie d'un arc frontière d'un $\mathcal{E}_i$ au moins ($i \leq K$, $i < \nu$). La construction des $\mathfrak{D}_n$ montre qu'on ne tracera pas dans $\mathcal{E}_\nu$ d'autres coupures que celles existant avant la $\nu^{\text{ième}}$ opération : P est frontière de $\mathfrak{D}_\nu$, $P \in \mathring{\mathcal{E}}_\nu \subset \mathfrak{D}_h$ pour tout $h \geq \nu$. Sur A_ν (image circulaire de $\mathcal{E}_\nu$) la frontière de $\mathfrak{D}_\nu$ se représente suivant un nombre fini d'arcs analytiques (*cf.* p. 25). On peut alors construire dans A_ν un domaine $d(P') \ni P'$ (image de P), tel que l'image de la frontière de $\mathfrak{D}_\nu$ à l'intérieur de $d(P')$ soit formée d'un nombre fini d'arcs analytiques C_i issus de P', chacun étant image d'un seul arc périphérique d'un $\mathcal{E}_h$. On peut même construire $d(P')$ tel qu'il soit partagé

par les C_i en autant de triangles curvilignes t_i. Soient sur $\mathcal{R}$, $\delta(P)$, τ_i les domaines correspondant à $d(P')$ et t_i, γ_i les arcs images des arcs C_i. On peut remplacer $\delta(P)$ par un voisinage $U(P) \subset \delta(P)$. S'il y avait un seul arc γ_1 issu de P, la représentation circulaire de $\mathfrak{D}_\nu$, D_ν admettrait sur sa circonférence deux arcs contigus associés, correspondant au tracé γ_1 sur $\mathcal{R}$. Le recollement suivant ces deux arcs aurait été effectué sur $D'_h (h \leq \nu)$. Soit alors $p (\geq 2)$ le nombre des arcs γ_i : il existe au moins deux arcs γ_i, frontières de $\mathfrak{D}_\nu$ et de tous les $\mathfrak{D}_n$ $n > \nu$; sinon dans $\delta(P)$ et sur $p-1$ au moins des arcs γ_i, certains points deviendraient points intérieurs de domaines $\mathfrak{D}_\eta$; mais cela ne peut avoir lieu que par un recollement suivant γ_i et ce recollement se poursuit sur tout γ_i, suivant $\gamma_1 \cup \gamma_2$ si $p = 2$ (mais alors P deviendrait point intérieur d'un $\mathfrak{D}_\eta$), jusqu'à P exclusivement si $p > 2$; le nombre des γ_i devenant $p-1$, après une autre opération de rang fini, un autre arc γ_i disparaîtra et l'on sera ramené au cas $p = 2$, puis P deviendrait intérieur à $\mathfrak{D}_r$ pour une valeur assez grande de r.

Théorème. — *Si* P *est frontière de tous les* $\mathfrak{D}_n$ $n > N$, *il existe sur* $\mathcal{R}$ *un voisinage* $\delta(P)$ *et un système de* m *arcs* $(m \geq 2)$ *issus de* P, *qui sont les seuls arcs frontières, intérieurs à* $\delta(P)$, *de tous les* $\mathfrak{D}_n$ *pour* $n > N_0$ (1).

Nous appellerons *arc définitif* γ un arc frontière d'un $\mathcal{E}_i$ et frontière de tous les $\mathfrak{D}_n$ à partir d'un certain rang.

Tout point frontière de $\mathfrak{D}_\nu$ est intérieur à un $\delta(P)$ dans lequel il existe un nombre fini (peut-être nul) d'arcs définitifs extérieurs ou frontières de $\mathfrak{D}_\nu$. La frontière de $\mathfrak{D}_\nu$ peut être couverte par un nombre fini de $\delta(P)$, donc un nombre fini d'arcs définitifs appartiennent à la frontière de $\mathfrak{D}_\nu$. Tout arc définitif appartenant à la frontière d'un $\mathfrak{D}_\nu$, on déduit :

Théorème. — *Les arcs définitifs* γ *forment une famille dénombrable, finie si* $\mathcal{R}$ *est fermée.*

Considérons un morceau compact $K \subset \mathcal{R}$ dont aucun point n'appartient à un arc définitif : il existe un $\mathfrak{D}_m \supset K$: K peut être couvert par un nombre fini de $\mathcal{E}_i$; soit $\mathcal{E}_h$ celui de plus fort indice et $\Delta_h = \bigcup_{i=1}^{i=h} \mathcal{E}_i$. $\overline{\mathfrak{D}}_h = \Delta_h$. La frontière de $\mathfrak{D}_h$ comprend un nombre fini d'arcs intérieurs à Δ_h et la construction des $\mathfrak{D}_m$ $m > h$ n'introduit pas de nouveaux arcs frontières $\subset \dot{\Delta}_h$, qui seraient donc $\subset \dot{\overline{\mathfrak{D}}}_h$. Il n'y a besoin que d'un nombre fini d'opérations de recollement pour éliminer tous les arcs non définitifs $\subset \dot{\Delta}_h$: il existe donc un $\mathfrak{D}_m \supset K$. $z = \Phi(P)$ représente donc K sur $K^* \subset D$. D'autre part, tout compact $K'_1 \subset D$ est couvert par l'image

(1) On indique seulement l'existence de N_0, mais non un moyen de déterminer N_0 ou de caractériser les arcs définitifs parmi les $\gamma_i \subset \delta(P)$.

conforme d'un D_m, donc d'un $\mathfrak{D}_m$, donc d'un compact $K_1 \subset \mathcal{R}$ et tel qu'aucun arc γ ne pénètre à l'intérieur de K_1.

L'ensemble Γ des arcs γ est appelé *coupure* sur $\mathcal{R}$. Si Γ_1 est une courbe fermée formée de points intérieurs à $\mathcal{R}$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma = 0$, Γ_1 appartient à un compact K, donc à un $\mathfrak{D}_n$ et $z = \Phi(P)$ représente Γ_1 sur une courbe fermée $\subset D$. Donc Γ_1 sépare sur $\mathcal{R}$ un domaine formé de points intérieurs à $\mathcal{R}$ et $\notin \Gamma$.

Théorème. — *$\mathcal{R}^*$ déduite de $\mathcal{R}$ par suppression des points appartenant à la coupure Γ, est une surface de Riemann simplement connexe, que la fonction $z = \Phi(P)$ représente conformément sur un cercle D de rayon R (fini ou infini).*

2. — Correspondance entre les frontières.

Soient $P \in \Gamma$, $\dot{\gamma}(P)$ déjà introduit, m le nombre d'arcs définitifs issus de P. Sur A_i les arcs γ_i ($i \bmod m$) ont pour images les arcs analytiques C_i. Soit $\mathfrak{D}_n$ un domaine dont tous les arcs frontières qui pénètrent dans $\dot{\gamma}(P)$ sont définitifs. Coïncidant sur $\mathcal{R}$ avec γ_i distinguons $\gamma_{i,1}$ arc périphérique de $\mathfrak{D}_n$ contigu au triangle τ_i compris entre γ_i et γ_{i-1}, et $\gamma_{i,2}$ contigu au triangle τ_{i+1} compris entre γ_i et γ_{i+1}. Notons $\beta_i = \gamma_{i,1} \cup \gamma_{i,2}$, soit b_i son image sur le plan ζ_n. t_i se représente conformément sur un croissant de D_n. b_i ayant pour images b_i'' sur la circonférence de D_n. $\varphi_{n,m-n}$ représente b_i'' sur b_i''' de la circonférence de D_m, la correspondance étant continue sur b_i'' analytique dans l'intérieur.

Que $\mathcal{R}$ soit ouverte ou fermée, b_i se représente sur un arc de la circonférence de $D(b_i''$ ou $b_i^\infty)$, la correspondance étant continue sur b_i analytique à l'intérieur des arcs $c_{i,2}$ et $c_{i+1,1}$. En particulier si $\gamma_{i,2}$ et $\gamma_{i+1,1}$ appartiennent au même arc définitif de Γ, c_i et c_{i+1} ne constituent qu'un seul arc analytique et la correspondance est encore analytique en P.

Théorème. — *La représentation $z = \Phi(P)$ est continue sur la coupure définitive de $\mathcal{R}^*$, analytique à l'intérieur des arcs définitifs.*

Remarque. — *La circonférence de* D *ne peut comprendre deux arcs contigus associés.* Sinon soit P' l'extrémité commune à ces deux arcs sur la circonférence de D, et P l'image de P' sur $\mathcal{R}$. Il existe D_n admettant deux arcs frontières issus de P_n (correspondant à P'), contigus associés, sinon cela n'aurait pas lieu pour D : mais le recollement de D_n doit avoir été fait suivant tous les arcs où il était possible.

3. — Surfaces simplement connexes.

La coupure Γ ne sépare pas $\mathcal{R}$. Soit alors $P \in \Gamma$. On peut distinguer, coïncidant avec P sur $\mathcal{R}$, au moins deux points P' et P'' frontières de $\mathcal{R}^*$, que l'on peut joindre par une courbe $C \subset \mathcal{R}^*$ (sauf en P). C est une courbe fermée de $\mathcal{R}$ qui si $\mathcal{R}$ est simplement connexe, sépare $\mathcal{R}$ en deux morceaux dont l'un G est

tel que $\mathcal{G} = G \cup C$ est formé de points intérieurs à $\mathcal{R}$; $\mathcal{G}$, morceau compact de $\mathcal{R}$, recouvrable par un nombre fini d'éléments est recouvert par $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{i=h} \mathcal{E}_i$. $\Gamma \cap \Delta_n$ ne comprenant que des arcs périphériques de $\mathcal{E}_i (i = h)$, en nombre fini, est formé à l'intérieur de G d'un nombre fini d'arcs définitifs γ. Supposons qu'aucun arc γ n'ait d'extrémité libre, c'est-à-dire, que toute extrémité d'arc γ est aussi extrémité d'un autre arc γ : à partir d'un point sur Γ (et intérieur à G) on peut parcourir Γ dans les deux sens et après un nombre fini de pas (si nous appelons pas la traversée d'une extrémité commune à deux arcs γ) on a parcouru entièrement $\Gamma \cap G$; or Γ ne coupe C qu'en un point P, donc nécessairement Γ se referme à l'intérieur de $\mathcal{G}$, mais alors une boucle fermée de Γ sépare $\mathcal{R}$ simplement connexe en deux morceaux, ce qui est absurde. Soit donc Q une extrémité libre d'un arc γ. Soit $\mathcal{E}_n \ni Q$. On peut construire sur $\mathcal{R}$, $\delta(Q) \subset \mathcal{E}_n$, $\delta(Q)$ ayant pour image sur A_n un cercle, dont la circonférence n'est coupée par l'image de Γ qu'en un point; le recollement de D serait possible suivant les arcs images d'une portion de $\Gamma \cap \delta(Q)$ voisine de Q. Γ ne peut pas exister.

PREMIER THÉORÈME DE L'UNIFORMISATION. — *Si $\mathcal{R}$ est simplement connexe, $z = \Phi(P)$ la représente conformément et biunivoquement soit sur le plan entier (cas des surfaces fermées), soit sur le plan pointé (cas parabolique), soit sur un cercle fini (cas hyperbolique).*

Remarquer que si $z = \Phi(P)$ représente $\mathcal{R}^*$ sur le plan pointé, on peut affirmer que $\mathcal{R}^* \equiv \mathcal{R}$, car si Γ existait D serait de rayon fini.

D. — Représentation d'une surface ouverte.

1. — Loi de la soudure.

Soient D_0 l'image de $\mathcal{R}^*$ par $z = \Phi(P)$, et $(D_i)(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ une suite de disques identiques à D_0. Numérotons les côtés (image d'un γ) sur la circonférence de chaque disque D_i, de la même façon sur tous les D_i. $\lambda_{i,k}$ désigne le côté ayant le numéro k sur la circonférence du disque D_i. Tout arc γ_j a sur la circonférence de D_0 deux arcs images $\lambda_{0,s}$ et $\lambda_{0,r}$ parcourus dans des sens opposés quand on parcourt γ_j sur $\mathcal{R}$. $\lambda_{0,s}$ et $\lambda_{0,r}$ sont dits associés. Ainsi les deuxièmes indices peuvent être associés par couples. Il en résulte que $\lambda_{i,r}$ et $\lambda_{j,s}$ sont associables : en effet, soient dans D_0 deux morceaux simplement connexes d_r et d_s ($d_r \cap d_s = \sigma$) contigus à $\lambda_{0,r}$ et $\lambda_{0,s}$, $d_{i,r}$ et $d_{j,s}$ ces mêmes morceaux pris dans D_i et D_j; $d_{i,r}$ et $d_{j,s}$ sont les images de δ_r et δ_s sur $\mathcal{R}$, sans points communs et admettant une courbe frontière commune γ_j, correspondant à $\lambda_{i,r}$ et $\lambda_{j,s}$. Effectuons alors la soudure de D_1 et D_2 suivant $\lambda_{1,1}$ et $\lambda_{2,p}$ (où les

deuxièmes indices 1 et p sont associés). On obtient un cercle Δ'_2 sur la circonférence duquel il peut y avoir deux arcs contigus associés, on effectue alors le recollement de Δ'_2 suivant ces arcs et l'on obtient un cercle Δ_2. Sur la circonférence de Δ_2 les côtés ont pour indices $\lambda_{i,k}(i=1, 2; k=1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Les côtés $\lambda_{i,r}$ et $\lambda_{3,s}$ sont associables : pour le voir il suffit de considérer dans Δ_2 l'image de $d_{i,r}$. Nous effectuons la soudure de Δ_2 et Δ_3 suivant la loi ci-dessous.

Loi de la soudure. — Soit Δ_n sur la circonférence duquel il n'existe pas d'arcs contigus associés. Nous lui soudons un nouveau disque D_{n-1} suivant l'arc de la circonférence de Δ_n dont la somme des indices est minimum. Si plusieurs arcs ont la même somme d'indices on choisira celui de premier indice le plus faible. Il se peut que la circonférence de Δ'_{n-1} obtenu par soudure de Δ_n et D_{n-1} possède deux arcs contigus associés. On effectue alors le recollement de Δ'_{n-1} suivant ces arcs tant que cela est possible. On obtient alors Δ_{n-1}.

Comme il s'agit de surfaces ouvertes, la circonférence de Δ'_{n-1} obtenue par soudure de Δ_n, et D_{n-1} possède nécessairement un sommet singulier (point d'accumulation de côtés) ne correspondant pas à un point de $\mathcal{R}$, comme celle de D_{n-1} elle-même, et le recollement ne peut être réalisé suivant la circonférence entière ni de Δ_n, ni de D_{n-1}. On définit ainsi une suite de domaines (Δ_n), ayant chacun une image dans le suivant par $w_{n-1} = \varphi_{n-1}(w_n)$ normalisée au centre, et à laquelle on peut appliquer (si elle n'est pas finie, ce qui *a priori* serait possible) les résultats du Chapitre I, A. On obtient alors un cercle Δ de rayon fini ou infini, contenant une image conforme biunivoque de tout Δ_n et tel que tout cercle de rayon plus petit est couvert par l'image d'un Δ_p.

2. — Étude de Δ.

Si $P \in \dot{\Delta}$, il est intérieur à l'image dans Δ d'un Δ_n. Soit P_n le point de $\dot{\Delta}_n$ image de P avec correspondance conforme biunivoque d'un voisinage. P_n est soit intérieur à l'image dans Δ_n d'un D_j, soit frontière de plusieurs images de disques D_j.

Premier cas. — P_n, donc P est l'image d'un point $P_0 \in \dot{D}_0$, avec correspondance conforme biunivoque d'un voisinage. Or P_0 est l'image localement conforme de $\mathfrak{T} \in \dot{\mathcal{R}}^* \subset \mathcal{R}$, c'est donc aussi vrai pour P. Inversement si $\mathfrak{T} \in \dot{\mathcal{R}}^*$, il a une image dans D_0, localement conforme, donc aussi dans tout D_i, et n images dans Δ_n ; une de ces images P'_n est intérieure à l'image de D_i dans Δ_n.

Deuxième cas. — P_n est frontière de plusieurs images de disques D_j, nécessairement en nombre fini. Soit D_h le disque de plus petit indice dont l'image dans Δ_n admet P_n pour point frontière. P_n correspond à un point P_h de la frontière de Δ_n. Puisque P_h devient point intérieur d'un Δ_k c'est que P_h, est soit intérieur à un côté de Δ_h, soit sommet régulier (extrémité d'un côté, correspondant à un point de $\mathcal{R}_j$, la loi de la soudure ne permettant pas à d'autres points péri-

phériques de Δ_h de devenir points intérieurs d'un Δ_k. Supposons P_{k-1} frontière de Δ_{k-1}. La soudure de Δ_{k-1} et D_k fait intervenir (*cf.* recollement) un domaine $C \subset \mathcal{R}$ et son image circulaire Γ. Δ_k contient, entourant P_k une image conforme du domaine C contenant l'image $\mathfrak{T}$ de P_{k-1}; il en résulte que P_k, donc P_n et P sont des images localement conformes de $\mathfrak{T}$.

Inversement : 1° $\mathfrak{T} \in$ l'intérieur d'un côté de $\mathcal{R}^*$. $\mathfrak{T}$ a deux images P_0 et P'_0 sur la circonférence de D_0, $P_0 \in \overset{\circ}{\lambda}_{0,r}$, $P'_0 \in \overset{\circ}{\lambda}_{0,s}$. Soient P_h et P'_h les deux points de $\overline{\Delta}_h$ qui, sur l'image de D_h, correspondent à P_0 et P'_0. Si $P_h \in \overset{\circ}{\Delta}_h$, alors Δ_h contient un voisinage de P_h en correspondance conforme biunivoque avec un voisinage de $\mathfrak{T}$ sur $\mathcal{R}$. Si P_h est sur la frontière de Δ_h, $P_h \in \overset{\circ}{\lambda}_{h,r}$. Après un nombre fini de soudures, $\lambda_{h,r}$ finira par être le côté de Δ_{k-1} dont la somme des indices est minimum. Alors la soudure de Δ_{k-1} et D_k se fera suivant les arcs $\lambda_{h,r}$ et $\lambda_{k,s}$, et P_{n-1} aura pour image $P_k \in \overset{\circ}{\Delta}_k$; la correspondance est alors localement

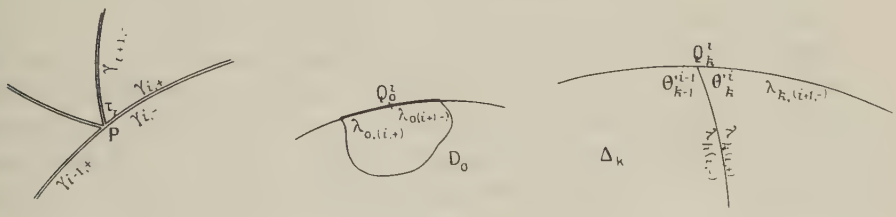


Fig. 14.

conforme entre $\mathfrak{T} \in \mathcal{R}$, $P_k \in \overset{\circ}{\Delta}_k$ et son image $P \in \overset{\circ}{\Delta}$. Remarquons que l'image de P_{k-1} peut devenir intérieure à Δ_k à la faveur d'un recollement sans que $\lambda_{h,r}$ ait été le côté de somme d'indices minimum. Une image de $\mathfrak{T}$ dans Δ sera définie par P_h ou P'_h suivant qu'il s'agit sur la frontière de l'image de D_h, du point correspondant à P_0 ou à P'_0. $P_h \equiv P'_k$.

2° $\mathfrak{T}$ est extrémité d'un arc γ. En $\mathfrak{T}$ aboutissent p arcs γ_i séparant des triangles τ_i dans $\delta(\mathfrak{T})$. Chaque triangle τ_i se représente suivant un croissant θ^i de D_0. Soient $Q^i_0 (i = 1, 2, \ldots, p)$ les points de la circonférence de D_0 images de $\mathfrak{T}$. Q^i_0 est l'extrémité commune de $\overset{\circ}{\lambda}_{0,i,+}$ et $\overset{\circ}{\lambda}_{0,i-1,-}$; c'est aussi le sommet du croissant θ^i. L'ensemble des p points Q^i_0 est appelé un cycle de sommets. Si la soudure de Δ_{k-1} et D_k (ou un recollement au cours de cette soudure) a lieu suivant les arc $\overset{\circ}{\lambda}_{h,(i-1)}$ et $\overset{\circ}{\lambda}_{k,i,-}$ on a rassemblé dans Δ_k le croissant θ^i_k image de θ^i son sommet étant l'image Q^i_k de Q^i_{k-1} sur Δ_{k-1} et de Q^i_0. Sur la circonférence de Δ_{k-1}, supposons que plusieurs croissants aient déjà été rassemblés avec Q^i_{k-1} pour sommet commun. Soient $\overset{\circ}{\lambda}_{h,j,-}$ et $\overset{\circ}{\lambda}_{h,i,+}$ les côtés de la circonférence de Δ_{k-1} aboutissant en Q^i_{k-1}. Les croissants rassemblés en Q^i_{k-1} sont donc $\theta^\alpha_{k-1} (\alpha = j, j+1, \ldots, i-1)$. Supposons le nombre de ces croissants $< p$ (ce qui est vrai pour $\Delta_1 \equiv D_1$, où il n'y a qu'un seul croissant à chaque sommet). Après la $k^{\text{ième}}$ soudure, le croissant θ_i est aussi rassemblé autour du point Q^i.

Ou bien le nombre des croissants réunis en Q est encore $< p$, ou bien il est égal à p, puisqu'on n'en a ajouté qu'un. Dans le dernier cas $i+1 = j \bmod p$, et l'on peut poursuivre le recollement de Δ_k suivant les arcs $\lambda_{k,j,+}$ et $\lambda_{k,i+1}$. Ce recollement se fait en introduisant un cercle contenant une image conforme d'un voisinage de $\mathfrak{T}$. Q'_k devient alors point intérieur de Δ_k, en étant une image localement conforme de $\mathfrak{T}$. Il se peut que le recollement de Δ'_k puisse se poursuivre le long de la circonférence de D_k à partir de l'extrémité de l'arc (suivant lequel a été faite la première soudure), qui n'a pas été utilisée pour conduire à Q'_k. La périphérie de D_k et celle de Δ_{k-1} contenant chacune au moins un sommet singulier, le recollement ne peut se faire ni jusqu'au point $Q_{k,i}$ par l'arc $\lambda_{k,i+1,-}$ et ses suivants, ni jusqu'au point Q'^{-1}_{k-1} par l'arc $\lambda_{k,j,-}$. Donc une opération de soudure n'a bien ajouté qu'un seul croissant θ'_k à l'ensemble des croissants déjà réunis en Q'_{k-1}. Après un nombre fini de soudure $\mathfrak{T}$ aura encore une image localement conforme à l'intérieur d'un Δ_n, donc de Δ.

Deuxième theorème de l'uniformisation. — *Toute surface de Riemann ouverte est représentable par une représentation conforme, uniforme ou non, soit sur un cercle, soit sur le plan pointé, de la manière suivante : tout point de* $\mathcal{R}$ *peut être enfermé dans un de ses voisinages, que la représentation précédente applique conformément et biunivoquement sur un voisinage d'une de ses images. Tout point du cercle image, correspond à un point de* $\mathcal{R}$*, avec correspondance conforme biunivoque d'au moins un voisinage sur* $\mathcal{R}$.

CHAPITRE III.

LES SURFACES DE RECOUVREMENT ET LEURS ARBRES TOPOLOGIQUES.

V. — Surfaces de recouvrement.

1. — Définitions (1).

A. Domaine régulièrement couvert. — *Soit* f *une représentation conforme d'une surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *dans une autre* R. *Un domaine* D *de* R *est régulièrement couvert par* $\mathcal{R}$ *pour* f *si l'ensemble* E *des points de* $\mathcal{R}$ *dont l'image par* f, *appartient à* $D[E = f^{-1}(D)]$, *n'est pas vide et si toute composante connexe de* E *est représentée conformément et biunivoquement sur* D *par* f.

B. Recouvrement abstrait. — *Soit* R *une surface de Riemann : un recouvrement abstrait* $(\mathcal{R}, f)$ *de* R *est un couple formé par une surface de Riemann* $\mathcal{R}$, *et une représentation* f *de* $\mathcal{R}$ *sur* R *telle que tout point de* R *possède un voisinage régulièrement couvert par* $\mathcal{R}$ *pour* f.

(1) D'après Chevalley, *Theory of Lie Groups*, pour les recouvrements d'espaces topologiques.

2. — Choix de $\mathcal{R}$.

$(\mathcal{R}, f)$ étant un recouvrement de R, *$(\mathcal{R}', \varphi)$ un recouvrement de $\mathcal{R}$, $(\mathcal{R}', f\circ\varphi)$ est un recouvrement de* R.

$f\circ\varphi$ représente $\mathcal{R}'$ sur R en satisfaisant aux conditions A et B. En particulier, toute surface de Riemann $\mathcal{R}'$ conformément équivalente à $\mathcal{R}$, peut, combinée avec une fonction convenable, constituer un recouvrement de R.

Recouvrements simplement connexes. — *a. Existence.* — D'après le deuxième théorème de l'uniformisation, étant donné une surface R, il existe une représentation conforme d'un cercle Δ (de rayon fini ou infini), sur R telle que tout point $P\in R$ possède un voisinage $U(P)$ régulièrement couvert par Δ pour f. Reprenons $R^*=R-\Gamma$; si $P\in R^*$, prenons $U(P)\subset R^*$; si $P\in\Gamma$, il est intérieur à à un arc de Γ, donc à un « disque » ayant servi à recoller divers exemplaires de R^* [ces « disques » ayant été ordonnés on prendra $U(P)$ inclus dans le disque de plus petit indice]. Tout cercle $\subset\mathring{\Delta}$ est couvert par un nombre fini d'images de R^* ou de disques.

$E(U)\neq 0$, puisqu'il y a des points de $E(U)$ dans le premier exemplaire de l'image de R^*. Soit $M\in U(P)$ et μ une image de M dans Δ. La connaissance de μ permet de déterminer soit l'exemplaire de l'image de R^*, soit l'image du « disque » auquel il appartient. Dans les deux cas, l'image considérée contient une image conforme biunivoque de $U(P)$ par f^{-1}.

b. Équivalence conforme. — Soient (Δ, f) et (Δ', f') deux recouvrements simplement connexes de R où Δ et Δ' sont deux cercles des plans z et z'. Soit $p\in\Delta$ dont l'image sur R par f est P.

Il existe sur R, $U(P)$ représenté conformément et biunivoquement sur $u(p)$ et $u'(p')$ [une composante quelconque de $f'^{-1}(U)$]. Pour obtenir $U(P)$ on aura pu être amené à se restreindre à l'intersection de deux voisinages de P, l'un régulièrement couvert par Δ pour f, l'autre par Δ' pour f'. On a ainsi défini $z'(z)$ holomorphe, univalente dans $u(p)$; soit p_1 sur la périphérie de $u(p)$, auquel correspondent P_1 sur R et p'_1 sur la périphérie de $u'(p')$. [En ayant au besoin réduit $U(P)$ pour que ses représentations sur u et u' soient encore biunivoques entre les frontières]. $U_1(P_1)$ est représenté conformément et biunivoquement sur $u_1(p_1)$ et $u'_1(p'_1)$. $z'(z)$ est holomorphe dans $u\cap u_1(\neq 0)$ et est prolongeable dans u_1 entier. Ce prolongement est possible dans tout $\mathring{\Delta}$: soit $q\in\mathring{\Delta}$ dont on peut s'approcher indéfiniment, par prolongement de $z'(z)$ suivant une courbe λ. Q est l'image de q sur R: il existe $V(Q)$, régulièrement couvert par Δ pour f et par Δ' pour f'; la composante de $f^{-1}(V)$, connexe à q étant $\varphi(q)$, il existe $u_n(p_n)$ tel que $\delta\subset(u_n\cap\varphi)$ ne soit pas vide et ait pour image par f, d. d a une image dans u'_n, soit δ', et $V(Q)$ a une image dans Δ', connexe à δ',

par f^{-1} : le prolongement de $z'(z)$ est donc possible en q. $z'(z)$ est analytique dans Δ, uniforme d'après le théorème de monodromie; elle est univalente, sinon $z(z')$ ne serait pas uniforme, et z' couvre Δ' quand z parcourt Δ entier. $z'(z)$ est donc homographique.

Théorème. — *Les recouvrements simplement connexes de* R *sont tous conformément équivalents.*

3. — Choix de f.

Choisissons maintenant pour représentation f, l'identité locale (¹); f qui représente une composante connexe de $f^{-1}(D)$ sur D est l'identité. La surface $\mathcal{R}$ qui, combinée à f constitue un recouvrement de R, est alors appelée *surface de recouvrement de* R, *relativement non ramifiée.*

Existence. — Construisons sur R, k arcs de courbes ne morcelant pas R (on peut même supposer qu'il y en a une infinité dénombrable, comme c'est le cas pour Γ), certains pouvant être fermés. Comme R est orientable on peut distinguer sur R, deux bords d'un tel arc de courbe : nous les noterons (a_i et a'_i), c'est la loi d'association (Chap. II, D, 1); soit R^* la surface ainsi découpée, R_j^* une suite d'exemplaires identiques à R^*. Si le bord a_i de l'exemplaire de R_j^* est noté $a_{j,i}$, on peut construire $\mathcal{R}_1 = R_0^* \cup R_1^* \cup a_{0,1} \cup a'_{1,1}$, où les points $a_{0,1}$ et $a'_{1,1}$ correspondants sont identifiés. En se donnant une certaine loi de formation R_n [par exemple la loi de la soudure (Chap. II, D, 1)], on définit une surface de Riemann qui est une surface de recouvrement de R.

B. — Arbre topologique. Généralités.

1. — Définitions.

Pour les surfaces de Riemann de fonctions analytiques, et possédant seulement un nombre fini de points fondamentaux, c'est-à-dire dont les points de ramification se projettent sur un nombre fini de points, on a utilisé un mode de représentation de ses surfaces par les réseaux ou les arbres topologiques [Speiser (²), Nevanlinna (³), Le van Thiem (⁴)]. Nous décomposerons un arbre topologique en les éléments suivants :

a. Schéma. — *L'ensemble des nœuds et des traits de liaison (ou côtés).* — Le nombre q des traits de liaison issus d'un nœud, est indépendant du nœud.

(¹) Abus de langage, pour désigner une projection de domaines plans, à un ou plusieurs feuillets, sur un autre domaine plan. Nous dirons aussi que ces plans sont « au-dessus » les uns des autres.

(²) *Ueber Riemannsche Flächen* (*Comm. Math. Helv.*, 2, 1930).

(³) *Eindeutige analytische Funktionen* (Springer, 1936).

(⁴) *Beitrag zu n Typenproblem der Riemannschen Flächen* (*Comm. Math. Helv.*, 20, 1947).

Cycle. — Ensemble de nœuds et des côtés qui les joignent, de telle sorte que la ligne polygonale ainsi formée, soit fermée et sépare le plan en deux régions dont l'une ne contient aucun nœud.

Un cycle peut avoir un nombre fini n (cycle d'ordre n) de nœuds (donc le même nombre de côtés) ou une infinité (cycle d'ordre infini).

b. Orientation. — *Nœuds.* — Les nœuds sont de deux sortes, notés ∘ et ×. Un côté joint un ∘ à un ×.

Côtés. — Les côtés de q sortes, notés $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, a_q$. Si l'on tourne autour d'un ∘ dans le sens direct, et que l'on renconte les côtés dans l'ordre $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, a_q$, il en est de même pour tous les autres nœuds ∘, et si l'on tourne dans le même sens autour d'un nœud × quelconque, on rencontre les côtés dans l'ordre $a_s, a_q, a_{q-1}, \ldots, a_2$.

Théorème. — *Tous les cycles du schéma étant d'ordre pair, l'orientation est déterminée lorsqu'on a fixé la nature (∘ ou ×) d'un nœud, et la nature d'un trait de liaison.*

S'il y avait un cycle d'ordre pair, le fait pour un nœud de ce cycle, d'avoir une nature ∘ ou × serait incompatible avec le fait qu'un côté joint deux nœuds de natures différentes. Pour un cycle d'ordre pair, les natures de ces nœuds et de ses côtés (donc des côtés issus d'un nœud quelconque de ce cycle) ne dépendent pas du trajet effectué sur la périphérie du cycle, pour atteindre ce nœud, à partir d'un nœud origine. Or deux trajets distincts joignant un nœud origine à un nœud quelconque sont réductibles l'un à l'autre en remplaçant sur un nombre fini de cycles, une partie du contour d'un cycle par l'autre partie du contour du même cycle ayant les mêmes extrémités (¹).

Le schéma et l'orientation constituent *l'arbre topologique*, et si l'on a fixé les projections sur un plan z, des points de ramification d'une surface de Riemann, en spécifiant leur nature (par celle des deux arcs de liaison qui l'entourent), la la surface de Riemann est déterminée; l'hypothèse (¹) correspond au fait que la surface de Riemann est simplement connexe. L'arbre topologique d'une surface de Riemann peut dans certains cas suffire pour déterminer le type de la surface, alors que la liberté du choix des points fondamentaux de ramification peut *a priori* modifier le type de la surface.

2. — Les arbres topologiques a cycles finis et régulièrement ramifiés.

Il s'agit d'arbres T ne possédant pas de cycles infinis et dont les nœuds ne s'accumulent qu'à l'infini.

(¹) Cela implique que les nœuds du schéma, s'ils sont en nombre infini, ne s'accumulent qu'au point à l'infini du plan. Nous nous placerons toujours dans cette hypothèse.

Definitions. — *a. Nœuds schématiquement équivalents. — Deux nœuds* P *et* P′ *sont dits schématiquement équivalents* ($P \infty P'$) *si les figures constituées par le schéma et le point* P *d'une part, le schéma et le point* P′ *d'autre part, sont identiques (en tant que figures définies à une tranformation topologique près).*

Transitivité. — Il est évident que $P \infty Q$, $Q \infty R$ entrainent $P \infty R$.

b. Un schéma est régulièrement ramifié, s'il existe un certain ensemble fini (E) *de nœuds tel que tout nœud du schéma soit* ∞ *à un nœud de* E.

c. Nœuds équivalents. — P *et* Q *sont équivalents* ($P \sim Q$), *si les figures constituées par l'arbre* T *et le point* P *d'une part, l'arbre* T *et le point* Q *d'autre part, sont identiques.*

Transitivité. — $P \sim Q$, $Q \sim R$ entrainent $P \sim R$.

d. Arbre régulièrement ramifié. — T *est un arbre régulièrement ramifié, s'il existe un certain ensemble fini* K *de nœuds, tel que tout nœud de l'arbre soit* $\sim$ *à un nœud de* K.

D'après le théorème du paragraphe 1, l'ensemble des nœuds ∞P_0 peut être séparé au plus en $2q$ classes de nœuds équivalents, d'où :

Théorème. — *Un arbre topologique à schéma régulièrement ramifié est régulièrement ramifié.*

Théorème. — *Si* T, *régulièrement ramifié, possède une infinité de nœuds, tout nœud* Q *a une infinité de nœuds équivalents.*

L'un au moins des nœuds de K, soit P_0, possède une infinité de nœuds $P_i \sim P_0$. Soit Q un nœud de T, qui peut être joint à P_0 par une ligne polygonale Γ_0. On peut construire d'une manière unique à partir de chaque P_i une ligne Γ_i, comme Γ_0 est construite sur T à partir de P_0. Chaque Γ_i détermine un nœud $Q_i \sim Q$. De plus Γ_i et Γ_j déterminent Q_i et Q_j distincts, car Q_i étant équivalent à Q, la ligne Γ_i peut se construire d'une manière unique à partir de Q_i comme Γ_0 à partir de Q. D'où l'on déduit :

Théorème. — *Si* T, *régulièrement ramifié n'a qu'un nombre fini de nœuds, chaque classe de nœuds équivalents comprend le même nombre de nœuds.*

e. Cycles équivalents. — Deux cycles sont équivalents si tous leurs nœuds sont deux à deux équivalents, et rencontrés dans le même ordre lorsqu'on parcourt les cycles dans le même sens : Il n'y a qu'un nombre fini de classes de cycles équivalents: et d'autre part, pour que deux cycles soient équivalents, il suffit qu'un nœud de l'un soit équivalent à un nœud de l'autre, et que les côtés du cycle issus de ces nœuds soient de même nature. La condition sur les sens est respectée d'elle-même, puisque les nœuds équivalents sont de même nature.

C. — Les surfaces fermées et leurs surfaces de recouvrement.

1. — Arbre topologique d'une surface fermée.

Soit Γ une courbe fermée du plan z passant par les projections des points critiques de R; Γ est partagée en un certain nombre d'arcs par les projections de ces points critiques. Construisons alors à partir de R une surface R^* simplement connexe obtenue en retirant de R les points de certains arcs γ dont les projections sur le plan z sont des arcs de Γ. La construction de l'arbre topologique T^* de R^* met en évidence des côtés issus de certains nœuds, et n'aboutissant pas à un autre nœud. Ces côtés représentent des liaisons entre demi-feuillets à travers un arc de $R - R^*$. Cet arc sépare dans son voisinage deux demi-feuillets de natures différentes, et à chacune de ces deux lèvres correspond un côté libre de l'arbre T^*. Identifions conventionnellement ces deux côtés libres notés λ, $-\lambda$. Alors tout côté de T^* joint effectivement deux nœuds ($\circ$ et $\circ$), et T^* devient l'arbre T de R. Une transformation topologique globale de R transforme les demi-feuillets en domaines sur S transformée de R. Si nous prenons pour S une surface type de même genre que R, un coussin à p trous par exemple, les domaines transformés des demi-feuillets seront appelés demi-domaines d'univalence, et la frontière de chacun pourra être séparée en autant d'arcs que Γ. Sur cette surface S, l'arbre T de R peut être construit sans que l'on ait recours à l'identification conventionnelle d'éléments « libres ».

Remarque. — L'arbre T peut être régulièrement ramifié, si les définitions *c* et *d* s'appliquent à l'arbre T construit sur la surface S.

Inversement, soit T^* un arbre composé d'un nombre fini de nœuds, dont certains sont origines de côtés libres eux-mêmes associés par couples $(\varepsilon, -\varepsilon)$: si deux côtés libres associés étaient successifs sur la périphérie de T^*, on pourrait les raccorder en fermant un cycle; deux côtés associés doivent être de même nature et issus de nœuds de natures différentes. Dans ces conditions on peut construire de proche en proche la surface R^* représentée par T^* et la limiter par des coupures indiquées par les côtés libres de T^*; en identifiant les coupures correspondant aux liaisons ε, $-\varepsilon$, on a construit une surface de Riemann R à nombre fini de feuillets. On sait déterminer le nombre n de feuillets de R, sur T^*, et pour déterminer le genre de R, il suffit de déterminer le nombre des points critiques avec leur ordre. La périphérie de T^* est séparée par les côtés libres en un nombre fini d'arcs polygonaux qui représentent chacun un trajet sur R limité aux deux coupures représentées par les côtés libres extrêmes. Ce trajet peut se poursuivre sur R et simultanément sur d'autres arcs polygonaux de la périphérie de T^*. Lorsque le parcours se sera fermé, le trajet correspondant sur R se sera également fermé, et l'on aura décrit sur R un chemin fermé entourant un seul point critique : tous les arcs polygonaux ainsi

parcourus sur la périphérie de T^* appartiennent à un même cycle dont l'ordre est 2ν (nombre de côtés de l'ensemble de ces arcs) et le point critique correspondant a pour ordre ν. Sur la surface S on ne distinguera pas les cycles initialement fermés sur T^* et ceux qui correspondaient à des systèmes d'arcs polygonaux de la périphérie de T^*. Nous dirons que le « centre » d'un cycle d'ordre 2ν correspond à un point critique d'ordre ν. D'où le genre de R, $2p = \Sigma(\nu_i - 1) - 2(n-1)$ qui ne dépend que de T^*.

2. — Surface de recouvrement.

Soit $\mathfrak{T}$ l'arbre topologique de $\mathcal{R}$, surface de recouvrement de R. Un nœud $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{T}$ représente un demi-feuillet de $\mathcal{R}$ et comme tel correspond à un nœud N de T (Chap. III, A, 3). Soit alors un point critique de $\mathcal{R}$ permutant une famille de demi-feuillets, dont fait partie celui représenté par $\mathfrak{N}$. A ce point critique sur $\mathcal{R}$ correspond sur R un point critique de même ordre, donc à chacun des cycles auxquels appartient $\mathfrak{N}$ correspond un cycle de même ordre sur T auquel appartient N (d'où l'on conclut que $\mathfrak{T}$ est à cycles finis). La correspondance entre $\mathfrak{N}$ et N ayant ainsi été prolongée à tous les nœuds des cycles contenant $\mathfrak{N}$ et N, on peut à partir de $\mathfrak{N}$ construire un arbre T_0 identique à T. L'arbre $\mathfrak{T}$ est l'arbre de la surface de recouvrement représentée par T_0. Mais T_0 peut être construite à partir de n'importe quel point $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{T}$, donc :

Théorème. — *$\mathfrak{T}$ est à cycles finis, régulièrement ramifié, l'ensemble* K (*cf.* déf., Chap. III, B, 2) *pouvant être pris identique à l'arbre* T *de* R.

Cela n'exclut pas que l'on puisse trouver un ensemble K′ plus restreint que T.

3. — Cellules.

Soit Ω un ensemble fini de nœuds de $\mathfrak{T}$. On peut définir les éléménts suivants sur $\mathfrak{T}$: *nœud périphérique* de Ω, nœud $N \in \Omega$ et tel que l'un au moins des nœuds de $\mathfrak{T}$ et $\notin \Omega$ soit reliable à N par un seul côté ; *nœud extrapériphérique* de Ω, nœud Q de $\mathfrak{T}$ et $\notin \Omega$, reliable à un nœud $N \in \Omega$ par un seul côté. N est donc périphérique de Ω.

Cellules. — Une cellule est un ensemble fini $\mathfrak{C}$ de nœuds de $\mathfrak{T}$, tel qu'il n'y ait pas dans $\mathfrak{C}$, deux nœuds équivalents, et que tout nœud extrapériphérique de $\mathfrak{C}$ soit équivalent à un nœud de $\mathfrak{C}$.

Construction. — Soit $P \in \mathfrak{T}$, et b'_1 l'ensemble des nœuds extra-périphériques pour P. Désignons par b_1 le plus petit sous-ensemble de b'_1, tel que tout nœud de b'_1 soit $\sim$ à un nœud de b_1 ; posons $B_1 = b_1 \cup P$. Soit b'_2 l'ensemble des nœuds extra-périphériques de B_1 et b_2 le plus petit sous-ensemble de b'_2 tel que tout nœud de b'_2 ait un équivalent dans $B_2 = B_1 \cup b_2$, ... Cette construction des B_i

ne peut fournir une suite croissante de B_i, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de nœuds équivalents. Lorsque $B_{n-1} \equiv B_n$, B_n est une cellule $\mathfrak{C}$.

Côtés libres associés. — Un côté libre de $\mathfrak{C}$ est un trait de liaison de T joignant un nœud périphérique de $\mathfrak{C}$ à un nœud extra-périphérique. Soit Q extra-périphérique, il possède un nœud équivalent R dans $\mathfrak{C}$, et soit α un côté libre joignant Q à Q' (périphérique); le côté issu de R et de même nature que α joint $R \in \mathfrak{C}$ à R' qui ne peut être Q' lui-même, sinon il y aurait deux côtés de même nature issus de Q', puisque Q et R sont distincts; R' qui est $\sim$ Q' ne peut donc appartenir à $\mathfrak{C}$, sinon $\mathfrak{C}$ comprendrait deux nœuds équivalents. Les côtés (RR') et (QQ') sont deux côtés libres dits associés. Il est immédiat que cette association est réciproque et qu'un côté libre n'a qu'un seul associé. (Nous conviendrons dans ce qui suit de ne représenter que la moitié d'un côté libre.)

Arcs périphériques. — Appelant extrémités de $\mathfrak{C}$ les extrémités des demi-côtés libres, nous pouvons séparer sur la périphérie de $\mathfrak{C}$ (précisément au moyen des extrémités) des arcs périphériques.

Pavage de $\mathfrak{S}$ par les cellules. — A partir de deux nœuds de $\mathfrak{S}$, P_i et Q_j respectivement équivalents aux nœuds P et $Q \in \mathfrak{C}$, on peut construire d'une manière unique des cellules $\mathfrak{C}_i$ et $\mathfrak{C}_j$, comme $\mathfrak{C}$ est construite à partir de P et Q.

Théorème. — *$\mathfrak{C}_i$ et $\mathfrak{C}_j$ ou bien sont confondues ou bien n'ont aucun nœud commun.*

Supposons qu'il existe $N \in \mathfrak{C}_i$ et à $\mathfrak{C}_j$. N a donc un équivalent $N_0 \in \mathfrak{C}$ et un seul. $\mathfrak{C}_i$ et $\mathfrak{C}_j$ sont construits à partir de N comme $\mathfrak{C}$ à partir de N_0 et cette manière de construire $\mathfrak{C}_i$ et $\mathfrak{C}_j$ n'a qu'une solution, donc $\mathfrak{C}_i \equiv \mathfrak{C}_j$.

Théorème. — *Tout nœud $P \in \mathfrak{S}$ a un équivalent dans $\mathfrak{C}$.*

Soit $P \in \mathfrak{S}$, on peut le joindre à $O \in \mathfrak{C}$ par une ligne polygonale L, d'un nombre fini de côtés. Parcourons L (de O vers P); soit P_1 le premier point extra-périphérique de L pour $\mathfrak{C}$, il a un équivalent P'_1 dans $\mathfrak{C}$; on peut construire $\mathfrak{C}_1$ à partir de P_1 comme $\mathfrak{C}$ à partir de P'_1 et $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}$ n'ont aucun point commun. Soit alors P_2 le premier nœud extra-périphérique de L pour $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}_1$, il est extra-périphérique pour l'une au moins de ces cellules et a par conséquent un équivalent périphérique, $P'_2 \in \mathfrak{C}$. On construit $\mathfrak{C}_2$ à partir de P_2 comme $\mathfrak{C}$ à partir de P'_2. Comme $P_2 \neq P_1$, et que L comprend seulement un nombre fini de nœuds, il existe $\mathfrak{C}_n \ni P$. Donc P a un équivalent dans $\mathfrak{C}$, évidemment unique. Si l'on distingue $O \in \mathfrak{C}$ et l'ensemble de tous les $O_n \sim O$, on couvre $\mathfrak{S}$ entier sans omission, ni superposition en construisant les $\mathfrak{C}_n$ à partir des O_n comme $\mathfrak{C}$ à partir de O. Soient $\mathfrak{C}_i$ et $\mathfrak{C}_j$ deux cellules telles que $P_i \in \mathfrak{C}_i$ et $Q_j \in \mathfrak{C}_j$ soient reliés par un seul côté (cellules juxtaposées), Q'_j désignant

l'équivalent dans $\mathfrak{C}_i$ de Q_j le côté issu de Q_j et de même nature que Q_jP_i est précisément l'associé de P_iQ_j dans la cellule $\mathfrak{C}_i$.

Théorème. — *Dans le pavage de $\mathfrak{T}$ deux cellules juxtaposées sont reliées l'une à l'autre par des traits de liaison associés.*

4. — Cycles.

Considérons un cycle K de $\mathfrak{T}$; pour former le contour de K, il faut juxtaposer dans le pavage de $\mathfrak{T}$, un certain nombre de cellules. Un certain nombre φ d'arcs périphériques de $\mathfrak{C}$ contribuent à la formation du contour de ce cycle (en pouvant y apparaître plusieurs fois). Il n'existe pas sur la périphérie de $\mathfrak{C}$ d'arcs périphériques (autres que les φ ci-dessus), contribuant à la formation du contour d'un cycle équivalent, sinon $\mathfrak{C}$ comprendrait deux nœuds équivalents. Supposons qu'un arc périphérique de $\mathfrak{C}$ apparaisse ν fois sur le contour du cycle K. Soient $P_1, \ldots, P_\nu$, ν nœuds équivalents appartenant à ces arcs; comme $\mathfrak{T}$ est le même à partir de chacun des P_i, tout arc qui contribue à la formation du contour de K apparaît également ν fois; ν est donc aussi le nombre de nœuds équivalents apparaissant sur le contour de K, et à ce titre est indépendant de $\mathfrak{C}$. Nous appellerons ν la *caractéristique* de K. Par contre, φ dépend de la décomposition cellulaire. Le nombre total d'arcs périphériques de cellules $\mathfrak{C}$ apparaissant sur le contour de K est $\nu\varphi$.

5. — Arbre de base.

L'arbre de base de $\mathfrak{T}$ est un arbre T, avec un nombre fini de nœuds, et une loi d'association entre côtés libres, qui soit l'arbre d'une surface algébrique A, tous les cycles de T ayant l'ordre qu'ils ont sur $\mathfrak{T}$. Si tous les cycles ont pour caractéristique 1, $\mathfrak{C}$ est l'arbre de base de $\mathfrak{T}$, mais ce n'est plus le cas dès qu'il y a sur $\mathfrak{T}$ un cycle de caractéristique $\neq 1$.

Prenons pour T un groupement G de N cellules $\mathfrak{C}_\lambda$ dont les indices sont définis mod N. On va chercher un choix des indices des cellules $\mathfrak{C}_\lambda$ de façon que, en parcourant un cycle K_j dans le sens direct, on passe par les demi-liaisons $(i, -i)$ [la liaison $i \in \mathfrak{C}_h$, et la liaison $-i \in \mathfrak{C}_k$] de la cellule $\mathfrak{C}_h$ à la cellule $\mathfrak{C}_k$ avec $k = h + x_i$. On a alors $x_{-i} = -x_i$ [si nous cherchons à faire de x_i un coefficient lié à la liaison $(i, -i)$ indépendant des cellules qu'elle relie], ce que l'on voit en parcourant le cycle $K_{j'}$ adjacent à K_j suivant $(i, -i)$. Pour chaque K_j on a une équation

$$\nu_j \sum_{K} x_i = \lambda_j N. \tag{1}$$

où ν_j est la caractéristique du cycle K_j; $\sum_{K_j}$ la somme des x_i distincts corres-

pondant aux côtés libres reliant deux cellules consécutives du cycle. λ_j doit être un entier premier avec ν_j, sinon le cycle se fermerait sans être constitué par ν_j arcs périphériques de $\mathfrak{C}$.

Si le système (1) est résoluble en nombres entiers, on peut construire un groupement de N cellules ayant toutes des indices différents, et prendre pour loi d'association, la suivante : soit i un côté libre de $\mathfrak{C}_h$, on lui associe le côté libre $-i$ de $\mathfrak{C}_{h_{ij}}$; l'association est évidemment réciproque : à $-i$ de $\mathfrak{C}_{h_{ij}}$ correspond i de $\mathfrak{C}_{h_{ij}-\nu_i} \equiv \mathfrak{C}_h$. On a ainsi constitué un arbre de base T d'une surface algébrique A (1).

Surface de recouvrement de A. — Soit $P \in \mathfrak{T}$ et O un nœud de T. On peut construire une ligne polygonale OP ou A. Soit P_1 le premier nœud extra-périphérique pour T sur A, P_1Q_1 le côté de A précédant $P_1(Q_1 \in T_1)$. PQ_1 côté libre de T a un associé $Q_1'P_1'(P_1' \in T)$ et l'on peut construire une ligne A_1 à partir de P_1' comme A à partir de P_1. Soit P_2 le premier nœud extra-périphérique sur A_1 pour T; on peut construire A_2 et à chacune de ces opérations on progresse au moins d'un côté sur A, et l'on associe ainsi à P un point Π de T.

Ce point Π ne dépend pas de A; il suffit de montrer que Π n'est pas changé si l'on remplace dans A, une ligne polygonale contour d'un cycle, par la ligne polygonale complétant le contour du même cycle et ayant les mêmes extrémités. Cela revient à montrer que si Q est un nœud de $\mathfrak{T}$, et M un nœud $\Gamma \sim Q$, et que l'on fasse parcourir à Q_1 le contour d'un cycle en partant de Q et revenant en Q, le point $M_1 \sim Q_1$ va parcourir à partir de M une ligne polygonale connexe ou disjointe de T se fermant en M quand et seulement quand Q_1 atteint Q. C'est une conséquence du fait que les équations (1) sont vérifiées (λ_j premier avec ν_j), d'autre part, si Q_1 décrit un cycle d'ordre $2r$, M_1 parcourt une ligne polygonale de $2r$ côtés (en comptant pour un seul deux demi-liaisons associées).

Soit $\mathcal{R}$ la surface de Riemann représentée par $\mathfrak{T}$ et admettant les mêmes points fondamentaux de ramification que A. Un point de $\mathcal{R}$ appartient, *soit* à un demi-feuillet : alors la correspondance établie entre les nœuds de $\mathfrak{T}$ et ceux de T, permet d'établir entre un point d'un demi-feuillet de $\mathcal{R}$ et un point d'un demi-feuillet de A, une correspondance conforme des voisinages, localement identique; *soit* à l'intérieur d'un arc séparant deux demi-feuillets : la correspondance ci-dessus s'étend encore à ce cas, avec correspondance identique des voisinages; *ou bien* c'est un point critique de $\mathcal{R}$, d'ordre λ correspondant sur $\mathfrak{T}$ à un cycle d'ordre 2λ. A ce cycle correspond sur T une ligne polygonale de 2λ côtés, donc sur A un point critique d'ordre λ. La correspondance entre

(1) J'ai montré par une toute autre méthode que l'ordre de base T pouvait être construit même dans le cas où (1) n'est pas résoluble en nombres entiers, (*C. R., Acad. Sc.*, 232, 1951, p. 467).

« centres » de cycles s'étend encore dans le voisinage des points critiques, par identité locale.

THEORÈME. — *La surface* $\mathcal{R}$ *représentée par* $\mathfrak{T}$ *et ayant les mêmes points fondamentaux de ramification que* A, *est la surface de recouvrement de* A *représentée par* T.

6. — Résolution du système (1).

Au lieu de conserver x_i et x_{-i} dans les équations (1) nous écrirons $\varepsilon_{ji}x_i$ où ε_{ji} est le coefficient de x_i dans l'équation de K_j.

a. $2n$ désignant le nombre des côtés libres de $\mathfrak{C}$, les équations

$$\nu_j \sum_{\mathrm{K}_j} \varepsilon_{ji} x_i = \lambda_j \mathrm{N} \tag{1}$$

contiennent n inconnues. Puisqu'il y a $2n$ côtés libres, il y a aussi $2n$ arcs périphériques de $\mathfrak{C}$, d'où $2n$ équations. Si dans une équation figurent h inconnues, c'est que h arcs périphériques de $\mathfrak{C}$ participent à la formation de K_j, et l'équation de K_j se trouve répétée h fois dans les $2n$ que nous avons écrites; h est ici le ρ défini plus haut.

b. Retirons du système les équations qui se rencontrent plusieurs fois et écrivons le système sous la forme

$$\sum_{\mathrm{K}} \varepsilon_{ji} x_i = \lambda_j \frac{\mathrm{N}}{\nu_j}. \tag{2}$$

Dans ce système, puisque les cycles K_j sont toujours parcourus dans le sens direct, l'inconnue x_i se rencontrera deux fois seulement dans deux équations distinctes, avec des signes différents, puisque la liaison $(i, -i)$ correspondante, est un côté commun à deux cycles seulement et est parcourue dans deux sens différents lorsqu'on parcourt les deux cycles dans le même sens.

c. Si toutes les équations comportent au moins deux inconnues, il y a au plus n équations dans le système (2). Supposons que (1) contienne α équations à une inconnue, ce qui ramène à $2n - \alpha$ le nombre des équations répétées au moins deux fois :

Si $\alpha \leq 2$, il y a au plus $n - 1$ équations distinctes à plus d'une inconnue, ce qui porte à $n + 1$ au plus le nombre d'équations distinctes dans (2).

Si $\alpha > 2$, soient sur la périphérie de $\mathfrak{C}$ deux arcs périphériques de $\rho = 1$, limités par les côtés associés λ et $-\lambda$ et, μ et $-\mu$, et tels qu'il n'y ait pas d'autre arc de $\rho = 1$ entre les côtés libres λ et μ. Il y a alors entre λ et μ, un arc au moins d'un cycle de $\rho > 2$; sinon à partir des côtés libres λ et $-\lambda$ tous

les côtés libres seraient deux à deux associés, et l'on trouverait que μ aurait un autre associé que $-\mu$, puisque entre $-\lambda$ et $-\mu$ il y a d'autres arcs de cycles avec $\varepsilon = 1$. Cela ayant lieu entre chaque couple d'arcs dont les extrémités sont associées, on déduit que :

Si $\alpha = 3$ au moins une équation est écrite trois fois dans (1).

Si $\alpha = 4$ au moins deux équations sont écrites trois fois ou une équation est écrite quatre fois, etc. ; dans le cas général on pourra retirer $\alpha - 2$ équations de (1) pour se ramener au cas où toutes les équations restantes (à part celles ne contenant qu'une inconnue) sont encore écrites au moins deux fois. Il reste donc au plus $\alpha + \frac{1}{2}[(2n - \alpha) - (\alpha - 2)] = n + 1$ équations dans (2).

d. Le système (2) comprenant p équations, le rang du tableau des coefficients est $p - 1$; la somme de toutes les formes linéaires figurant aux premiers membres est $\equiv 0$, d'après (b). Donc le système ne sera résoluble que si l'on peut trouver N et un système de λ_j (chacun premier avec le ν_j correspondant) vérifiant

$$\sum \lambda_j \frac{N}{\nu_j} = 0. \tag{3}$$

Si le rang était $< p - 1$, il serait possible d'exprimer une forme linéaire des premiers membres, comme somme (changée de signe) d'autres formes de (2), sans pour cela les utiliser toutes ; revenons alors à la signification de ces équations : l'équation d'un cycle fera toujours intervenir les équations de tous les cycles qui lui sont contigus qui sont les seuls où figurent les inconnues apparaissant dans la forme initiale, et de proche en proche tous les cycles périphériques de $\mathfrak{C}$ interviendront.

Il est à remarquer que la condition (3) ne fait pas intervenir la structure de $\mathfrak{C}$, ni les cycles de caractéristique 1. C'est une condition ne dépendant que de $\mathfrak{T}$.

c. Calcul du déterminant des $p - 1$ formes principales. Il possède la propriété suivante H : *chaque colonne se compose de zéros et de deux éléments au plus,* $\neq 0$ *égaux l'un à* $+1$, *l'autre à* -1.

Nous chercherons seulement la valeur absolue de ce déterminant, sachant qu'il est $\neq 0$, et nous permuterons sans précautions pour le signe, lignes ou colonnes. Aucune colonne ne pouvant être composée exclusivement de zéros, ni aucune ligne, on peut placer un 1 comme premier terme de la diagonale principale et ajouter la première ligne à celle où figure -1 à la première colonne. Le coefficient de a_1^1 est un déterminant D, de même espèce que le précédent, puisqu'on a modifié une seule ligne sans altérer la propriété fondamentale H. Il en résulte que ce déterminant a pour valeur absolue 1.

Sous la condition (3) le système (2) est résoluble en nombres entiers.

CHAPITRE IV.

DÉCOMPOSITION EN FEUILLETS DE CERTAINES SURFACES DE RIEMANN.

A. — Méthodes d'isolation des singularités.

1. — Notations.

La variable complexe étant w, nous considérerons des surfaces de Riemann $\mathcal{R}$ obtenues par prolongement analytique. Nous admettrons que le prolongement est possible au delà d'un point algébrique sur $\mathcal{R}$, et nous réserverons le nom de point critique à la projection sur le plan w, d'un point algébrique de $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ sera supposée simplement connexe, représentée sur un cercle C de rayon ρ (fini ou infini), par une fonction $z = \varphi(w)$ dont la fonction inverse sera $w = f(z)$.

Un point w_0 est transcendant pour φ, s'il existe à l'intérieur de tout cercle centré en w_0 un élément $\mathcal{E}(w, z)$ prolongeable dans l'intérieur de ce cercle, suivant un certain chemin jusqu'à w_0 exclusivement. Un point transcendant n'existe que dans le plan w [les points critiques sont provisoirement exclus, puisque l'on a admis que φ était prolongeable au delà des points algébriques]. Il peut arriver que certains éléments soient prolongeables jusqu'en w_0 inclusivement; nous dirons qu'ils définissent une branche régulière (ou algébrique) en w_0. Nous désignerons par $\mathfrak{T}$ l'ensemble des points transcendants, $\mathfrak{T}'$ son dérivé, $\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{T}'$. Nous nous bornerons aux surfaces $\mathcal{R}$ telles qu'*il est possible pour chaque valeur de l'entier n, de construire un ensemble fini de domaines simplement connexes* $\delta_n^i (i = 1, 2, \ldots, p_n)$ *tels que :*

1° $\mathfrak{T}' \subset \bigcup_i \delta_n^i$;

2° $\max \operatorname{dist}(P, \mathfrak{T}') \to 0$ *quand* $n \to \infty$, P *parcourant la frontière de* $\bigcup_i \delta_n$.

2. — Exhaustion quasi simple de C$\mathfrak{T}$.

Soit γ_n^i la courbe fermée frontière de δ_n^i; la trace de $\mathfrak{T}'$ sur δ_n^i est un ensemble fermé intérieur à δ_n^i, dont la distance à γ_n^i est $h_n^i > 0$. La couronne comprise entre γ_n^i et une courbe $\gamma_n'^i$ dont tous les points sont à une distance de $\gamma_n^i < h_n^i$, ne renferme qu'un nombre fini de points transcendants, et au plus une infinité dénombrable de points critiques. Il est donc possible de construire dans cette couronne une courbe $\gamma_n''^i$ fermée limitant un domaine $\delta_n''^i \subset \delta_n^i$, contenant à son intérieur tous les points de $\overline{\mathfrak{T}}$ intérieurs à δ_n^i, et ne passant par aucun point critique. Les points de $\mathfrak{T}$ extérieurs à $\bigcup_i \delta_n''^i$ sont isolés et en nombre fini : on peut les enfermer dans des domaines d_n^k ne contenant chacun qu'un seul point trans-

cendant, et dont les courbes frontières ne passent par aucun point critique ; on peut assujettir les d_n^k à avoir des diamètres qui tendent vers zéro quand $n \to \infty$. Désignons par δ_n^i les domaines δ_n^{ij} ou $d_n^k (i = 1, 2, \ldots, q_n)$ et posons $\Delta_n = \subset \bigcup_i \delta_n^i$;

les Δ_n forment une suite croissante, chacun étant limité par un nombre fini q_n de courbes fermées γ_n^i limitant les domaines δ_n^i ; $\overline{\Delta}_n$ ne contient aucun point transcendant et les γ_n^i ne passent par aucun point critique. Les δ_n^i satisfont alors à

1° $\overline{\mathfrak{E}} \subset \bigcup_i \delta_n^i$;

2° $\max \operatorname{dist}(P, \mathfrak{E}) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, P *parcourant la frontière de* $\bigcup_i \delta_n^i$;

3° γ_n^i *ne passe par aucun point critique ni transcendant*

3. — Exhaustion simplement connexe de $C\overline{\mathfrak{E}}$.

Sur chaque courbe γ_n^i marquons un point A_n^i. Construisons alors dans Δ_1 à partir d'un point A_0 intérieur non critique, q_1 courbes ne passant par aucun point critique, sans autres points communs que A_0 et aboutissant aux points A_1^i.

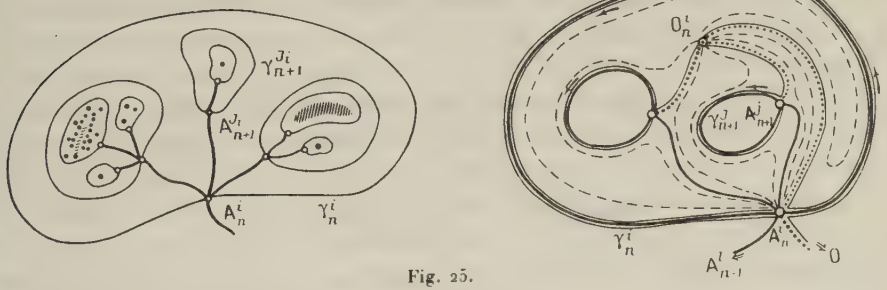


Fig. 25.

Les δ_n^i se séparent en q_n familles : tous les δ_{n+1}^{ih} d'une même famille étant intérieurs au même δ_n^h. Joignons alors chaque A_{n+1}^{ih} à A_n^h par une courbe ne rencontrant pas de point critique, intérieure à $d_n^h = \Delta_{n-1} \cap \delta_n^h$. Ces courbes, qui n'ont d'autre point commun que A_n^h, seront notées $[A_n^h A_{n-1}^h]$. En retirant de Δ_n toutes les courbes ainsi tracées, on obtient un domaine Δ_n' simplement connexe. Les courbes qui deviennent ainsi frontières de Δ_n', en constituent la « frontière régulière ». La suite des Δ_n' est croissante ; soit Δ' le domaine limite dont la « frontière régulière » est l'ensemble de toutes les courbes $[A_n^h A_{n-1}^k]$. Soit $\omega_1 \notin \overline{\mathfrak{E}}$; il est donc à une distance $\rho > 0$ de $\mathfrak{E}$ et d'après la condition 2°, ω_1 est extérieur aux δ_n^i pour n assez grand. Donc $\omega_1 \in \Delta'$, en étant soit intérieur, soit sur sa frontière régulière (celle d'un Δ_n' pour n assez grand).

Considérons une courbe fermée Γ intérieure à Δ' ; elle sépare le plan en deux

régions dont l'une (dite intérieure) ne contient pas A_0. Cette région est formée de points intérieurs à Δ' : en effet, s'il y avait un point de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans cette région, comme Γ est à une distance $\rho > 0$ de $\mathfrak{C}$, il y aurait toute une courbe γ'_n dans l'intérieur de Γ, donc un point A'_n, et la frontière régulière de Δ'_n, donc celle de Δ' couperait Γ, ce qui est exclu. Un point $\omega_1 \in \mathfrak{C}$, qui n'est pas intérieur à Δ', est donc sur la frontière régulière d'un Δ'_n, et s'il était intérieur à Γ, on aurait la même contradiction que dans le cas précédent : les Δ'_n et Δ' sont simplement connexes.

4. — Construction des feuillets de $\mathcal{R}$.

1° Les rayons de prolongement. — Soit O'_n un point non critique intérieur à d'_n. Soit une famille de courbes $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$ dépendant d'un paramètre continu μ (variant par exemple de 0 à τ), intérieures à d'_n, joignant O'_n au point A'_n, sans autres points communs que les extrémités, telles que par tout point de d'_n, il passe une et une seule $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$, une $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$ ne pouvant passer par plus d'un seul point critique. Appelons d''_n le domaine simplement connexe obtenu en retirant de d_n la frontière régulière de Δ'_{n-1} ; un certain nombre de courbes $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$ sont à double détermination : elles sont des deux types suivants :

α. des courbes $(O'_n A'_{n-1}) +$ (pour l'une des déterminations seulement) la courbe γ'^{i}_{n-1} (1) + l'arc $[A'_{n-1} A'_n]$. Il y a autant de ces courbes que de δ'^{i}_{n-1} intérieurs à δ'_n.

β. une courbe $(O'_n A'_n) +$ (pour l'une des déterminations seulement) la courbe γ'^{i}_n. Dans un voisinage de A'_n on peut distinguer un arc de γ'^{i}_n issu de A'_n et un arc aboutissant en A'_n. Nous pouvons assujettir les arcs $(O'_n A'_n)$ et $(O'^{k}_{n-1} A'_n)$ à ne comprendre dans l'angle qu'ils forment en A'_n que l'arc de γ'^{i}_n issu de A'_n et aucun arc $[A'_n A'^{k}_{n-1}]$ ou $[A'^{i}_n A'^{i}_{n-1}]$. Les courbes à double détermination sont astreintes à ne passer par aucun point critique.

2° Prolongement dans $d'_n(\zeta)$. — Considérons un élément $\mathcal{E}(O'_n, \zeta)$ de $\varphi(w)$ et prolongeons-le radialement suivant les courbes $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$. On ne poursuivra pas le prolongement au delà d'un point algébrique et l'on appellera « rayon exceptionnel », la portion de $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$ (sur $\mathcal{R}$) comprise entre le point algébrique et le point A'_n. Pour les $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$ à double détermination on effectuera le prolongement suivant les arcs $(O'_n A'^{i}_{n-1})$ et γ'^{i}_{n-1} seulement pour les courbes du type α, et suivant $(O'_n A'^{i}_n)$ et γ'^{i}_n pour le type β. Le prolongement de $\mathcal{E}(O'_n, \zeta)$ a été effectué dans $d''_n(\zeta) \equiv d''_n$ privé des arcs $[A'_n A'^{i}_{n-1}]$ et des « rayons exceptionnels », toujours en nombre fini : sinon ils s'accumuleraient suivant une $\mathfrak{C}^{\mu}_{n,i}$ (à simple ou double détermination) qui passerait par un point transcendant, ce qui est impossible.

---

(1) γ'^{i}_{n-1} désigne la courbe γ'^{i}_{n-1} parcourue dans le sens direct à partir de A'^{i}_{n-1}.

3° Constitution d'un feuillet. — Soit O_0 une origine dans Δ_2 et $\mathcal{E}(O_0, \zeta_0)$ un élément de $\varphi(w)$. Effectuons son prolongement dans Δ_1' comme il vient d'être dit ($\Delta_1' \equiv \Delta_1$ privé des arcs $[A_0 A_1^i]$) et suivant chacune des courbes γ_1^i. Ce prolongement permet de définir dans chaque d_1^i, un élément unique $\mathcal{E}(O_1^i, \zeta_{0,1}^i)$ qui, prolongé dans $d_1^i(\zeta_{0,1}^i)$, coïncide sur γ_1^i avec le prolongement de $\mathcal{E}(O_0, \zeta_0)$. Nous dirons qu'on a sur $\mathcal{R}$ un domaine ne se recouvrant pas, simplement connexe, tel que tout point du plan w qui $\in \overline{C\mathfrak{E}}$ soit projection d'un point ou intérieur ou frontière de ce domaine, que nous appellerons *feuillet* de $\mathcal{R}$ couvrant $\overline{C\mathfrak{E}}$. Ce feuillet sera dit *complet* si $\overline{C\mathfrak{E}}$ couvre le plan w.

4° Domaines d'univalence. — Un feuillet de $\mathcal{R}$ est l'image par $w = f(z)$ de domaines du plan z où f est univalente, ses valeurs couvrant $\overline{C\mathfrak{E}}$. Soit $z_0 \in \mathring{C}$: si $f(z_0) \notin \overline{\mathfrak{E}}$, on sait déterminer par un nombre fini d'opérations, le domaine d'univalence auquel appartient z_0, où les domaines (en nombre fini) dont il est point frontière. w_0 est à une distance finie de $\mathfrak{E}$, donc il existe n assez grand pour que $d_n^i \ni w_0$. On prolonge alors $\mathcal{E}(w_0, z_0)$ jusqu'à O_n^i suivant la $\mathfrak{C}_n^u$ passant par ce point. Si ce prolongement rencontre un point algébrique entre w_0 et O_n^i, on obtient deux éléments en O_n^i ; on peut en obtenir plus de deux si $\mathcal{E}(w_0, z_0)$ est lui-même élément algébrique de $\varphi(w)$. Le prolongement du ou des éléments obtenus en O_n^i suivant le système des courbes $(O_n^i A_n^i)(A_n^i O_{n-1}^j)(O_{n-1}^j A_{n-1}^l)$ conduit en O_0 à un nombre égal d'éléments : les feuillets construits à partir de ces éléments comprennent le point (w_0, z_0) de $\mathcal{R}$, donc les domaines d'univalence correspondants comprennent z_0, comme point intérieur ou frontière d'un nombre fini de feuillets ou domaines d'univalence.

5. — Réduction des enclaves finies.

Soit $\mathcal{E}(A_n^i, a_n^i)$ un élément que l'on prolonge suivant γ_n^i sans limiter ce prolongement lorsqu'on rencontre A_n^i. Supposons que la courbe Γ_n^i obtenue dans le plan z comme image de γ_n^i soit une courbe fermée, qui se décompose donc en p arcs élémentaires ayant chacun pour image γ_n parcourue une seule fois. Prolongeons alors $\mathcal{E}(A_n^i, a_n^i)$ dans δ_n^i de toutes les façons possibles. Ce prolongement n'est arrêté par aucun point transcendant puisque Γ_n^i est fermée. Le domaine $\mathfrak{D}_n^i$ obtenu dans le plan z, est ou simplement connexe, ou de connexion finie, puisque $f(z) = A_n^i$ n'a qu'un nombre fini de solutions à l'intérieur de Γ_n^i ; dans le cas où $\mathfrak{D}_n^i$ est multiplement connexe les courbes frontières autres que Γ_n^i ont pour image γ_i dans le plan w, et peuvent être décomposées en un nombre fini d'arcs élémentaires. Dans les deux cas $\mathfrak{D}_n^i$ ne comprend qu'un nombre fini de zéros de $f(z)$ et peut être décomposé en un nombre fini de cellules d'univalence dans chacune desquelles $f(z)$ prend toutes les valeurs couvrant δ_n^i. Chacune de ces cellules a pour frontière un arc élémentaire de la frontière de $\mathfrak{D}_n^i$. Dans le

cas où $\mathfrak{D}_n$ est de connexion multiple, soit Γ_n^{*i} une des courbes intérieures, obtenue par prolongement suivant γ_n^i de $\mathcal{E}(A_n^i, a_n^{*i})$. Prolongeons cet élément de toutes les façons possibles à l'extérieur de γ_n^i. On peut renouveler pour le domaine $\mathfrak{D}_n^i$ (obtenu ainsi à l'intérieur de Γ_n^{*i} tout ce qui a été dit pour $\mathfrak{D}_n^i$). On décompose $\mathfrak{D}_n^i$ en cellules d'univalence et l'on rassemble en un même domaine d'univalence deux cellules, l'une intérieure, l'autre extérieure à Γ_n^{*i}, ayant en commun un arc élémentaire de Γ_n^{*i}. Ces domaines complets d'univalence sont complètement intérieurs à Γ_n^i et de ce fait sont en nombre fini ; même en considérant tous ceux que l'on peut constituer à partir de toutes les courbes intérieures à Γ_n^i, images de γ_n^i. Nous appellerons *réduction* de l'enclave finie Γ_n^i, l'opération qui a consisté à décomposer l'intérieur de Γ_n^i en domaines complets d'univalence, et en cellules à valeurs couvrant δ_n^i, ces dernières admettant chacune un arc élémentaire de Γ_n^i comme arc frontière.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Soit* $z_0 \in \dot{C}$. *Si* $w_0 = f(z_0) \notin \mathfrak{T}^*(\delta_n^i)$ (1) *on sait déterminer le domaine d'univalence de* $f(z)$ *auquel* z_0 *est intérieur, ou les domaines* (*en nombre fini*) *dont il est point frontière.*

Soit $z_0 \in \dot{C}$ avec $w_0 = f(z_0) \in \bar{\mathfrak{T}}$, mais tel que les diamètres des δ_n^i qui contiennent w_0, décroissent vers zéro. Convenons que dans la méthode générale de construction des domaines d'univalence, nous réduisons les enclaves finies Γ_n^i toutes les fois que cela est possible. Soit $\mathcal{E}(w_0, z_0)$ l'élément de $\varphi(w)$ correspondant à z_0 : c'est un élément à un ou plusieurs feuillets qui se projette sur un disque E_0 du plan w; il existe un $\delta_n^i \subset E_0$ avec $w_0 \in \delta_n^i$ et $A_n^i \in E_0$. L'élément $\mathcal{E}(A_n^i a_n^i)$ prolongement immédiat de $\mathcal{E}(w_0, z_0)$, prolongé suivant γ_n^i engendre dans le plan z une courbe fermée Γ_n^i. Dans la suite des δ_n^i ($m = n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$), soit $\delta_{m_0}^{i_0}$ celui d'indice le plus faible, tel qu'un élément $\mathcal{E}(A_{m_0}^{i_0}, a_{m_0}^{i_0})$ prolongé suivant $\gamma_{m_0}^{i_0}$ engendre, dans le plan z une courbe fermée $\Gamma_{m_0}^{i_0}$ contenant z_0. La réduction de l'enclave finie correspondante permet de déterminer le ou les domaines d'univalence de $f(z)$ auxquels appartient z_0 soit comme point intérieur, soit comme point frontière.

6. — Voisinage d'un point transcendant isolé.

Si ω est transcendant isolé, il existe $\delta_n^\omega \ni \omega$, de diamètre arbitrairement petit, et $\mathcal{E}(A_n^\omega, a_n^\omega)$ — où A_n^ω est un point du contour de δ_n^ω — qui, prolongé dans δ_n^ω de toutes les façons possibles, lui fait correspondre un domaine Δ_n^ω non fermé, c'est-à-dire admettant des points de la circonférence C, comme points frontières, sans que ce prolongement soit arrêté par d'autres points transcendants

(1) Nous notons $\mathfrak{T}^*(\delta_n^i)$ l'ensemble des points de $\mathfrak{T}$ pour lesquels la suite des δ_n^i (satisfaisant aux conditions du paragraphe A.2) qui les contiennent, n'ont pas des diamètres qui tendent vers zéro.

que ω, ou que les projections des points algébriques rencontrés s'accumulent en un autre point que ω.

a. Si δ_n^ω ne renferme aucun point critique, Δ_n^ω est alors limité par un seul contour. Joignons A_n^ω au point ω, et dans le plan z, prolongeons tous les éléments $\mathcal{E}(A_n^\omega, a_n^{\omega,i})$ tels que $a_n^{\omega,i}$ appartienne au contour de Δ_n^ω, suivant (A_n^ω, ω). On a ainsi séparé Δ_n^ω en cellules d'univalence à valeurs couvrant δ_n^ω, chaque cellule admettant un arc élémentaire du contour de Δ_n^ω pour arc frontière.

b. Si δ_n^ω renferme un nombre fini de points critiques, on peut, en réduisant le diamètre de δ_n^ω, construire un δ_m^ω-correspondant au cas précédent.

c. Si δ_n^ω renferme une infinité de points critiques, construisons dans δ_n^ω une famille de courbes $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$ joignant ω à A_n^ω, et soit encore (ω, A_n^ω) la $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$ à double détermination. Supposons que les prolongements de tous les $\mathcal{E}(A_n^\omega, a_n^{\omega,i})$ suivant (A_n^ω, ω) conduisent à des éléments réguliers en ω. On effectue alors le prolongement de chaque élément obtenu en ω suivant la famille des $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$. Les cellules d'univalence obtenues dans Δ_n^ω sont limitées par un nombre fini de courbes correspondant à des « rayons exceptionnels » joignant des points algébriques à A_n^ω.

Remarques. — 1. Dans le cas où f est méromorphe, on reconnaît dans les cas *a* et *b*, les points directement critiques de première espèce ; dans le cas *c*, les points indirectement critiques, où les rayons du cercle de centre ω considérés par Iversen (¹) sont remplacés par la famille des courbes $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$.

2. Dans les trois cas ci-dessus on dira qu'on a *réduit* l'enclave infinie Δ_n^ω. La méthode utilisée est bien la méthode générale où l'on a considéré dès le début une courbe $(A_n^\omega \omega)$ au lieu de considérer une suite d'arcs $(O_n' A_{n-1}^{i_1} O_{n-1}')$ dont l'ensemble constitue une courbe joignant A_n^ω à ω.

B. — Surface de Riemann de type parabolique.

L'existence de fonctions méromorphes $w = f(z)$ pour lesquelles toute valeur w est point transcendant pour la fonction inverse $z = \varphi(w)$ montre que même pour des surfaces de Riemann de type parabolique, il peut ne pas exister de suites de domaines δ' de diamètres tendant vers zéro et enfermant $\overline{\infty}$.

1. — Conséquence du théorème de Gross.

Soit $\mathcal{F}$ la famille dénombrable des éléments réguliers de $\varphi(w)$, dont les centres sont à coordonnées rationnelles. D'après le théorème de Gross [sous la

(¹) *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*. Thèse. Helsingfors. 1914.

forme donnée par R. Nevanlinna (¹)], si $\mathcal{E}(w_0, z_0)$ est un élément régulier de $\varphi(w)$, il est prolongeable jusqu'à $w = \infty$, sur presque tous les rayons issus de w_0 ; donc dans tout angle $\theta < \arg(w - w_0) < \theta''$, il existe une demi-droite $\arg(w - w) = \theta$, $(\theta' < \theta < \theta'')$ suivant laquelle $\mathcal{E}(w_0, z_0)$ est prolongeable jusqu'à $w = \infty$. Rangeons les éléments de $\mathcal{F}$ en une suite $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ de centres $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$. Soit C_0 un domaine convexe borné fermé du plan w : si $w_1 \in C_0$, et si E_1' désigne un cercle de rayon inférieur à celui du cercle de convergence de $\mathcal{E}_1$, le domaine $C_1 = C_0 \cap E_1'$ est un domaine convexe borné fermé dans lequel $\mathcal{E}_1$ est prolongeable radialement. Si $w_1 \notin C_0$, il existe dans l'angle que font les deux « tangentes » issues de w_1 à C_0 une demi-droite suivant laquelle le prolongement de $\mathcal{E}_1$ est possible jusqu'à $w = \infty$. On peut alors déterminer un angle A_1 de sommet w_1, d'ouverture $\alpha_1 > 0$, contenant Δ_1 à son intérieur, dans lequel le prolongement radial de $\mathcal{E}_1$ est possible jusque dans $C_1 = C_0 \cap A_1$; le prolongement de $\mathcal{E}_1$ étant supposé possible suivant les demi-droites extrêmes de A_1, C_1 est convexe, borné, fermé. C_1 et $\mathcal{E}_2$ jouant alors le rôle que jouaient C_0 et $\mathcal{E}_1$, on peut définir un nouveau domaine C_2 convexe borné fermé dans lequel $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont prolongeables radialement. On obtiendra ainsi une suite de domaines convexes, dont aucun ne se réduit à sa frontière, ordonnés par inclusion

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots.$$

qui ont au moins un point commun Ω.

Théorème. — *Tout élément $\mathcal{E}_i \in \mathcal{F}$ est prolongeable radialement jusqu'au point Ω inclusivement et y définit un élément $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$, (distincts ou non)* (²).

2. — Étoile d'holomorphie $E^*(\Omega, \omega)$ de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$.

1° Les secteurs S. — Désignons par $[\theta]$ la demi-droite $\arg(w - \Omega) = \theta$. Supposons $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$, prolongeable suivant $[\theta_0]$ jusqu'à $|\omega - \Omega| = R$ inclusivement. Ce prolongement est possible en utilisant seulement un nombre fini d'éléments dont l'ensemble forme une chaîne $\mathcal{C}(\theta_0)$. Soient $[\theta_1]$ et $[\theta_1']$ $(\theta_1' < \theta_0 < \theta_1)$ les deux rayons dont tous les points sauf un nombre fini, $\in \mathcal{C}(\theta_0)$. Soient A_1 et A_1' les points d'intersection de $[\theta_1]$ et $[\theta_1']$ avec $|\omega - \Omega| = R$.

I. Supposons $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ non prolongeable suivant $[\theta_1]$ jusqu'en A_1 :

α. Si la première singularité rencontrée sur $[\theta_1]$ à partir de Ω est algébrique, on introduit l'élément algébrique d'ordre k correspondant et l'on prolonge suivant $[\theta_1]$ la branche dont l'image dans le plan z fait $+\frac{\pi}{k}$ avec la branche

(¹) *Eindentige Analytische funktionen*, Springer, 1936.

(²) Shimizu utilise un tel point Ω, mais n'en démontre pas l'existence : *On the fundamental domains* (*Jap. Journ. math.*, VIII, 1931, p. 175-304).

d'arrivée (s'il s'agit du rayon $[\theta_1']$ on remplace $+\frac{\pi}{k}$ par $-\frac{\pi}{k}$). On dira que l'on a *contourné* le point algébrique dans le secteur $[\theta_1 - \theta_0]$.

3. Supposons que par prolongement suivant $[\theta_1]$, après avoir éventuellement contourné les points algébriques dans $[\theta_1 - \theta_0]$, on rencontre un point transcendant T. On peut construire un segment PQ ∋ T, morceau de $[\theta_1]$ dont tous les points sauf T, sont intérieurs à $\mathcal{C}(\theta_0)$; construisons un lacet L, intérieur à $\mathcal{C}(\theta_0)$ joignant P à Q; l'élément $\mathcal{E}(P, p)$ obtenu par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ définit par prolongement suivant L un élément $\mathcal{E}(Q, q)$. Aux prolongements de $\mathcal{E}(P, p)$ et $\mathcal{E}(Q, q)$ suivant $[\theta_1]$ jusqu'en T (exclusivement) correspondent deux arcs infinis *pt*, *qt* (*t* à l'infini), qui avec l'arc $\widehat{pq}$ image de L, limitent une langue image conforme biunivoque de la portion du plan w com-

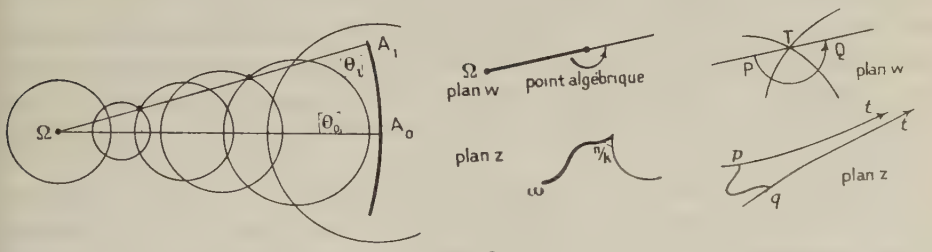


Fig. 26.

prise entre L et le segment PQ de $[\theta_1]$. Nous disons que les deux arcs *pt* et *qt* se raccordent en *t*.

La portion de $[\theta_1]$ comprise entre Ω et le premier point singulier (algébrique transcendant), sera un segment Γ et l'arc issu de ω qui lui correspond (fini ou infini) sera un arc γ. L'image dans le plan z du secteur $[\theta_1 - \theta_0]$ est un domaine limité par :

— une courbe finie image de la portion de $[\theta_0]$ vérifiant $|w - \Omega| \leq R$;

— un arc $\widehat{\alpha_0\alpha_1}$ image de l'arc $\widehat{A_0A_1}$ de $|w - \Omega| = R$ ($\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$);

— une courbe γ issue de ω aboutissant en c [c à l'infini ou bien $f'(c) = 0$];

— un nombre fini d'arcs finis ou infinis, se raccordant entre eux et à l'extrémité de γ (à l'infini ou en des points annulant f').

II. Supposons le prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ possible suivant $[\theta_1]$ jusqu'en A_1 inclusivement. On peut alors construire $[\theta_2]$ à partir de $[\theta_1]$ comme $[\theta_1]$ à partir de $[\theta_0]$. Il se peut que $[\theta_2]$ soit de l'espèce étudiée au paragraphe I, sinon on définira $[\theta_3]$ à partir de $[\theta_2]$, et ainsi de suite. Supposons qu'aucun $[\theta_n]$ ne rentre dans le cas I. Alors si R est supérieur au rayon de convergence de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$, les $[\theta_n]$ tendent vers une position limite $[\Theta]$. Le prolongement de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ est holomorphe dans le secteur (ouvert) $[\Theta - \theta_0]$ et sur $[\theta_0]$. Prolon-

geons $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ suivant $[\Theta]$; si la première singularité rencontrée est algébrique, on définit dans le plan z, l'arc γ joignant ω à un point à distance finie où $f'(z) = 0$. Si la première singularité rencontrée est transcendante, l'arc γ est infini.

Considérons un élément $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ dans $[\Theta - \theta_0]$ obtenu par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$. Le prolongement radial de $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ montre que les singularités rencontrées sur $[\Theta]$ par ce prolongement forment un ensemble fermé de mesure nulle. Ces singularités sont évidemment les mêmes pour le prolongement radial de tout élément centré dans $[\Theta - \theta_0]$ et obtenu lui-même par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$. Sur tout intervalle de $[\Theta]$ si petit soit-il, il existe un élément régulier $\mathcal{E}(u, \zeta)$ qui peut se déduire par prolongement radial de $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$. Prolongeons $\mathcal{E}(u, \zeta)$ suivant $[\Theta]$ vers Ω et vers A, en contournant s'il y a lieu les points critiques dans $[\Theta - 0]$; ce prolongement ne sera donc arrêté que par des points transcendants. Partageons ΩA en intervalles de longueur $\frac{R}{2^n}$; dans chacun de ces intervalles il existe au moins un $\mathcal{E}(u_i, \zeta_i)$ que nous prolongeons vers Ω et vers A suivant $[\Theta]$; nous obtenons ainsi dans le plan z, outre l'arc γ déjà construit qui peut se prolonger par d'autres arcs dont l'un s'éloigne à l'infini, un un nombre fini de courbes allant de l'infini à l'infini, images de segments de $[\Theta]$.

α. Il se peut que pour une valeur de n, tout point de $[\Theta]$ ait été atteint inclusivement ou exclusivement. Il est alors impossible de prolonger $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ à travers $[\Theta]$ sans traverser l'une au moins des courbes déjà tracées dans le plan z : tout prolongement de $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ à travers $[\Theta]$ traverse ce rayon en un point régulier qui a donc été atteint inclusivement par le prolongement suivant $[\Theta]$ d'un au moins $\mathcal{E}(u_i, \zeta_i)$.

β. Dans le cas contraire, on peut affirmer qu'il n'existe plus sur $[\Theta]$ d'intervalles supérieurs à $\frac{R}{2^{n-1}}$ ne contenant aucun point atteint par le prolongement suivant $[\Theta]$, des $\mathcal{E}(u_i, \zeta_i)$. On divisera alors ΩA en intervalles $\frac{R}{2^{n-1}}$ et on introduira un $\mathcal{E}(u_j, \zeta_j)$ dans chacun des nouveaux intervalles où il n'y a pas de point atteint par les prolongements de l'opération précédente. On poursuivra la division indéfiniment et l'on obtient à la limite dans le plan z une infinité dénombrable de courbes allant de l'infini à l'infini. Tout prolongement de $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ qui peut se faire en traversant $[\Theta]$, traverse $[\Theta]$ en un point régulier dont le cercle de convergence couvrirait une portion de $[\Theta]$, supérieure à $\frac{R}{2^p}$ et nous avons vu qu'il n'y a pas, après la $(p+2)^{\text{ième}}$ opération, d'intervalle supérieur à $\frac{R}{2^{n+1}}$ où ne pénètre pas le prolongement d'un $\mathcal{E}(u, \zeta)$. Il est donc impossible de prolonger $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ à travers $[\Theta]$ sans traverser l'une au moins des courbes tracées dans le plan z comme images d'une famille dénombrable de segments de $[\Theta]$,

Si l'on remarque qu'on a considéré les prolongements radiaux de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ dans $|w-\Omega| \leq R$, on constate que l'image de l'arc A_0A de $|w-\Omega| = R$, se compose d'un seul arc issu de α_0, et aboutissant soit en $\alpha (f(\alpha) = A)$, soit à l'infini.

Si l'on opère de la même façon, à partir de $[\Theta_0]$ vers les θ décroissants, on limite dans $|w-\Omega| \leq R$ un secteur $[\Theta - \Theta']$ que nous appellerons secteur S, ou secteur d'holomorphie pour $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$. Il correspond dans le plan z, au secteur S, un domaine s limité par F_s :

F_s { deux courbes γ issues de ω ;
un arc ρ, $\rho(\Theta - \Theta')$, image de l'arc $A'A$ de $|w-\Omega| = R$;
des arcs h, formant au plus une infinité dénombrable, images d'intervalles sur les rayons $[\Theta]$ et $[\Theta']$.

Puisque le prolongement de tout élément $\mathcal{E}(w_1, z_1)$ obtenu par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ ne peut se faire à l'extérieur de S sans que le point z traverse une courbe de la famille F_s, on déduit que s est un domaine d'univalence pour $f(z)$ à valeurs couvrant S.

2° Exhaustion du cercle $|w-\Omega| \leq R$. — Partageons le cercle $|w-\Omega| \leq R$ en secteurs $\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_{2n}$ d'ouverture $\frac{\pi}{2^n}$. Dans chacun de ces secteurs il existe au moins un rayon suivant lequel on peut prolonger $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ jusqu'à $|w-\Omega| \leq R$ inclusivement. Faisant jouer à ce rayon le rôle de $[\theta_0]$ de la première partie, on définit à partir de lui un secteur S, auquel correspond dans le plan z un domaine s. Si deux domaines s ont un point commun ils sont identiques.

α. Il se peut que pour une valeur de n les secteurs S recouvrent entièrement $|w-\Omega| \leq R$. On reconnaît alors que les rayons exceptionnels de l'étoile de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ ayant leur origine à l'intérieur ou sur la frontière de $|w, \Omega| \leq R$, sont en nombre fini et l'on sait construire l'image dans le plan z, de cette étoile que nous noterons $E^R(\Omega, \omega)$. Les domaines s se raccordent suivant *les courbes* γ *que l'on supprime*.

β. Quel que soit n, les secteurs S ne recouvrent pas $|w-\Omega| \leq R$. Considérons un rayon quelconque $[\theta]$ suivant lequel $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ est prolongeable jusqu'à $|w-\Omega| = R$ inclusivement : il existe donc un secteur σ d'ouverture non nulle contenant ce rayon et intérieur lui-même à la chaine $\mathcal{C}(\theta)$. Ce secteur fait nécessairement partie d'un secteur S, puisque après la $n^{\text{ième}}$ opération il n'y a plus d'angle supérieur à $\frac{\pi}{2^{n-1}}$ dans lequel ne pénètre au moins un secteur S ; si $2^{n-1} > \pi$/ouverture de σ, le secteur σ est tout entier dans un secteur S. Considérons alors dans le plan z, l'ensemble dénombrable des domaines s et introduisons toutes les courbes limites des systèmes F_s, en désignant spécialement par λ^*

les courbes limites de suites de courbes γ : λ^* est formée d'un ou plusieurs arcs distincts, dont l'un est issu de ω, et a pour image dans le plan w, un segment de rayon $[\Theta]$, Λ^*, issu de Ω, le rayon $[\Theta]$ étant limite de rayons exceptionnels; λ^* n'a pas d'autre extrémité à distance finie (excluons le cas où cette extrémité serait celle d'un arc dont les deux bords seraient plages d'accumulation de courbes γ; cette éventualité ne peut en effet se présenter puisque $f(z)$ est holomorphe et que l'image de λ^* est un segment de $[\Theta]$); une extrémité de λ^* ne peut être que point d'accumulation d'extrémités des courbes γ, donc de points qui sont des zéros de $f'(z)$ et qui, par conséquent, ne peuvent s'accumuler à distance finie. L'arc de λ^* issu de ω est un arc infini et les autres arcs de la même courbe λ^* vont de l'infini à l'infini. Appelons λ l'arc de λ^* issu de ω et se terminant au premier point où $f'(z) = 0$, ou joignant ω à l'infini si $f'(z) \neq 0$ sur λ^*. Soit Λ l'image de λ.

3° Courbes γ et courbes λ. — Si $\omega_0 = f(z_0) \in \Gamma$ ou Λ, $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ est prolongeable radialement jusqu'à w_0. Inversement si $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ est prolongeable radialement jusqu'à w_0, w_0 est soit intérieur à un secteur S soit sur une Γ ou une Λ : supposons que w_0 n'appartienne pas à un secteur S, c'est que $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ n'est pas prolongeable jusqu'à $|\omega - \Omega| = R$, suivant le rayon $[\theta]$ qui passe par w_0. Dans tout angle $(\theta, \theta + \alpha)$, il existe un rayon prolongeable jusqu'à $|w - \Omega| = R$, qui appartient donc à un secteur S auquel n'appartient pas $[\theta]$. C'est donc que $[\theta]$ est soit frontière pour un secteur S, et alors $w \in \Gamma$, ou bien il existe des rayons exceptionnels, donc des Γ dans tout angle $(\theta, \theta + \alpha)$ pour si petit que soit α. Les courbes Γ s'accumulent suivant une portion Λ^* de $[\theta]$: $w_0 \in \Lambda^*$, sinon les extrémités des Γ s'accumuleraient en un point de $[\theta]$ situé entre Ω et w_0 et le prolongement de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ ne serait pas possible jusqu'à w_0, donc $w_0 \in \Lambda$. Comme $[\theta]$ peut être limite de rayons par valeurs supérieures ou inférieures, il se pourrait que certains arcs de λ soient aussi des arcs γ. La propriété ci-dessus montre donc que cela ne peut arriver que pour un arc de λ. Les courbes λ et γ forment donc une famille telle qu'aucune de ses courbes ne peut être d'une autre espèce parmi celles qui ont été définies.

4° Formation de $E^R(\Omega, \omega)$. — *Supprimons dans le plan z toutes les courbes γ et λ.* Soient $\mathcal{G}$ le système des courbes restantes, $\mathcal{E}(w_0\ z_0)$ un élément ($|w_0 - \Omega_1 < R$), accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\omega_0, z_0)$; soit z_1 reliable à z_0 par une courbe ne coupant aucun arc de $\mathcal{G}$. Soient l cette courbe, L son image dans le plan w. S'il existe sur l un point z_2, tel que $\mathcal{E}(w_2, z_2)$ ne soit pas accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$, il existe un point ζ, tel que tous les points de l'arc (z_0, ζ) de l, correspondent à des éléments accessibles par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$, et que cette propriété ne soit plus vraie pour tout autre point ζ' au delà de ζ sur l (en partant de z_0). ζ ainsi défini ne peut correspondre à un élément accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$,

sinon il en serait de même pour tous les points voisins, sur l, sauf si $|f(\zeta)-\Omega|=R$; supposons que $|f(\zeta)-\Omega|=R$, l'élément $\mathcal{E}(f(\zeta),\zeta)$ régulier ou algébrique, est accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega,\omega)$; si $[\theta]$ désigne le rayon passant par $f(\zeta)$, $[\theta]$ ne peut être rayon limite de rayons exceptionnels, ni par valeurs supérieures de θ, ni par valeurs inférieures, il en résulte que $[\theta]$ est soit un rayon intérieur à un secteur S, soit un segment Γ commun à deux secteurs S (si $f'(\zeta)=0$; dans le premier cas ζ est sur une courbe ρ d'un système F_s (donc sur une courbe de $\mathcal{G}$); dans le deuxième cas ζ est l'extrémité commune de deux courbes ρ de deux systèmes F_s, $F_{s'}$ (et dans ce cas encore ζ est sur une courbe de $\mathcal{G}$); l couperait $\mathcal{G}$, ce qui est exclu. Supposons donc que $\mathcal{E}(f(\zeta),\zeta)$ ne soit pas accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega,\omega)$. Les points précédant ζ sur l, sont soit intérieurs à des domaines s, soit sur des courbes γ ou λ. Si ζ est limite de points situés sur des courbes γ, ζ est sur une λ^* sans être sur l'arc λ correspondant, donc ζ serait sur une courbe de $\mathcal{G}$. Si dans un voisinage suffisamment petit de ζ avant ζ, sur l, il n'y a pas de point sur des γ, c'est que tous ses points sont intérieurs au même domaine s. $\zeta\notin\bar{s}$ et l'on ne peut prolonger un élément intérieur à S sans que le point z correspondant traverse une courbe de F_s, donc ζ est sur une courbe ρ (ou h), c'est-à-dire sur une courbe de $\mathcal{G}$.

Tout point reliable à ω par une courbe ne coupant pas $\mathcal{G}$, correspond à un élément accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega,\omega)$, dans $|w-\Omega|<R$, et inversement (sauf s'il s'agit de points dont l'image est sur $|w-\Omega|=R$). *$\mathcal{G}$ limite donc une région ∂^R du plan z qui est un domaine d'univalence à valeur couvrant un domaine* $E^R(\Omega,\omega)$.

5° Formation de $E^*(\Omega,\omega)$. — Soient ∂^R et $\partial^{R'}$ deux domaines images de $E^R(\Omega,\omega)$ et $E^{R'}(\Omega,\omega)$ avec $R'>R$: *Si* $P\in\bar{\partial}^R$, $P\in\bar{\partial}^{R'}$: $P\in\bar{\partial}^R$ correspond à un élément accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega,\omega)$, c'est donc que $P\in\bar{\partial}^{R'}$, puisque son image n'est pas sur $|w-\Omega|=R'$.

Tout point frontière de ∂^R correspondant à un élément non accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega,\omega)$ est donc aussi point frontière de $\partial^{R'}$, puisqu'il ne peut être point intérieur et qu'il y a dans son voisinage des points intérieurs à ∂^R, donc à $\partial^{R'}$. (Il y a peut-être exception s'il s'agit d'un point frontière d'un arc ρ.)

Considérons alors une suite de cercles $|w-\Omega|=R_n$ où R_n croît indéfiniment. On peut construire une suite de domaines ∂^{R_n}, tels que tout point intérieur d'un ∂^{R_n} est intérieur à tous les $\partial^{R_{n'}}(n'>n)$ et tel que tout point frontière d'un ∂^{R_n}, dont l'image n'est pas sur $|w-\Omega|=R_n$, est frontière de tous les $\partial^{R_{n'}}(n'>n)$. Soit un domaine borné $|z|\leq\rho$. On peut toujours supposer que $|z|=\rho$ ne passe par aucun pôle de $f(z)$: alors $|f(z)|\leq M$ pour $|z|=\rho$. Soit ω une racine déterminée de $f(z)=\Omega$ à l'intérieur de $|z|<\rho$, et prenons dans la suite des R_n, n tel que $R_n>M$. On peut alors entourer les pôles de $f(z)$ intérieurs à $|z|<\rho$

de courbes fermées $|f(z)|=R_n$. Dans le domaine restant Δ_n, $|f(z)<R_n$; construisons le domaine $\mathring{c}^{R_n}$ relatif à ω. Nous pouvons affirmer que tout point de $\mathring{\Delta}_n$ est situé par rapport à la suite des $\mathring{c}^{R_{n'}}(n'>n)$, soit comme point intérieur, soit frontière, soit extérieur. Appelons alors $\mathring{c}$ le domaine limite des $\mathring{c}^{R_n}$, qui a pour image $E^*(\Omega, \omega)$ dans le plan w.

6° Accessibilité des points frontières de $\mathring{c}$. — $\mathring{c}$ est limité par des courbes g du système $\mathcal{G}$. Supposons qu'une famille g_i de ces courbes s'accumulent suivant une courbe g_∞ (qui est aussi par conséquent de la famille $\mathcal{G}$). Un point de g_∞ ne peut correspondre à un élément accessible par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$, car il n'y aurait pas, sur le plan w, dans un voisinage du point correspondant, de rayons exceptionnels, pas plus par conséquent que dans une image conforme biunivoque obtenue dans le plan z. L'image de g_∞ dans le plan w est donc

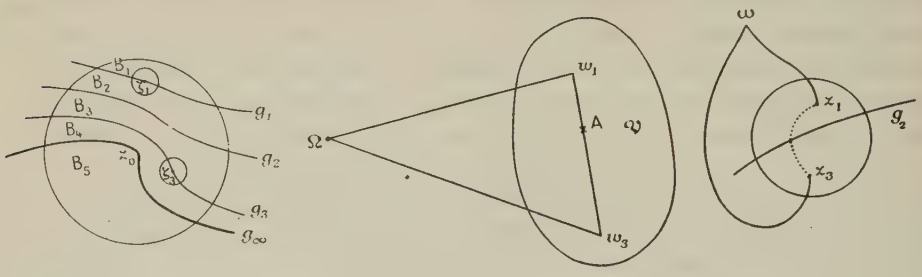


Fig. 27.

nécessairement un segment de droite $\arg(w-\Omega)=C^{te}$, sinon on serait en contradiction avec le théorème de Gross. Soit $z_0 \in g_\infty (f(z_0)\neq\infty, f'(z_0)\neq 0)$. On peut considérer un voisinage U_0 de z_0, de sorte que $\mathring{c}^{R_n}$ permette de définir $\mathring{c}$ (par ses points intérieurs et ses points frontières) à l'intérieur de U_0. Soit maintenant $\mathfrak{U}$ un cercle de centre z_0, intérieur à U_0 et assez petit pour que son image dans le plan w soit un domaine convexe $\mathfrak{V}$ (à un feuillet évidemment) : c'est toujours possible avec $f'(z_0)\neq 0$, de plus tous les cercles de centre z_0 et de rayons plus petits se représentent sur des domaines convexes. Une courbe g qui pénètre dans $\mathfrak{U}$ le partage en deux régions seulement, puisque l'image de g est un segment de droite qui partage $\mathfrak{V}$ en deux régions. Soient alors g_1, g_2, g_3 trois courbes de la famille g_i, qui pénètrent dans $\mathfrak{U}$. Ces courbes et g_∞ séparent le plan en cinq régions B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (on a pris g_1, g_2, g_3 du même côté de g_∞). De plus les courbes g_i ne peuvent se couper, en raison de leur image sur le plan w. Soient dans $\mathfrak{U}$, $\zeta_1 \in g_1$ et $\zeta_3 \in g_3$ et des voisinages u_1 et u_3 de ζ_1 et ζ_3 respectivement : u_1 ne pénétrant que dans les régions B_1 et B_2, u_3 dans B_3 et B_4. Dans u_1 il existe $z_1 \in \mathring{c}$ et dans u_3, $z_3 \in \mathring{c}$. Tout chemin joignant dans $\mathfrak{U}$, z_1 à z_3 doit nécessairement couper g_2. Soient $w_1=f(z_1)$, $w_3=f(z_3)$. $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ est prolongeable radialement jusqu'à w_1 et w_3 inclusivement, et $\mathcal{E}(w_1, z_1)$ est prolon-

geable jusqu'à w_3 inclusivement suivant le segment de droite $\overline{w_1 w_3}$ entièrement intérieur $\mathcal{V}$, l'élément obtenu en w_3 étant précisément $\mathcal{E}(w_3, z_3)$. L'arc $\widehat{z_1 z_3}$ image de $\overline{w_1 w_3}$ ne sort pas de $\mathcal{U}$, donc coupe g_2 en α, l'image A dans $\mathcal{V}$ (il ne peut y avoir qu'un seul point d'intersection d'après l'image dans $\mathcal{V}$). En parcourant le pourtour du triangle curviligne $\omega z_1 z_3$, on fait parcourir à w le triangle $\Omega w_1 w_2$ une seule fois, et inversement; il y a correspondance conforme biunivoque des intérieurs de ce triangle et tous les points du segment $\overline{w_1 w_3}$ peuvent être atteints par prolongement radial de $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$, ce qui est contraire au fait que $\mathcal{E}(A, \alpha)$ n'est pas accessible par un tel prolongement.

Les courbes du système $\mathcal{G}$ ne s'accumulent pas à distance finie. Tous les points frontière de δ sont accessibles par l'intérieur.

Remarque. — Au 2° on a introduit toutes les courbes limites des systèmes Γ, ce qui n'a donc introduit en fait que des courbes λ^*, puisque les autres courbes frontières des domaines s sont des courbes de $\mathcal{G}$ qui ne s'accumulent pas à distance finie.

3. — Construction des feuillets de $\mathcal{R}$, ou des domaines d'univalence de $f(z)$.

Considérons les domaines δ_i construits dans le plan z à partir des éléments $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$ formant un ensemble dénombrable. Les δ_i sont des domaines complets d'univalence pour f et deux δ_i et δ_j ne peuvent avoir de points intérieurs communs sans être identiques. Dans toute portion du plan il pénètre au moins un domaine δ_i : soit z et un voisinage $\mathcal{U}$ assez petit pour que son image $\mathcal{V}$ dans le plan w soit à un feuillet ($f'(z) \neq 0$). $\mathcal{V}$ contient des points $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m \dots$ à coordonnées rationnelles dont les images dans le plan z sont $\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_m \dots$ dans $\mathcal{U}$. Les éléments $\mathcal{E}(\eta_m, \zeta_n)$ sont de la famille $\mathcal{F}$, donc sont prolongeables radialement jusqu'à Ω, où ils déterminent des éléments $\mathcal{E}(\Omega, \omega_k)$ à partir desquels on a construit $E^*(\Omega, \omega_k)$ ayant pour image δ_k dans le plan z. ζ_n est intérieur à δ_k. δ_i étant caractérisé par l'élément $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$, de l'étoile duquel il est l'image, peut-on déterminer à quel domaine δ_i appartient un point z du plan?

a. Si $w = f(z)$ est à coordonnées rationnelles, $\mathcal{E}(\omega, z) \in \mathcal{F}$ et $z \in \overset{\circ}{\delta}_i$ que l'on sait déterminer si $f'(z) \neq 0$. Si $f'(z) = 0$, z est frontière de plusieurs δ_i, que l'on détermine par prolongement radial jusqu'à Ω des diverses branches de $\mathcal{E}(w, z)$. On peut en effet avoir inclus dans $\mathcal{F}$ l'ensemble dénombrable des éléments $\mathcal{E}(w, z)$ algébriques à coordonnées rationnelles.

b. Si $\mathcal{E}(w, z)$ est prolongeable radialement jusqu'à Ω inclusivement, l'élément $\mathcal{E}(\Omega, \omega')$ obtenu contient des points à coordonnées rationnelles, centres d'éléments de $\mathcal{F}$ dont $\mathcal{E}(\Omega, \omega')$ est le prolongement immédiat. Donc $\mathcal{E}(\Omega, \omega')$ est de la famille $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$ et $z \in \delta_i$ relatif à ω'.

c. Supposons $\mathcal{E}(w, z)$ non prolongeable jusqu'à Ω suivant le segment $\overline{w\Omega}$. Introduisons une suite de points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ tendant vers z, dont les images $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ sont à coordonnées rationnelles. Si tous les éléments $\mathcal{E}(\eta_i, \zeta_i)$ conduisent par prolongement radial au même élément $\mathcal{E}(\Omega, \omega_j)$ [on doit prendre la suite telle que les arguments des η_n forment une suite monotone], z peut être sur la frontière d'un domaine s_j^i, donc sur la frontière d'un δ_j que l'on sait déterminer; si z n'est sur la frontière d'aucun s_j^i, comme les points ζ_i sont soit intérieurs aux s_j^i, soit sur les courbes γ communes à s_j^i et $s_i^{i'}$, soit sur des λ limites de domaines $s_j^{i_1}, s_j^{i_2}, \ldots, s_j^{i_p}, \ldots$, z est par conséquent sur une courbe λ^* qui n'est pas une λ. Dans tous ces cas z est sur la frontière de δ_j relatif à ω_j. Si les $\mathcal{E}(\eta_i, \zeta_i)$ ne conduisent jamais, à partir d'un certain rang à un élément unique, z fait partie d'une courbe limite de frontières de domaines δ_k que l'on peut déterminer. C'est le cas de *division impropre*, mis en évidence par G. Valiron dans son étude sur la fonction $w = \frac{e^z - 1}{z} + 1$ (¹).

(¹) *Journ. Math.*, t. 19, 1940. Division en feuillets d'une surface de Riemann.

SUR LES DROITES DE BOREL

DE

CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR M. YU CHIA-YUNG.

INTRODUCTION.

L'étude des fonctions entières définies par des séries de Dirichlet a son origine dans un Mémoire de M. J. F. Ritt. [9, *b*] (1), qui a introduit la notion de l'*ordre linéaire* (2). En s'appuyant sur cette notion, MM. S. Mandelbrojt et J. Gergen [6 et 5] ont établi, pour certaines fonctions entières, l'existence des *droites de Julia*, Avec la méthode de sommation qu'il [10, *d*] avait utilisée dans la recherche des directions de Borel, M. G. Valiron [10, *f*] a étudié les *droites de Borel* des fonctions entières d'ordre linéaire positif définies par certaines séries de Dirichlet absolument convergentes partout. A une telle fonction, il associe une série de Dirichlet ayant une abscisse finie de convergence absolue. Chaque sommet à distance finie de l'étoile horizontale [1, p. 184] de la série associée correspond à une droite de Borel de la fonction donnée.

Dans ce travail (3), nous traitons, avec la méthode de sommation de M. Valiron, le cas des droites de Borel des fonctions entières définies par certaines séries de Dirichlet ou leurs généralisations. Le premier Chapitre est consacré au cas des séries de Dirichlet. Nous donnons quelques relations entre les suites des exponentielles et des coefficients des séries et la classification

(1) Les numéros figurant entre crochets dans le texte renvoient à la Bibliographie placée à la fin de ce Mémoire.

(2) Nous employons ici la terminologie de M. Valiron [10, *f*].

(3) Une partie des résultats de ce Mémoire ont été résumés dans deux Notes des *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 228, 1949, p. 641-643 et p. 1833-1835.

d'après le mode de croissance linéaire des fonctions entières que ces séries définissent. Les résultats obtenus sont des extensions des théorèmes classiques. Ensuite, nous exposons les théorèmes de M. Valiron, précisons un point et donnons des applications immédiates de ces théorèmes. Nous pouvons comparer les droites de Borel d'une fonction entière et celles de ses transformées de Cramér [1, Chap. III] qui contiennent les dérivées de la fonction donnée comme cas particulier. Une opération inverse de celle de M. Valiron nous conduit à construire, correspondant à une série de Dirichlet ayant une abscisse finie de convergence absolue, des fonctions entières d'ordre linéaire positif définies par des séries absolument convergentes partout telles que chaque sommet à distance finie de l'étoile horizontale de la série donnée corresponde à une droite de Borel des fonctions associées. L'application d'une méthode de sommation de M. M. Riesz permet aussi de traiter, dans le cas de l'ordre linéaire fini positif, ce problème inverse et le problème originel.

Les transformées de Laplace-Stieltjes et les séries d'exponentielles complexes peuvent être considérées comme des généralisations des séries de Dirichlet. Dans la première partie du deuxième Chapitre, nous étudions des fonctions entières définies par des transformées de Laplace-Stieltjes qui sont très « voisines » des séries de Dirichlet. Dans ce cas spécial, presque tous les résultats du premier Chapitre s'étendent. Dans le cas des transformées générales, nous étendons également quelques théorèmes sur les singularités et une méthode de sommation des séries de Dirichlet de M. M. Riesz.

Dans la deuxième partie du deuxième Chapitre, nous traitons des séries d'exponentielles complexes. Ici, il n'est plus question d'ordre linéaire et de droites de Borel *horizontales*. Avec M. Valiron, nous introduisons l'*ordre en* e^{γ} et étudions les droites de Borel *parallèles à toute direction*. Nous associons des séries qui ne sont pas absolument convergentes partout à une fonction entière d'ordre fini positif en e^{γ} définie par une série d'exponentielles complexes absolument convergentes partout. Les singularités des séries associées fournissent des renseignements sur les droites de Borel de la fonction donnée. M. Valiron [10, *e*] a étudié cette question avec une autre méthode et a obtenu des résultats plus précis. Mais ces deux méthodes ne peuvent s'appliquer ni l'une ni l'autre à la recherche *générale* des droites de Borel d'une fonction entière d'ordre infini en e^{γ}.

En terminant, je suis heureux de remercier le Gouvernement Français qui m'a permis de travailler sous la direction de maîtres éminents. Je ne pourrai jamais exprimer suffisamment toute ma respectueuse reconnaissance à M. Valiron, qui m'a proposé le sujet de ce travail et m'a donné des conseils et des encouragements très précieux. J'adresse mes remerciements respectueux à M. Montel qui a bien voulu présenter mes Notes des *Comptes rendus* et publier cet article dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*, et à M. A. Lichnerowicz.

CHAPITRE I.

Fonctions entières définies par certaines séries de Dirichlet.

1. *Préliminaires.* — On considère une série de Dirichlet

$$(1.1)\quad F(z)=\sum_{1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},\qquad \lambda_{n+1}>\lambda_n,\qquad \lambda_1\geqq 0,\qquad \lim_{n=\infty}\lambda_n=\infty,\qquad z=x+iy,$$

où

$$(1.2)\quad \overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log n}{\lambda_n}=D<\infty.$$

Elle définit, dans son demi-plan de convergence, une fonction holomorphe. En posant $|a_n|=A_n$ et en désignant $x_c(F)$ et $x_a(F)$ l'abscisse de convergence et l'abscisse de convergence absolue, respectivement, de $F(z)$, on a les relations suivantes [5 et 10, *f*]

$$(1.3)\quad 0\leqq x_c(F)-x_a(F)\leqq D;$$

$$(1.4)\quad -D\leqq x_a(F)+\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log A_n}{\lambda_n}\leqq 0.$$

Soient $\mu(x, F)$ le maximum de $A_n e^{\lambda_n x}$ $(n=1, 2, \ldots)$, et $M(x, F)$ la borne supérieure de $|F(x+iy)|$, $-\infty<y<\infty$, où x est une constante inférieure à $x_a(F)$. M. G. Dœtsch [3] a démontré que $\log M(x, F)$ est une *fonction convexe de x*. Si $x_c(F)=\infty$, $x_a(F)=\infty$, $F(z)$ définit une *fonction entière* et l'on démontre, comme dans le cas des séries de Taylor, que $\log\mu(x, F)$ est aussi une *fonction convexe de x*.

En effet, on a

$$(1.5)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\log A_n}{\lambda_n}=-\infty.$$

Il s'ensuit que, si l'on marque les points P_n de coordonnées $(\lambda_n, -\log A_n)$, on peut, avec ces points, tracer un polygone de Newton $\pi(F)$ convexe vers le bas et laissant les points P_n au-dessus ou sur ces côtés, les sommets étant certains des points P_n. x étant fixé, le terme maximum de plus grand rang correspond à la plus grande valeur $n(x)$ pour laquelle la droite de pente x passant par $P_{n(x)}$ ne traverse pas le polynome $\pi(F)$.

Suivant la méthode de M. Valiron [10, *a*] dans le cas des séries de Taylor, on obtient

$$\log\mu(x, F)=\lambda_1\left(x-\frac{G_1}{\lambda_1}\right)\qquad \text{pour}\quad x<\frac{G_2-G_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

et

$$\log\mu(x, F)=\frac{\lambda_1 G_2-\lambda_2 G_1}{\lambda_2-\lambda_1}+\int_{\frac{G_2-G_1}{\lambda_2-\lambda_1}}^{x}\lambda_{n,x}\,dx\qquad \text{pour}\quad x\geqq\frac{G_2-G_1}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

En considérant les dérivées à droite et à gauche de $\log\mu(x, F)$, on trouve que $\log\mu(x, F)$ est une fonction convexe.

Puisque pour $x < x_a(F)$,

$$a_n e^{\lambda_n x} = \lim_{Y=\infty} \frac{1}{Y} \int_{y_0}^{Y} e^{-i\lambda_n y} F(x+iy)\, dy,$$

on a

$$A_n e^{\lambda_n x} \leqq M(x, F) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et par conséquent

$$\mu(x, F) \leqq M(x, F), \qquad x < x_a(F). \tag{1.6}$$

D'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir un entier positif $N(\varepsilon)$ tel que $\log n < \lambda_n\left(D + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ pour $n \geqq N(\varepsilon)$. Donc

$$\begin{aligned} M(x, F) &\leqq \sum_{N(\varepsilon)-1} A_n e^{\lambda_n x} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \\ &= \sum_{1} A_n e^{\lambda_n x} + \sum_{N(\varepsilon)}^{\infty} A_n e^{\lambda_n (x+D+\varepsilon)} e^{-\lambda_n (D+\varepsilon)}, \\ &< N(\varepsilon)\mu(x, F) + \mu(x+D+\varepsilon, F) \sum_{N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{D+\varepsilon}{D+\frac{\varepsilon}{2}}}}, \\ &< K\mu(x+D+\varepsilon, F), \qquad x < x_a(F), \end{aligned} \tag{1.7}$$

K étant une constante dépendant de $F(z)$ et ε.

Si $x_a(F) = \infty$, $\log \mu(x, F)$ étant convexe et indéfiniment croissante, on a

$$\log \mu(x+\eta, F) = \log \mu(x, F) + \eta p(x), \qquad \eta > 0, \qquad p(x) \to \infty,$$

et il s'ensuit que

$$M(x, F) < \mu(x+D+\varepsilon, F), \qquad \varepsilon > 0, \qquad x > x(\varepsilon). \tag{1.8}$$

Les résultats que l'on démontre dans ce numéro sont en effet ceux de M. Valiron [10, *f*].

2. *Classification des fonctions entières d'après le mode de croissance linéaire.* — Étant donné une fonction entière $\Phi(z)$, on définit $M(x, \Phi)$ comme dans le n° 1. On peut classifier les fonctions entières d'après leur mode de croissance linéaire, c'est-à-dire, d'après le mode de croissance de $M(x, \Phi)$. M. Ritt. [9, *b*] définit l'*ordre linéaire* de la fonction $\Phi(z)$ par le nombre

$$\tau = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log \log M(x, \Phi)}{x},$$

et, si $0 < \tau < \infty$, le *le type de son ordre linéaire* τ par le nombre

$$\sigma = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log M(x, \Phi)}{e^{\tau x}}.$$

On dit que la fonction $\Phi(z)$ est d'*ordre linéaire fini* ou *infini* suivant $\tau < \infty$ ou $\tau = \infty$ et qu'elle est du *type minimum, moyen* ou *maximum de son ordre*

linéaire τ suivant $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$ ou $\sigma < \infty$. La fonction $\Phi(z)$ d'ordre linéaire τ est dite *à croissance linéaire régulière* si

$$\tau = \lim_{x=\infty} \frac{\log\log M(x, \Phi)}{x};$$

la fonction $\Phi(z)$ du type σ de l'ordre linéaire τ est dite *à croissance linéaire parfaitement régulière* si

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \frac{\log M(x, \Phi)}{e^{\tau x}}.$$

D'autre part, soit $U(x)$ une fonction réelle continue définie pour x supérieur ou égal à une constante. Si, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$M(x, \Phi) > U(x - \varepsilon)$$

est vérifiée pour une suite de x tendant vers l'infini, on dit que $\Phi(z)$ est *au moins de l'ordre linéaire de* $U(x)$. Si, en outre, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$M(x, \Phi) < U(x + \varepsilon),$$

pour x assez grand, ce que l'on exprime en disant que $\Phi(z)$ est *au plus de l'ordre linéaire de* $U(x)$, on dit que $\Phi(z)$ est *de l'ordre linéaire de* $U(x)$. Si les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées dans chaque bande horizontale contenant la droite $y = y_0$, on définit de la même manière l'*ordre linéaire de* $\Phi(z)$ *sur cette droite*.

Considérons la fonction $F(z)$ définie par (1.1). Supposons dorénavant que $x_c(F) = \infty$, donc $x_a(F) = \infty$. $F(z)$ est ainsi une *fonction entière*. M. Ritt obtint un théorème analogue à celui de Liouville : *Si* $F(z)$ *n'est pas un polynome exponentiel, quel que soit le nombre positif* K, *le rapport* $M(x, F) : e^{Kx}$ *finit par dépasser tout nombre donné*. Supposons de plus que $F(z)$ ne soit pas un polynome exponentiel. Comme dans le cas des séries de Taylor, on peut étudier la relation entre $M(x, F)$ et les suites $\{a_n\}$ et $\{\lambda_n\}$. On a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2.1 (1). — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $F(z)$ *soit d'ordre linéaire* τ *est que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log A_n}{\lambda_n \log \lambda_n} = -\frac{1}{\tau} \tag{2.1}$$

$\left(-\frac{1}{\tau} = -\infty \text{ si } \tau = 0 \text{ et } -\frac{1}{\tau} = 0 \text{ si } \tau = \infty\right)$.

Démonstration. — Supposons d'abord $0 < \tau < \infty$. Je dis que la condition est suffisante. Par hypothèse, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} < \left(\frac{e(\tau + \varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau + \varepsilon}} \tag{2.2}$$

(1) Ce théorème est dû à M. Ritt, mais son énoncé a été publié avec une faute d'impression.

à partir d'un certain indice n_0, et d'autre part,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} > \left(\frac{e(\tau-\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau-\varepsilon}} \tag{2.3}$$

pour une suite indéfiniment croissante d'indices $n_1, n_2, \ldots$.

μ et ϱ étant des nombres positifs, on considère l'expression

$$\left[\frac{e^{x}}{(\mu x)^{\frac{1}{\varrho}}}\right]^{x} \qquad (x>0),$$

comme fonction de x, qui atteint son maximum pour

$$x = \frac{e^{\varrho}}{\mu e},$$

d'où

$$x = \frac{1}{\varrho}\log x\mu e.$$

On voit que ce maximum est égal à

$$\exp\left[\frac{e^{\varrho x}}{\mu e \varrho}\right].$$

En vertu de (2.3) et en faisant $\varrho = \tau-\varepsilon$ et $\mu = \frac{1}{e(\tau-\varepsilon)}$, on obtient

$$M(x, F) > \exp\left[e^{(\tau-\varepsilon)x}\right] \tag{2.4}$$

pour

$$x = x_p = \frac{1}{\tau-\varepsilon}\log\frac{\lambda_{n_p}}{\tau-\varepsilon} \qquad (p=1, 2, \ldots).$$

D'autre part, la série

$$\Sigma e^{-\lambda_n(D-k)} \qquad (k=\text{const.}>0,\ n=1, 2, \ldots)$$

est convergente. En outre, on a

$$\frac{e^{x}}{(\mu\lambda_n)^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}} < e^{-D-k} \qquad (\varepsilon>0) \tag{2.5}$$

dès que $\lambda_n > \left(\frac{1}{\mu}\right)e^{\tau+\varepsilon}(x+D+k)$; (1.2) entraîne que $n < e^{(D+\varepsilon)\lambda_n}$ dès que n est assez grand. Donc si x est assez grand, (2.5) est vérifiée dès que

$$n > \exp\left[\frac{D-\varepsilon}{\mu}e^{\tau+\varepsilon}(x+D-k)\right].$$

En tenant compte de (2.2), on aura

$$\begin{aligned} M(x, F) &< \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \sum_{n_0}^{\infty}\left[\frac{e^{x}}{(\mu\lambda_n)^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}}\right]^{\lambda_n}, \qquad \mu = \frac{1}{e(\tau+\varepsilon)}, \\ &< K + \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\left[(D-\varepsilon)(\tau+\varepsilon)e^{(\tau+\varepsilon)(x+D+k+1)}\right]\exp\left[e^{\tau+\varepsilon}x\right] \\ &= K + \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\left\{\left[(D+\varepsilon)(\tau+\varepsilon)e^{(\tau+\varepsilon)(D+k)+1}+1\right]e^{(\tau+\varepsilon)x}\right\}, \end{aligned}$$

où K est une constante dépendant de k. Il en résulte que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$M(x, F) < \exp[e^{\tau+\varepsilon)x}], \tag{2.6}$$

pourvu que x soit assez grand. Donc la condition est suffisante.

On voit facilement que la condition est également nécessaire et que la condition reste vraie dans le cas où $\tau = 0$ ou $\tau = \infty$.

THÉORÈME 2.2. — *Si* $F(z)$ *est du type* σ *de l'ordre linéaire fini* $\tau > 0$, *on a*

$$\alpha \leq \sigma \leq (\tau D e^{\tau D - 1} + 1)\alpha, \tag{2.7}$$

où

$$\alpha = \overline{\lim_{n=\infty}} \left(\frac{\lambda_n}{\tau e}\right)\left(\sqrt[\lambda_n]{A_n}\right)^{\tau}.$$

Démonstration. — On suppose d'abord $0 < \sigma < \infty$. Par hypothèse, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} < \left(\frac{\tau e \alpha (1+\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

à partir d'un certain indice n_0 et d'autre part

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} > \left(\frac{\tau e \alpha (1-\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

pour une suite indéfiniment croissante d'indices $n_1, n_2, \ldots$. Comme dans la démonstration du théorème précédent, on trouve que

$$M(x, F) > \exp[(1-\varepsilon)\alpha e^{\tau x}],$$

pour

$$x = x_p = \frac{1}{\tau} \log \frac{\lambda_{n_p}}{\tau \alpha (1-\varepsilon)} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Donc $\alpha \leq \sigma$. D'autre part, si x est assez grand, on a

$$M(x, F) < K' + \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp[\tau \alpha (D+\varepsilon)(1+\varepsilon) e^{\tau x + (D+k+1)}] \exp[\alpha (1+\varepsilon) e^{\tau x}]$$

$$= K' + \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\{[\tau (D-\varepsilon) e^{\tau D + k + 1} - 1]\alpha (1+\varepsilon) e^{\tau x}\} \qquad (k > 0),$$

où K' est une constante dépendant de k. Donc

$$M(x, F) < \exp\{[\tau (D+\varepsilon) e^{\tau (D+k)+1} + 1]\alpha (1+2\varepsilon) e^{\tau x}\},$$

dès que $x > x_0(\varepsilon, k)$. En faisant tendre vers zéro ε et k, il s'ensuit que $\sigma \leq (\tau D e^{\tau D+1} + 1)\alpha$. En examinant la démonstration, on voit que ce théorème reste vrai dans le cas où $\alpha = 0$ ou $\alpha = \infty$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent :

COROLLAIRE 2.1. — *Si* D = 0, *la condition nécessaire et suffisante pour que* F(*z*) *soit du type* σ *de l'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *est que*

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\tau e}\right) \left(\sqrt[\lambda_n]{A_n}\right)^{\tau} = \sigma. \tag{2.8}$$

THÉORÈME 2.3. — *Si* D = 0, *la condition nécessaire est suffisante pour que* F(*z*) *du type* σ *de l'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *soit à croissance linéaire parfaitement régulière est que la condition* (2.8) *étant réalisée, on puisse trouver une suite d'indices* n_p *telle que*

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{\lambda_{n_p}}{\tau e}\right) \left(\sqrt[\lambda_{n_p}]{A_{n_p}}\right)^{\tau} = \sigma, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}} = 1. \tag{2.9}$$

Démonstration. — Nous utilisons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème précédent. Supposons $0 < \sigma < \infty$. Démontrons que la condition est suffisante. Soit $x_p \leqq x \leqq x_{p+1}$, en posant

$$x = x_p = \frac{1}{\tau} \log \frac{\lambda_{n_p}}{\tau\sigma(1-\varepsilon)} \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

Nous aurons

$$M(x, F) \geqq M(x_p, F) > \exp\left[(1-\varepsilon)\sigma e^{\tau x_p}\right].$$

Or, la condition (2.9) entraîne que

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{e^{\tau x_{p+1}}}{e^{\tau x_p}}\right] = 1.$$

Nous trouvons ainsi, pour x assez grand,

$$M(x, F) > \exp\left[(1-\varepsilon)^2 \sigma e^{\tau x}\right].$$

En achevant la démonstration comme celle du théorème précédent, il est ainsi prouvé que la condition est suffisante.

Démontrons que la condition est nécessaire. Sinon, il existerait deux nombres positifs, β et γ, tels que l'on ait

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} < \left(\frac{\tau e \sigma (1-\beta)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

pour une infinité d'intervalles $\lambda_{n'_\nu} < \lambda_{n_\nu} < \lambda_{n''_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), extérieurs les uns aux autres et satisfaisant à la condition $\lambda_{n''_\nu} > (1+\gamma)\lambda_{n'_\nu}$. Choisissons convenablement le nombre $\varepsilon > 0$ et partageons les termes de la série en quatre groupes, correspondant respectivement aux valeurs suivantes de l'indice n :

$$n < n_0, \qquad n_0 \leqq n \leqq n'_\nu, \qquad n'_\nu < n < n''_\nu, \qquad n''_\nu \leqq n.$$

La somme $\Sigma A_n e^{\lambda_n x} (n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1)$ n'aura pas d'influence sur le résultat. Suivant la démonstration du théorème précédent, on voit que la valeur absolue de la somme des termes du troisième groupe est inférieure ou égale à

$$\exp\left\{(1+2\varepsilon)\left[(1-\beta)\sigma + 2\varepsilon\right] e^{\tau x}\right\}.$$

Pour les deux autres groupes, on a

$$A_n e^{\lambda_n x} < \left[\left(\frac{\tau e \sigma (1+\varepsilon)}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{\tau}} e^x \right]^{\lambda_n} = \exp\left[\frac{\lambda_n}{\tau} \left(1 - \log \frac{\lambda_n}{\delta} \right) \right],$$

où δ désigne la valeur de λ_n, $\delta = \tau\sigma(1+\varepsilon)e^{\tau x}$, pour laquelle l'expression en question atteint son maximum. Déterminons x par la condition $\delta = \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\lambda_{n'_\nu}$, d'où il suit

$$\lambda_{n'_\nu} = \frac{\delta}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)}, \qquad \lambda_{n''_\nu} > \frac{(1+\gamma)\delta}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)} = \overline{\lambda}_{n''_\nu},$$

On aura, pour le deuxième groupe,

$$A_n e^{\lambda_n x} < \exp\left[\frac{\lambda_{n'_\nu}}{\tau} \left(1 - \log \frac{\lambda_{n'_\nu}}{\delta} \right) \right] = \exp\left[(1+\varepsilon) k' \sigma e^{\tau x} \right],$$

et, pour le quatrième groupe,

$$A_n e^{\lambda_n x} < \exp\left[\frac{\overline{\lambda}_{n''_\nu}}{\tau} \left(1 - \log \frac{\lambda_{n''_\nu}}{\delta} \right) \right] = \exp\left[(1+\varepsilon) k'' \sigma e^{\tau x} \right],$$

k' et k'' désignant les quantités

$$k' = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2}} \left[1 + \log\left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) \right], \qquad k'' = \frac{1+\gamma}{1 + \frac{\gamma}{2}} \left[1 - \log\left(\frac{1+\gamma}{1 + \frac{\gamma}{2}} \right) \right],$$

Or ces deux quantités sont toutes les deux inférieures à 1. On pourra obtenir, pour une infinité de valeurs x indéfiniment croissantes,

$$M(x, F) < \exp\left[(1 - \eta_1) \sigma e^{\tau x} \right],$$

où η_1 désigne un nombre positif fixe. $F(z)$ ne serait pas à croissance linéaire parfaitement régulière, contrairement à l'hypothèse. Notre démonstration est ainsi achevée. On peut vérifier facilement le théorème dans le cas où $\sigma = 0$ ou $\sigma = \infty$.

Par une méthode analogue on établit le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $F(z)$ *d'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *soit à croissance linéaire régulière est que la condition* (2.1) *étant réalisée, on puisse trouver une suite d'indices* n_p *telle que*

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log A_{n_p}}{\lambda_{n_p} \log \lambda_{n_p}} = -\frac{1}{\tau}, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log \lambda_{n_{p+1}}}{\log \lambda_{n_p}} = 1. \tag{2.10}$$

Remarque. — Si l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log \lambda_n} = E < +\infty,$$

la condition (1.2) est vérifiée avec $D = 0$ et l'on a $[10, e]$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log M(x, F)}{\log \mu(x, F)} = 1.$$

Dans ce cas, on pourra démontrer le théorème 2.1, le corollaire 2.1 et les théorèmes 2.3 et 2.4 par la méthode de M. Valiron [10, *a*].

3. *Série associée à la fonction entière* $F(z)$ *et leur prolongement analytique.* — On considère seulement le cas où l'ordre linéaire de $F(z)$ est positif. On prend une fonction $V(x)$ définie pour $x \geq 1$ comme suit :

1° Dans le cas de l'ordre linéaire fini positif τ, étant donnée une suite positive décroissante $\{\eta_n\}$ tendant vers zéro, si l'on a, quels que soient $x(> X_0)$ et n

$$\log \mu(x, F) > e^{(\tau - \eta_n)x},$$

on prend

$$V(x) = \log \mu(x, F).$$

Dans le cas contraire, on a une suite $\{x_n\}$ indéfiniment croissante pour laquelle

$$\log \mu(x_n, F) = e^{(\tau - \eta_n)x_n}.$$

Dans chaque intervalle (x_n, x_{n+1}) on prend $V(x)$ égale au plus grand des deux nombres $\log \mu(x, F)$ et $e^{(\tau - \eta_n)x}$.

2° Dans le cas de l'ordre linéaire infini, on prend

$$\frac{\log V(x)}{x} = \max \text{de} \frac{\log \log \mu(u, F)}{u} \qquad \text{pour} \quad u \leq x.$$

Dans le premier cas, $V(x)$ est une fonction convexe de x; dans le deuxième cas $V(x)$ est une fonction continue. En tout cas, on a, pour x assez grand,

$$V(x) \geq \log \mu(x, F) \tag{3.1}$$

et, pour une suite de x tendant vers l'infini,

$$V(x) = \log \mu(x, F). \tag{3.2}$$

En tenant compte de (1.8) et (1.6), on voit que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$V(x + D + \varepsilon) > \log M(x, F) \tag{3.3}$$

pour x assez grand et

$$V(x) \leq \log M(x, F) \tag{3.4}$$

pour une suite de x tendant vers l'infini. Donc, en posant $W(x) = e^{V(x)}$, $F(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $W(x)$ *et au plus de l'ordre linéaire de* $W(x + D)$. *Si* $D = 0$, $F(z)$ *est de l'ordre linéaire de* $W(x)$.

Dans le cas $0 < \tau < \infty$, $V(x) = e^{(\tau - \eta_k)x}$, $(0 < \eta_k < \tau)$, pour x assez grand; dans le cas $\tau = \infty$, $V(x) = \exp[x\Phi(x)]$, où $\Phi(x) = \frac{\log V(x)}{x}$ est une fonction indéfiniment croissante. Donc dans tous les cas

$$V(x) > x^2 \qquad \text{pour} \quad x \geq X_0 > 1. \tag{3.5}$$

D'ailleurs dans le premier cas, en vertu de la convexité de $V(x)$,

$$\frac{W(x-h)}{W(x)} = \frac{1}{e^{V(x)-V(x-h)}} < \exp\left[-h\frac{V(x-h)-V(X_0)}{x-h-X_0}\right]$$
$$< \exp\left[-h\frac{(x-h)^2-V(X_0)}{x-h-X_0}\right] \qquad (h>0),$$

pour x assez grand et dans le deuxième cas,

$$\frac{W(x-h)}{W(x)} \leqq \frac{\exp[(x-h)\Phi(x)]}{\exp[x\Phi(x)]} \qquad (h>0).$$

On aura par conséquent

$$\int^{\infty} \frac{W(x-h)}{W(x)}\,dx < \infty \qquad \text{pour tout} \quad h>0. \tag{3.6}$$

Construisons la fonction

$$\Omega(u) = \int_1^{\infty} \frac{e^{ut}}{W(t)}\,dt, \tag{3.7}$$

qui est évidemment une fonction croissante de u. Désignons par $\nu(u)$ le maximum de $\frac{e^{ut}}{W(t)}$, $1 \leqq t < \infty$, et posons

$$\nu(u) = \frac{e^{ut_u}}{W(t_u)}.$$

Nous avons, dès que u est assez grand,

$$\Omega(x) > \int_1^{t_u} \frac{e^{ut}}{W(t)}\,dt \geqq \frac{1}{W(t_u)}\int_1^{t_u} e^{ut}\,dt = \frac{e^{ut_u}-e^u}{u\,W(t_u)} > \frac{e^{ut_u}}{2\,u\,W(t_u)} = \frac{\nu(u)}{2u}$$

et

$$\Omega(u) = \int_1^{\frac{3u}{2}} \frac{e^{ut}}{W(t)}\,dt + \int_{\frac{3u}{2}}^{\infty} \frac{e^{ut}}{W(t)}\,dt < \frac{3u}{2}\nu(u) + \int_{\frac{3u}{2}}^{\infty} e^{ut-t^2}\,dt$$
$$< \frac{3u}{2}\nu(u) + \int_{\frac{3u}{2}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{3}}\,dt < 2u\,\nu(u).$$

Nous avons donc, pour u assez grand, les inégalités

$$\frac{3u}{2}\nu(u) < \Omega(u) < 2u\,\nu(u). \tag{3.8}$$

A la fonction $F(z)$, on associe la série de Dirichlet

$$f(z) = \Sigma a_n \Omega(\lambda_n) e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.9}$$

dont l'abscisse de convergence absolue $x_a(f)$ vérifie

$$-D \leqq x_a(f) \leqq 0. \tag{3.10}$$

En effet, supposons

$$\nu(\lambda_n) = \frac{e^{\lambda_n t'_n}}{W(t'_n)}.$$

En vertu de (3.1) on obtient

$$\log \nu(\lambda_n) = \lambda_n t'_n - V(t'_n) \leqq - \log A_n$$

pour n assez grand. D'ailleurs, en vertu de (3.2),

$$\log \nu(\lambda_n) \geqq \lambda_n t - V(t) = \lambda_n t - \log \mu(t, F)$$

pour une suite de t tendant vers l'infini : $\{t''_m\}$. Il en résulte que

$$\log \nu(\lambda_m) \geqq - \log A_m$$

pour une suite de λ_n telle que $\mu(t''_m, F) = A_m e^{\lambda_m t''_m}$. Donc (3.8) entraîne que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_n \, \Omega(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0.$$

(3.10) est ainsi établi en tenant compte de (1.4).

On va donner une méthode de sommation de $f(z)$. Pour $\mathcal{R}(z) < x_a(f)$, on peut écrire

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n \Omega(\lambda_n) e^{\lambda_n z} = \sum_1^\infty a_n e^{\lambda_n z} \int_1^{+\infty} \frac{e^{\lambda_n t}}{W(t)} dt = \sum_1^\infty \int_1^\infty \frac{a_n e^{\lambda_n (z+t)}}{W(t)} dt,$$

qui converge absolument et uniformément dans chaque domaine fermé situé dans le demi-plan $x < x_a(f)$. On peut donc intervertir le signe de sommation et celui d'intégration dans la dernière expression des égalités ci-dessus. Il s'ensuit que

$$f(z) = \int_1^\infty \frac{F(t+z)}{W(t)} dt, \qquad \mathcal{R}(z) < x_a(f). \tag{3.11}$$

Si, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$,

$$|F(x_0 + iy_0 + x + iy)| < W(x - \varepsilon)$$

dans la demi-bande $|y| \leqq \delta_1$, $x \geqq X_0$, l'intégrale du second membre de (3.11) converge uniformément pour les valeurs de z dans une demi-bande $|y - y_0| \leqq \delta_1$, $x \leqq x_0 + \delta_2$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, et elle donne donc la valeur de $f(z)$, prolongée horizontalement, dans cette bande. On obtient ainsi la proposition suivante :

THÉORÈME 3.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale* (1) *de $f(z)$, $F(z)$ est au moins de l'ordre linéaire de $W(x - x_0)$ sur $y = y_0$.*

Démonstration. — Quel que soit $\varepsilon_n > 0$, il existe un point (ξ_n, η_n) dans l'intervalle $|x - x_0| < \varepsilon_n$, $|y - y_0| < \varepsilon_n$ tel que pour chaque $C_n > 0$ et $\varepsilon'_n > 0$ il existe un $\overline{\xi}_n > C_n$ vérifiant

$$|F(\xi_n + i\eta_n + \overline{\xi}_n)| > W(\overline{\xi}_n - \varepsilon'_n).$$

(1) *Voir* [1, p. 184].

Choisissons convenablement deux suites décroissantes $\{\varepsilon_n\}$ et $\{\varepsilon'_n\}$ tendant vers zéro et une suite croissante $\{C_n\}$ tendant vers l'infini et posons

$$z_n = x_n + iy_n = \xi_n + \overline{\xi}_n + i\eta_n.$$

Nous avons donc

$$|F(z_n)| > W(x_n - x_0 - o(1)), \qquad x_n \to \infty, y_n \to y_0, \tag{3.12}$$

et le théorème est ainsi démontré.

Remarque. — Pour construire la fonction $V(x)$, M. Valiron [10, *f*] a utilisé $\log M(x, F)$ au lieu de $\log \mu(x, F)$. Dans ce cas, $F(z)$ est de l'ordre linéaire de $W(x)$ et l'on a

$$V(x) \geq \log M(x, F),$$

l'égalité étant vérifiée pour une suite de x tendant vers l'infini. Les inégalités (3.5), (3.6) et (3.8) restent les mêmes, mais (3.10) est remplacée par

$$-D \leq x_a(f) \leq D.$$

On trouve que $f(z)$ n'a pas de points singuliers dans le demi-plan $x < o$ et que le théorème 3.1 reste encore valable.

4. *Droites de Borel de* $F(z)$ *d'ordre linéaire positif.* — Soit Δ, $y = y_0$, une droite horizontale. Désignons par $n(k, \Delta, \delta, \Phi - Z)$ le nombre de zéros de $\Phi(z) - Z$ appartenant à la demi-bande $|y - y_0| < \delta$, $x < k$, $\delta > o$. Dans le cas où *l'ordre linéaire* τ *de* $\Phi(z)$ *est fini positif*, la droite Δ est dite une *droite de Borel* si, quels que soient $\delta > o$ et $\varepsilon > o$, dès que $k \geq k_0(\delta, \varepsilon, Z)$,

$$n(k, \Delta, \delta, \Phi - Z) \geq e^{k\tau - \varepsilon},$$

pour tous les Z sauf deux au plus (l'infini compris). Dans le cas de l'*ordre linéaire infini*, on suppose que $\Phi(z)$ est *au plus de l'ordre linéaire de* $U(x + K)$, $K = const. \geq o$, et *au moins de l'ordre linéaire de* $U(x)$. La droite Δ est dite une *droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $\log U(x - h)$, $h = const. > -K$, si, quels que soient $\delta > o$ et $\varepsilon > o$, dès que $k \geq k_0(\delta, \varepsilon, Z)$,

$$n(k, \Delta, \delta, \Phi - Z) \geq \log U(k - h - \varepsilon)$$

pour tous les Z sauf deux au plus (l'infini compris). Considérons la fonction entière $F(z)$ de l'ordre linéaire $\tau > o$. Suivant $\tau < \infty$ ou $\tau = \infty$, on établit, en appliquant le théorème 3.1, les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.1. — *Si* $\tau < \infty$ *et si* $z_0 = x_0 + iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $f(z)$, *il existe dans la bande* $|y - y_0| \leq \frac{\pi}{2\tau}$ *une droite de Borel de* $F(z)$, $y = y'$, $y' = const.$, *jouissant de cette propriété : on peut trouver une suite de cercles* Γ_n, $|z - z_n| = o(1)$, *où* $z_n = x_n + iy'$, $x_n \to \infty$, *tels que dans* Γ_n *la fonction* $F(z)$ *prend au moins*

$$e^{x_n(\tau + \varepsilon_n)}, \qquad \varepsilon_n = o(1), \qquad \varepsilon_n = \varepsilon_n(Z),$$

fois chaque valeur de Z pour laquelle

$$\log|Z|<e^{v_n(\tau-0,1)}, \qquad \log|Z-Z_n|>e^{-v_n(\tau-0,1)},$$

les points Z_n *tendant vers une limite lorsque* $n\to\infty$.

Démonstration. — Considérons la transformation

$$(T_\alpha) \qquad \zeta=e^{\alpha(z-z_0)}, \qquad 0<\alpha<\tau,$$

qui transforme la bande $|y-y_0|<\frac{\pi}{2\alpha}$ dans un angle d'ouverture π dans le plan des ζ, Posons

$$\Phi(\zeta)=F(z), \qquad \zeta=\xi+i\eta=\rho e^{i\theta}$$

et désignons par $M(\rho,\Phi)$ le maximum de $|\Phi(\zeta)|$ sur la partie du cercle $|\zeta|=\rho$ dans l'angle d'ouverture π mentionné ci-dessus. On a

$$(4.1) \qquad \overline{\lim_{\rho=\infty}}\frac{\log\log M(\rho,\Phi)}{\log\rho}\leq\overline{\lim_{x=\infty}}\frac{\log\log M(x,F)}{\alpha(x-x_0)}\leq\overline{\lim_{x=\infty}}\frac{\log V(x+D+\varepsilon)}{\alpha(x-x_0)}=\frac{\tau}{\alpha}.$$

D'autre part, le théorème 3.1 entraîne

$$(4.2) \qquad \overline{\lim_{\rho=\infty}}\frac{\log\log M(\rho,\Phi)}{\log\rho}\geq\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log\log|F(z_n)|}{\alpha(x_n-x_0)}\geq\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log V(x_n-x_0-o(1))}{\alpha(x_n-x_0)}=\frac{\tau}{\alpha}.$$

Donc la fonction $\Phi(\zeta)$ est d'ordre $\frac{\tau}{\alpha}>1$ dans l'angle considéré. En appliquant à $\Phi(\zeta)$ un théorème de M. Valiron [10, *e*] et en revenant à $F(z)$ par la transformation (T_α), on voit qu'il existe une suite de cercle $\Gamma_{p\alpha}$, $|z-z_{p\alpha}|\leq\omega_{p\alpha}$, $\omega_{p\alpha}=o(1)$, où $z_{p\alpha}=x_{p\alpha}+iy'_\alpha$, $x_{p\alpha}=\text{const.}$, $|y'_\alpha-y_0|\leq\frac{\pi}{2\alpha}$, tels que $F(z)$ prend dans ces cercles au moins

$$e^{x_{p\alpha}(\tau+\varepsilon_{p\alpha})}, \qquad \varepsilon_{p\alpha}=o(1), \qquad \varepsilon_{p\alpha}=\varepsilon_{p\alpha}(Z)$$

fois chaque valeur Z pour laquelle

$$\log|Z|<e^{v_{p\alpha}(\tau+\varepsilon_{p\alpha})}, \qquad \log|Z-Z_{p\alpha}|>e^{-v_{p\alpha}(\tau+\varepsilon_{p\alpha})},$$

$Z_{p\alpha}$ tendant vers une limite lorsque $p\to\infty$.

S'il existe une valeur de α pour laquelle $|y'_\alpha-y_0|\leq\frac{\pi}{2\tau}$, notre théorème est démontré. Sinon, on verra qu'il existe une suite de cercles dont les centres sont représentés sur $y=y_0+\frac{\pi}{2\tau}$ ou $y=y_0-\frac{\pi}{2\tau}$ et qui jouissent de la propriété exigée. Dans ce cas, en effet, correspondant à une suite croissante positive $\{\alpha_j\}\to\tau$, il existe des suites de cercles $\Gamma_{p\alpha_j}$, $|z-z_{p\alpha_j}|\leq\omega_{p\alpha_j}$ dont les coordonnées des centres tendent vers $y_0+\frac{\pi}{2\tau}$ ou $y_0-\frac{\pi}{2\tau}$ lorsque $\alpha_j\to\tau$. Supposons que $y_0+\frac{\pi}{2\tau}$ est une limite de ces coordonnées. Choisissons une suite croissante positive $\{s_j\}\to\infty$ et une suite positive $\{\delta_j\}\to 0$. Il existe dans la suite de

cercles $\Gamma_{p\alpha_j}$, $(p=1, 2, \ldots)$, un cercle $\Gamma_{p_{s_j}\alpha_j}$ dont l'abscisse du centre est plus grand que s_j et pour lequel $\omega_{p_{s_j}\alpha_j}$ et $\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j}$ sont plus petits que $\frac{1}{j}$ (1). On obtient ainsi une suite de cercles $T_{p_{s_j}\alpha_j}$, $|z-z_{p_{s_j}\alpha_j}|\leq\omega_{p_{s_j}\alpha_j}$, $\omega_{p_{s_j}\alpha_j}=o(1)$, $(j=1, 2\ldots)$, dont les abscisses et les coordonnées des centres tendent vers l'infini et $y_0+\frac{\pi}{2\tau}$ respectivement et dans lesquels $F(z)$ prend au moins $\exp[x_{p_{s_j}\alpha_j}(\tau+\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j})]$, $\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j}=o(1)$, $\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j}=\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j}(Z)$, fois chaque valeur Z pour laquelle

$$\log|Z|<\exp[x_{p_{s_j}\alpha_j}(\tau+\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j})],\qquad \log|Z-Z_{p_{s_j}\alpha_j}|>-\exp[x_{p_{s_j}\alpha_j}(\tau-\varepsilon_{p_{s_j}\alpha_j})].$$

Construisons les cercles les plus petits dont les centres sont sur la droite $y=y_0+\frac{\pi}{2\tau}$ et qui contiennent respectivement un des cercles $\Gamma_{p_{s_j}\alpha_j}$, $(j=1, 2\ldots)$. Ceci achève la démonstration de notre théorème.

Théorème 4.2. — *Si $\tau=\infty$ et si $z_0=x_0+iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$, la droite $y=y_0$ est une droite de Borel de $F(z)$ au moins de l'ordre linéaire de $V(x-x_0)$, jouissant de cette propriété : quelque petit que soit $\varepsilon>0$, il existe une suite de cercles Γ_n : $|z-z_n|<\frac{hx_n}{\log V(x_n-x_0-\varepsilon)}$, $x_n\to\infty$, $y_n\to y_0$, $h>0$, tels que dans Γ_n, $F(z)$ prend au moins $V(x_n-x_0-\varepsilon)$ fois chaque valeur Z pour laquelle*

$$\log|Z|<V(x_n-x_0-\varepsilon),\qquad \log|Z-Z_n|>-V(x_n-x_0-\varepsilon),$$

les points Z_n tendant vers une limite lorsque $n\to\infty$.

Démonstration. — Désignons par $\zeta_n=\xi_n+i\eta_n$ les points z_n dans la démonstration du théorème 3.1 et employons les autres notations du n° 3. Supposons qu'il existe deux nombres C et C′ tels que

$$\log|C|<V(\xi_n-x_0-\varepsilon),\qquad \log|C'|<V(\xi_n-x_0-\varepsilon),$$
$$\log|C-C'|>-V(\xi_n-x_0-\varepsilon)$$

et que le nombre des zéros de $F(z)-C$ et $F(z)-C'$ dans le cercle $|z-(\zeta_n-l)|<\frac{h(\xi_n-x_0-\varepsilon)}{\log V(\xi_n-x_0-\varepsilon)}$ soit inférieur à $V(\xi_n-x_0-\varepsilon)$, où $l=D+x_0+2\varepsilon$ (1). Appliquons une extension du théorème de Schottky due à M. Valiron [10, g] avec $\tau=\frac{1}{7}$ et $r=\frac{3}{7}$ (2) dans le cercle

$$\left|z-\left[\frac{\zeta_n-l-h(\xi_n-x_0-\varepsilon)}{5\log V(\xi_n-x_0-\varepsilon)}\right]\right|<\frac{4h(\xi_n-x_0-\varepsilon)}{5\log V(\xi_n-x_0-\varepsilon)}.$$

---

(1) On voit que pour un α, $\varepsilon_{p\alpha}$ tend vers zéro uniformément pour tous les Z considérés puisque $\varepsilon_{p\alpha}=\alpha\eta_{p\alpha}(Z)-\frac{\tau x_0}{x_{p\alpha}}-\frac{\alpha x_0\eta_{p\alpha}(Z)}{x_{p\alpha}}$. *Voir* [10. b].

(1) Remarquons que nous avons $x_0\geq -D$.

(2) On utilise ici les notations du *Mémorial* cité.

Puisque

$$\log M(\xi_n - l, F) < V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$$

pour n assez grand, nous avons, pour n assez grand,

$$\begin{aligned}\log|F(z)| &< \alpha V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \beta V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \gamma V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \delta \\ &< (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1) V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)\end{aligned}$$

dans le cercle concentrique de rayon $\frac{3h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{5 \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$, où α, β, γ, δ sont des constantes numériques positives. Ensuite appliquons le même théorème avec le même τ et r au premier cercle. On trouve que, dans le cercle concentrique avec rayon $\frac{3h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{4 \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$,

$$\begin{aligned}\log|F(z)| &< \alpha V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \beta V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1) V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \delta \\ &< (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)^2 V(\xi_n - x_0 - \varepsilon).\end{aligned}$$

Appliquons de nouveau cette extension du théorème de Schottky au cercle

$$\left| z - \left[\frac{\zeta_n - l + h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{2 \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)} \right] \right| < \frac{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}.$$

s'il existe deux nombres C_1 et C_1' vérifiant les mêmes inégalités que C et C′ tels que le nombre des zéros de $F(z) - C_1$ et $F(z) - C_1'$ dans ce cercle soit inférieur à $V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$, et ainsi de suite. On aura les deux possibilités suivantes :

1° $z_n = x_n + iy_n$ se trouvant entre ζ_n et $\zeta_n - l$ sur le segment joignant ces deux points, il existe un cercle $|z - z_n| < \frac{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$ dans lequel $F(z)$ prend au moins $V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$ fois chaque valeur Z vérifiant

$$\log|Z| < V(\xi_n - x_0 - \varepsilon), \qquad \log|Z - Z_n| > -V(\xi_n - x_0 - \varepsilon).$$

Puisque $x_n - x_0 - \varepsilon < \xi_n - x_0 - \varepsilon < x_n$, on trouve, à plus forte raison, que dans le cercle Γ_n, $|z - z_n| < \frac{h x_n}{\log V(x_n - x_0 - \varepsilon)}$, $F(z)$ prend au moins $V(x_n - x_0 - \varepsilon)$ fois chaque valeur Z vérifiant

$$\log|Z| < V(x_n - x_0 - \varepsilon), \qquad \log|Z - Z_n| > -V(x_n - x_0 - \varepsilon).$$

2° Nous aurons

$$\log|F(\zeta_n)| < (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)^p V(\xi_n - x_0 - \varepsilon),$$

où

$$p = 1 + \frac{l \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)} = 1 + \frac{l \Phi(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{h}.$$

En tenant compte du théorème 3.1, il s'ensuit que

$$V(\xi_n - x_0 - o(1)) < (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)^p V(\xi_n - x_0 - \varepsilon).$$

Donc

$$\frac{\exp[(\xi_n - x_0 - o(1))\Phi(\xi_n - x_0 - o(1))]}{\exp\left\{\left[\xi_n - x_0 - \varepsilon + \frac{l \log(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)}{h}\right]\Phi(\xi_n - x_0 - \varepsilon)\right\}} < \alpha + \beta + \gamma + \delta + 1.$$

Choisissant h tel que $x_0+\varepsilon-\frac{l\log(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}{h}>x_0$, nous trouvons que l'inégalité ci-dessus est impossible si n est assez grand car, $\Phi(x)$ étant indéfiniment croissante, le premier membre de cette inégalité tend vers l'infini avec n.

Notre théorème est démontré en supprimant certains des cercles Γ_n dans 2^n tels que pour la nouvelle suite des cercles, Z_n tendent vers une limite.

Les théorèmes 4.1 et 4.2 montrent que, dans le cas $\tau>0$, chaque sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$ correspond à une droite de Borel de $F(z)$. La formule de M. M. Riesz [1, p. 185] donne l'abscisse de l'étoile horizontale de $f(z)$ appartenant à chaque droite horizontale; elle donne donc des renseignements sur les droites de Borel de $F(z)$. D'ailleurs, de certains théorèmes sur les singularités des fonctions définies par des séries de Dirichlet, on peut tirer des théorèmes sur les droites de Borel de $F(z)$. On en énonce ici quelques-uns, dont les démonstrations sont immédiates :

$\Omega(\lambda_n)$ étant supérieur à zéro, un théorème de M. C. Biggeri [2, a] entraîne le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Si les parties réelles de a_n ne sont pas négatives et si les arguments φ_n de a_n sont tels que*

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[\lambda_n]{\cos\varphi_n}=1,$$

$F(z)$ *admet, dans le cas* $0<\tau<\infty$, *une droite de Borel dans la bande,* $y=\frac{\pi}{2\tau}$, *et, dans le cas* $\tau=\infty$, $y=0$ *comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x-x_a)$, $x_a=x_a(f)$.

Le théorème suivant résulte d'un théorème de MM. Polya-Bernstein [1, p. 140] :

THÉORÈME 4.4. — *Si $\{\lambda_n\}$ est une suite à densité maximum finie Δ et à indice de condensation nul, $F(z)$ admet dans le cas $0<\tau<\infty$, une droite de Borel dans chaque bande horizontale de largeur $\left(2\Delta+\frac{1}{\tau}\right)\pi$, et, dans le cas $\tau=\infty$, une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x-x_a)$ dans chaque bande horizontale de largeur $2\Delta\tau$.*

En posant $\Delta=0$ dans le théorème précédent, on obtient un théorème correspondant à une généralisation d'un théorème de MM. Hadamard-Fabry.

Un théorème de MM. Paley-Zygmund [7] conduit à la proposition suivante :

THÉORÈME 4.5. — *Pour presque toutes les suites $\{\nu_n\}$, $|\nu_n|=1$ et $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n=\pm1$, les fonctions $\Sigma a_n\nu_n e^{\lambda_n z}$ et $\Sigma a_n\varepsilon_n e^{\lambda_n z}$ $(n=1,2,\ldots)$ admettent, dans le cas $0<\tau<\infty$, une droite de Borel dans chaque bande horizontale de largeur $\frac{\pi}{\tau}$ et, dans le cas $\tau=\infty$, chaque droite horizontale comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x-x_0)$, x_0 étant l'abscisse de convergence de*

$$\Sigma\ a_n^2\Omega^2(\lambda_n)e^{\lambda_n z}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Remarque. — En examinant les raisonnements, on voit que si l'on utilise la fonction $V(x)$ construite au moyen de $M(x, F)$ au lieu de $\mu(x, F)$, les théorèmes 4.1-4.4 sont encore valables, mais le théorème 4.5 ne peut plus se démontrer.

5. *La comparaison des droites de Borel de* $F(z)$ *et celles de ses transformées de Cramér.* — On considère la transformée de Cramér [1, chap. III] de $F(z)$

$$\Psi(z) = \sum a_n \theta(\lambda_n) e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.1}$$

où $\theta(z)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan pour laquelle il existe une constante non négative k tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a, pour $|z|$ et n suffisamment grands

$$\log \theta(z) < (k+\varepsilon)|z|, \qquad \log \theta(\lambda_n) > -(k-\varepsilon)\lambda_n. \tag{5.2}$$

(1.5) et (5.2) entraînent que la série (5.1) est absolument convergente partout et que $\Psi(z)$ *définit une fonction entière.*

En utilisant les notations du n° 1 et en tenant compte de (5.2), on trouve que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\mu(x, F) < \mu(x + k + \varepsilon, \Psi), \qquad \mu(x, \Psi) < \mu(x + k + \varepsilon, F), \tag{5.3}$$

dès que x est assez grand. Par conséquent, en vertu de (1.6) et (1.8), on a

$$M(x, F) < M(x + D + k + \varepsilon, \Psi), \qquad M(x, \Psi) < M(x + D + k + \varepsilon, F) \tag{5.4}$$

dès que x est assez grand.

$V(x)$ étant définie comme dans le n° 3, les inégalités (3.1), (3.2) et (5.3) entraînent que $\Psi(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $W(x-k)$ *et au plus de l'ordre linéaire de* $W(x+D+k)$. *Dans le cas de l'ordre linéaire fini,* $F(z)$ *et* $\Psi(z)$ *sont du même ordre* τ.

A la fonction $\Psi(z)$ on associe

$$\psi(z) = \sum a_n \theta(\lambda_n)\, \Omega(\lambda_n)\, e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.5}$$

qui est évidemment une transformée de Cramér de $f(z)$ et dont l'abscisse de convergence absolue $x_a(\psi)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$x_a(f) - x_a(\psi) \leq k. \tag{5.6}$$

Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\psi(z)$, il existe, dans le cercle $|z - \bar{z}_0| \leq k$ un point singulier ou un point de l'espace lacunaire de $f(z)$. Il existe donc dans l'ensemble

$$E(z; |z - z_0| \leq k) = E(z; x_a(f) \leq x \leq \bar{x}_0, |y - y_0| \leq k) \tag{5.7}$$

un sommet $z_0 = x_0 + iy_0$ de l'étoile horizontale de $f(z)$.

Si, en outre, dans un secteur

$$|\arg z| \leq \alpha \qquad \left(0 < \alpha = \text{const.} \leq \frac{\pi}{2}\right), \tag{5.8}$$

$0(z)$ ne s'annule pas et vérifie, pour $|z|$ suffisamment grand,

$$\log|0(z)| > -(k+\varepsilon)\,z, \tag{5.9}$$

$f(z)$ est une transformée de Cramér généralisée [1, p. 71] de $\psi(z)$. Dans ce cas, $z_0 = x_0 + iy_0$ étant un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$, il existe dans l'ensemble

$$E(z;\ |z - z_0| \leq k) - E(z;\ x_0(\psi) \leq x \leq x_0,\ |y - y_0| \leq k) \tag{5.10}$$

un sommet de l'étoile horizontale de $\psi(z)$.

On remarque que si $k = 0$, (5.7) et (5.10) deviennent deux segments et les étoiles horizontales de $f(z)$ et de $\psi(z)$ coïncident.

Comme on a fait pour $f(z)$, on peut écrire

$$\psi(z) = \int_1^{\infty} \frac{\Psi(t+z)}{W(t)}\,dt, \qquad \Re(z) < x_0(\psi). \tag{5.11}$$

On en conclut que, *$z_0 = x_0 + iy_0$ étant un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\psi(z)$, la fonction $\Psi(z)$ est au moins de l'ordre linéaire de $W(x - x_0)$ sur la droite $y = y_0$.* On établit, comme dans le n° 4, les deux propositions suivantes :

THÉORÈME 5.1. — *Si $F(z)$ et sa transformée de Cramér $\Psi(z)$ sont d'ordre linéaire fini $\tau > 0$ et si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\psi(z)$, $F(z)$ admet une droite de Borel dans la bande*

$$|y - y_0| \leq k - \frac{\pi}{2\tau},$$

et $\Psi(z)$ admet une droite de Borel dans la bande $|y - y_0| \leq \frac{\pi}{2\tau}$.

Si, en outre, dans un secteur (5.8), $0(z)$ ne s'annule pas et vérifie (5.9) pour $|z|$ assez grand et si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$, $F(z)$ admet une droite de Borel dans la bande $|y - y_0| \leq \frac{\pi}{2\tau}$ et $\Psi(z)$ admet une droite de Borel dans la bande $|y - y_0| \leq k + \frac{\pi}{2\tau}$.

THÉORÈME 5.2. — *Si $F(z)$ et sa transformée de Cramér $\Psi(z)$ sont d'ordre linéaire infini et si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\psi(z)$, $F(z)$ admet dans la bande $|y - y_0| \leq k$ une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x - x_0 - k)$ et $\Psi(z)$ admet $y = y_0$ comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x - x_0)$.*

Si, en outre, dans un secteur (5.8), $0(z)$ ne s'annule pas et vérifie (5.9) pour $|z|$ assez grand et si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$, $F(z)$ admet $y = y_0$ comme une droite de Borel au moins de l'ordre

linéaire de $V(x-x_0)$ *et* $\Psi(z)$ *admet dans la bande* $|y-y_0|\leq k$ *une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x-x_0-k)$.

La dérivée d'ordre m de $F(z)$:

$$F^{m}(z)=\Sigma a_n\lambda_n^m e^{\lambda_n z} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{5.12}$$

est évidemment une transformée de Cramér de $F(z)$ avec $k=0$. Les étoiles horizontales de $f(z)$ et de $f^{(m)}(z)$ coïncident. En appliquant les résultats précédents, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3. — *Si* $z_0=x_0+iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $f(z)$ *et si* $0<\tau<\infty$, $F(z)$ *et toutes ses dérivées admettent une droite de Borel dans la bande* $|y-y_0|\leq\frac{\pi}{2\tau}$; *si au contraire* $\tau=\infty$, $y=y_0$ *est une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x-x_0)$ *de* $F(z)$ *et de toutes ses dérivées.*

6. *Fonctions entières associées à certaines séries de Dirichlet ayant une abscisse de convergence absolue.* — Étant données certaines séries de Dirichlet ayant une abscisse finie de convergence absolue, on peut leur associer des séries de Dirichlet absolument convergentes partout telles qu'un sommet à distance finie de l'étoile horizontale des séries données correspond à une droite de Borel des fonctions entières d'ordre linéaire positif définies par des séries associées. Cela posé, connaissant l'étoile horizontale de certaines séries de Dirichlet, on peut construire des fonctions entières ayant des droites de Borel correspondant à cette étoile horizontale. On donne ci-dessus une méthode pour construire des fonctions entières associées.

Étant donnée une série de Dirichlet

$$g(z)=\Sigma b_n e^{\lambda_n z} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{6.1}$$

ayant une abscisse finie de convergence absolue $x_a(g)=C$, λ_n vérifiant (1.2), on voit que, en posant $|b_n|=B_n$,

$$-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log B_n}{\lambda_n}-D\leq C\leq-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log B_n}{\lambda_n}. \tag{6.2}$$

Soit $V_1(t)$ une fonction croissante continue définie pour $t\geq 1$ et telle que

$$V_1(x)\geq e^{kx}, \qquad k=\text{const.}>0 \tag{6.3}$$

pour x assez grand. On voit que

$$\Omega_1(u)=\int_1^{\infty}\frac{e^{ut}}{W_1(t)}dt<\infty, \qquad W_1(t)=e^{V_1(t)}, \tag{6.4}$$

pour tout $u>0$ et que $\frac{V_1(x)}{x}$ tend vers l'infini avec x. On suppose toujours

dans ce paragraphe que $\frac{V_1(x)}{x}$ est non décroissante. D'ailleurs, on a $V_1(x) > x^2$ pour x assez grand. En désignant par $\nu_1(u)$ le maximum de $\frac{e^{ut}}{W_1(t)}$, $\Omega_1(u)$ vérifie les inégalités

$$\frac{\nu_1(u)}{2u} < \Omega_1(u) < 2u\nu_1(u) \tag{6.5}$$

dès que u est assez grand.

Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Omega_1(\lambda_n)}{\lambda_n \log \lambda_n} > 0 \ (^1),$$

et si l'on ne peut pas tirer de la suite $\{\lambda_n\}$ une suite λ_{n_p} telle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \lambda_{n_{p-1}}}{\log \lambda_{n_p}} = 1, \tag{6.6}$$

on construit une suite croissante $\{\overline{\lambda}_n\}$ par l'interpolation des nombres dans la suite $\{\lambda_n\}$ telle que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\overline{\lambda}_n} = H < \infty, \tag{6.7}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \overline{\lambda}_{n-1}}{\log \overline{\lambda}_n} = 1. \tag{6.8}$$

Par exemple, on peut insérer tous les nombres entiers positifs dans $\{\lambda_n\}$ et l'on a $D \leq H \leq D + e^{-1}$.

Posons $\{\mu_n\} = \{\lambda_n\}$ ou $\{\overline{\lambda}_n\}$, et $K = D$ ou H suivant que nous introduisons $\{\overline{\lambda}_n\}$ ou non. Construisons la *fonction entière*

$$\Phi(z) = \sum \frac{e^{\mu_n z}}{\Omega_1(\mu_n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

En effet, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on aura, pour $n \geq n_0$, n_0 étant assez grand, u étant arbitraire, $x \geq 1$,

$$\frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} < \frac{2\mu_n e^{\mu_n x}}{\nu_1(\mu_n)} < \frac{e^{\mu_n x - \varepsilon}}{e^{\mu_n u}} W_1(u).$$

En prenant $u = x + \varepsilon$, on obtient, pour $n \geq n_0$,

$$\frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} < W_1(x + \varepsilon).$$

Par conséquent

$$\sum \frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} = \sum \frac{e^{\mu_n (x+K+\varepsilon)}}{\Omega_1(\mu_n)} e^{-\mu_n (K+\varepsilon)} < W_1(x + K + 2\varepsilon) \sum e^{-\mu_n (K+\varepsilon)} < W_1(x + K + 3\varepsilon)$$
$$(n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

---

(1) Dans ce cas, la fonction entière définie par $\sum \left[\frac{e^{\lambda_n z}}{\Omega_1(\lambda_n)} \right]$, $(n = 1, 2, \ldots)$, n'est pas d'ordre linéaire infini (*Voir* le théorème (2.1)).

On en conclut que, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\Phi(x) < W_1(x - K + \varepsilon) \qquad \text{pour} \quad x > x(\varepsilon).$$

D'autre part, quels que soient x et $\varepsilon > 0$, on aura

$$\Phi(x) > \frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} > \frac{e^{\mu_n x}}{2\mu_n \nu_1(\mu_n)} > \frac{e^{\mu_n x - \varepsilon}}{\nu_1(\mu_n)}, \qquad \nu_1(\mu_n) = \frac{e^{\mu_n t_n}}{W_1(t_n)},$$

pour n assez grand. Puisque t_n croît indéfiniment avec n, il existe une suite de valeurs indéfiniment croissantes de x telle que

$$\Phi(x) > W_1(x - \varepsilon), \qquad \varepsilon(x) > 0, \qquad \lim \varepsilon(x) = 0.$$

Considérons la fonction

$$G(z) = \sum \frac{b_n}{\Omega_1(\lambda_n)} e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.10}$$

qui *est aussi une fonction entière*. En effet, on vérifie que, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$M(x, G) < \Phi(x - C + \varepsilon) < W_1(x - C + K + 2\varepsilon)$$

pour x assez grand et que, pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de x,

$$M(x, G) > W_1(x - C - D - \varepsilon) > \Phi(x - C - D - K - 2\varepsilon). \quad \varepsilon(x) > 0, \quad \lim \varepsilon(x) = 0.$$

Donc $G(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $\Phi(x - C - D - K)$ *et au plus de l'ordre linéaire de* $\Phi(x - C)$. D'ailleurs, on voit que

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log V_1(x)}{x} \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, G)}{x} = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log \Phi(x)}{x} \geqq \underline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log V_1(x)}{x} \geqq k > 0.$$

Si $\mathcal{R}(z) < C$, on pourra écrire

$$g(z) = \int_1^\infty \frac{G(t - z)}{W_1(t)}\, dt. \tag{6.11}$$

Pareillement, pour chaque $k > 0$,

$$\sum e^{-\mu_n k - \lambda} = \int_1^\infty \frac{\Phi(t - K - k)}{W_1(t)}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.12}$$

Donc si

$$G(x_0 - iy_0 + x - iy) < \Phi(x - K - k)$$

dans la demi-bande $x < \varepsilon$, $x > X_0$, $\varepsilon > 0$, on pourra prolonger $g(z)$ le long de la demi-droite $y = y_0$, $x < x_0$. Comme dans le n° 3, il en résulte que :

THÉORÈME 6.1. — *Si* $z_0 = x_0 + iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $g(z)$, *la fonction* $G(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $\Phi(x - K - x_0)$ *sur la droite* $y = y_0$.

En utilisant ce théorème, on démontre les deux propositions suivantes :

THÉORÈME 6.2. — *Si* $G(z)$ *est d'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *et si* $z_0 = x_0 + iy_0$ *est*

un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $g(z)$, il existe une droite de Borel de $G(z)$ dans la bande $\gamma - \gamma_0 = \frac{\pi}{\alpha}$ pourvu que

$$\lim_{u=\infty} \frac{\Omega_1(u)}{u \log u} \tag{6.13}$$

existe.

En vertu de (6.6), (6.7) et du théorème 2.3, $\Phi(z)$ est à croissance linéaire régulière. La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème 4.1, à condition que (4.1) et (4.2) sont remplacés par les inégalités suivantes :

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log\log M(\rho, \Phi_1)}{\log \rho} \leq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, G)}{\alpha(x - x_0)} < \lim_{x=\infty} \frac{\log\log \Phi(x - C - \varepsilon)}{\alpha(x - x_0)} = \frac{\tau}{\alpha},$$

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log\log M(\rho, \Phi_1)}{\log \rho} \geq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log |G(z_n)|}{\alpha(x_n - x_0)} \geq \lim_{n=\infty} \frac{\log\log \Phi(x_n - K - x_0 - o(1))}{\alpha(x_n - x_0)} = \frac{\tau}{\alpha}.$$

où $\Phi_1(\zeta)$ correspond à la fonction $\Phi(\zeta)$ dans la démonstration citée.

Théorème 6.3. — *Si $G(z)$ est d'ordre linéaire infini et si z_0 est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $g(z)$, la fonction $G(z)$ admet $\gamma = \gamma_0$ comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $\log\Phi(x - K - x_0)$ pourvu que*

$$\frac{\log\log \Phi(x)}{x} \tag{6.14}$$

soit non décroissante (1).

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.2. Mais dans ce cas on commence par un cercle de centre $x_n - K - x_0 + C - 2\varepsilon$ et de rayon $\frac{h(x_n - K - x_0 - 2\varepsilon)}{\log\log \Phi(x_n - K - x_0 - 2\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$.

Remarque. — On peut étudier la question traitée dans ce numéro sans introduire $\Phi(z)$. En effet, on choisit $V_1(t)$ vérifiant, en plus de (6.3), les conditions suivantes :

$$\int^{\infty} \frac{W_1(t - D - h)}{W_1(t)} dt < \infty \quad \text{pour tout } h > 0;$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log V_1(x)}{x} \text{ existe;}$$

$\frac{\log V_1(x)}{x}$ est non décroissante si la dernière limite $= \infty$.

En prenant

$$\Omega_1(u) = \int_{t=1}^{\infty} \frac{e^{ut}}{W_1(t - C)} dt.$$

(1) L'énoncé de ce théorème dans ma Note aux *Comptes rendus* (228, 1949, p. 641-643) n'est pas complet.

on trouve que $G(z)$ est au plus de l'ordre linéaire de $W_1(x-C+D)$ et au moins de l'ordre linéaire de $W_1(x-C-D)$ et que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log V_1(x)}{x} = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, G)}{x}.$$

En comparant les deux intégrales

$$g(z)=\int_{C+1}^{\infty} \frac{F(t+z)}{W_1(t-C)}\,dt, \qquad \int^{\infty} \frac{W_1(t-C-D-h)}{W_1(t-C)}\,dt,$$

on établit les théorèmes analogues aux théorèmes 6.2 et 6.3. Dans ce cas, on supprimera, dans le théorème 6.2, la condition que (6.13) existe, et, dans le théorème 6.3, la condition que (6.14) est non décroissante; $y=y_0$ sera dans ce dernier théorème une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x-C-D-x_0)$.

7. *Applications d'une méthode de sommation de M. M. Riesz.* — On peut appliquer une méthode de sommation de M. M. Riesz [1, p. 184] à l'étude des droites de Borel des fonctions entières d'ordre linéaire fini positif définies par certaines séries de Dirichlet absolument convergentes partout. On traite d'abord la question du n° 6 et l'on utilise les notations précédentes.

Considérons la série

$$(7.1) \qquad \mathcal{E}_\tau(z)=\sum \frac{e^{\mu_n z}}{\Gamma\left(1+\frac{\mu_n}{\tau}\right)}, \qquad 0<\tau<\infty \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

qui définit une *fonction entière d'ordre linéaire τ, à croissance linéaire régulière*. En effet, on a, d'après la formule de Stirling,

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log\Gamma\left(1+\frac{\mu_n}{\tau}\right)}{\mu_n}=-\infty, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{-\log\Gamma\left(1+\frac{\mu_n}{\tau}\right)}{\mu_n\log\mu_n}=-\frac{1}{\tau}.$$

(1.5) et le théorème 2.3 établissent notre affirmation.

A la fonction $g(z)$ on associe

$$(7.2) \qquad \mathcal{G}_\tau(z)=\sum \frac{b_n e^{t_n z}}{\Gamma\left(1+\frac{t_n}{\tau}\right)} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

On voit également qu'elle définit une *fonction entière d'ordre linéaire τ*.

Pour $\mathcal{R}(z)<C$, on pourra écrire

$$(7.3) \qquad g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t}\mathcal{G}_\tau\left(z+\frac{t}{\tau}\right)e^t\,dt.$$

Pareillement, on a, pour chaque $k>0$,

$$(7.4) \qquad \Sigma e^{-\mu_n(K+k)}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t}\mathcal{E}_\tau\left(-K-k+\frac{t}{\tau}\right)e^t\,dt \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Comparant (7.3) et (7.4), on établit, comme dans le n° 6, le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $g(z)$, il existe une droite de Borel de $\mathcal{G}_\tau(z)$ dans la bande $|y - y_0| \leq \frac{\pi}{2\tau}$.*

Réciproquement, étant donnée une fonction entière du type 1 de l'ordre linéaire fini $\tau > 0$ définie par une série de Dirichlet absolument convergente partout

$$\mathcal{G}_\tau(z) = \Sigma c_n e^{\lambda_n z}, \qquad |c_n| = C_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7.5}$$

où (1.2) est vérifiée avec $D = 0$, on lui associera une autre série. Le corollaire 2.1 montre que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lambda_n}{\tau e} \left(\sqrt[\lambda_n]{C_n}\right)^\tau = 1. \tag{7.6}$$

Considérons la série

$$\bar{g}(z) = \Sigma c_n \Gamma_n \left(1 + \frac{\lambda_n}{\tau}\right) e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7.7}$$

En vertu de la formule de Stirling et de (7.6) on trouve que

$$x_a(\bar{g}) = -\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log C_n \Gamma\left(1 - \frac{\lambda_n}{\tau}\right)}{\lambda_n} = 0,$$

où $x_a(\bar{g})$ désigne l'abscisse de convergence absolue de $\bar{g}(z)$. Par conséquent, on a, pour $\mathcal{R}(z) < 0$,

$$\bar{g}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \mathcal{G}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt. \tag{7.8}$$

En comparant (7.8) et (7.4), on démontre cette proposition :

THÉORÈME 7.2. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\bar{g}(z)$, il existe une droite de Borel de $\mathcal{G}_\tau(z)$ dans la bande $|y - y_0| \leq \frac{\pi}{2\tau}$.*

CHAPITRE II.

FONCTIONS ENTIÈRES DÉFINIES PAR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DES SÉRIES DE DIRICHLET.

I. — Transformées de Laplace-Stieltjes.

8. *Préliminaires.* — Soit $\alpha_1(t)$ une fonction monotone dans les intervalles $\lambda_n < t < \lambda_{n+1}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, tels que la suite $\{\lambda_n\}$ soit croissante avec $\lambda_0 = 0$

et vérifiant la condition (1.2). En outre, supposons que $\alpha_1(\lambda_n)$ se trouve entre $\alpha_1(\lambda_n-)$ et $\alpha_1(\lambda_n+)$ et que

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log B_{1n}}{\lambda_n}=-\infty, \qquad B_{1n}=\alpha_1(\lambda_n-)-\alpha_1(\lambda_{n-1}+). \tag{8.1}$$

Considérons la transformée de Laplace-Stieltjes [11] de $\alpha_1(t)$

$$F_1(z)=\int_0^\infty e^{zt}d\alpha_1(t), \qquad z=x+iy, \tag{8.2}$$

qui définit, dans son demi-plan de convergence une fonction holomorphe. En désignant $x_c(F_1)$ et $x_a(F_1)$ son abscisse de convergence et son abscisse de convergence absolue, respectivement, on a les relations suivantes [11]:

$$0\leq x_c(F_1)-x_a(F_1)\leq D. \tag{8.3}$$

$$-D\leq x_a(F_1)-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log A_{1n}}{\lambda_n}\leq 0, \qquad A_{1n}=\alpha_1(\lambda_n+)-\alpha_1(\lambda_n-). \tag{8.4}$$

En effet, soit $w_1(x)$ la variation totale de $\alpha_1(t)$ dans l'intervalle $0\leq t\leq x$. On a

$$\int_0^\infty e^{zt}dw_1(t)=\sum\int_{\lambda_{n-}}^{\lambda_{n+1}-}e^{zt}dw_1(t)=\sum\left|\int_{\lambda_{n-}}^{\lambda_{n+1}-}e^{zt}d\alpha_1(t)\right|=\sum A_{1n}e^{\lambda_n x}$$
$$(n=0,1,2,\ldots),$$

où l'on écrit $\lambda_0-=0$. Puisque

$$\left|\int_{\lambda_{n-}}^{\lambda_{n+1}-}e^{zt}d\alpha_1(t)\right|<e^{\lambda_{n+1}x}\{\alpha_1(\lambda_{n+1}-)-\alpha_1(\lambda_n+)\}=B_{1,n+1}e^{\lambda_{n+1}x},$$

la condition (8.1) entraîne que la série

$$\sum\left|\int_{\lambda_{n-}}^{\lambda_{n+1}-}e^{zt}d\alpha_1(t)\right| \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

est convergente partout. (8.4) est ainsi une conséquence de (1.4).

La condition nécessaire et suffisante pour que $F_1(z)$ soit convergente partout et par conséquent absolument convergente partout est que

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log A_{1n}}{\lambda_n}=-\infty, \tag{8.5}$$

ce que l'on supposera dorénavant. On voit que

$$F_1(z)=\int_0^\infty e^{zt}d\alpha_1(t)=\sum[\varepsilon_n A_{1n}e^{\lambda_n z}+B_{1,n-1}\gamma_{n-1}(z)e^{\lambda_{n-1}z}],$$
$$\varepsilon_n=\pm 1, \qquad \gamma_{n-1}(z)<1 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

et que les deux séries $\sum\varepsilon_n A_{1n}e^{\lambda_n z}$ et $\sum B_{1n}\gamma_n(z)e^{\lambda_n z}$ sont absolument convergentes partout. Donc, en posant $\gamma_0(z)=0$, on a

$$F_1(z)=\sum[\varepsilon_n A_{1n}+B_{1n}\gamma_n(z)]e^{\lambda_n z} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{8.6}$$

Posons

$$\mathcal{F}_1(z)=\Sigma A_{1n}e^{\lambda_n z} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8.7}$$

et supposons

$$\sqrt[\lambda_n]{B_{1n}}=o\left(\sqrt[\lambda_n]{A_{1n}}\right). \tag{8.8}$$

Évidemment (8.8) entraîne $B_{1n}=o(A_{1n})$ et $B_{1n}e^{-\lambda_n(D+1)}=o(A_{1n})$; ces deux expressions et (8.5) entraînent (8.1).

On utilise les notations du n° 1. En vertu de (8.6), (8.8) et (1.7), on a, quel que soit $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned} M(x, F_1) &< M(x, \mathcal{F}_1)+M(x, \Sigma_0(A_{1n})e^{\lambda_n z}) < (1+o(1))\,\mu\left(x+D+\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{F}_1\right) \\ &< \mu(x+D+\varepsilon, \mathcal{F}_1) \end{aligned} \tag{8.9}$$

pour x assez grand. D'autre part, supposons [1]

$$M(x, \Sigma\varepsilon_n A_{1n}e^{\lambda_n z}) = M(x, \Sigma\varepsilon_n A_{1n}e^{\lambda_n \bar{z}}), \qquad z=x+iy \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

En vertu de (1.6), (8.8) et (1.8), on a, pour x assez grand

$$\begin{aligned} M(x, F_1) &> |\Sigma\varepsilon_n A_{1n}e^{\lambda_n \bar{z}}-\Sigma B_{1n}\gamma_n(\bar{z})\,e^{\lambda_n z}| \\ &\geq M(x, \Sigma\varepsilon_n A_{1n}e^{\lambda_n \bar{z}})-M(x, \Sigma B_{1n}e^{\lambda_n z}) \\ &= \mu(x, \mathcal{F}_1)-M(x-D-1, \Sigma B_{1n}e^{-\lambda_n(D+1)}e^{\lambda_n z}) \\ &> \mu(x, \mathcal{F}_1)-\mu(x, \Sigma_0(A_{1n})\,e^{\lambda_n z}) \\ &= (1-o(1))\,\mu(x, \mathcal{F}_1) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

Donc, quel que soit $\varepsilon>0$,

$$M(x+\varepsilon, F_1)>\mu(x, \mathcal{F}_1) \tag{8.10}$$

pour x assez grand.

Au lieu des transformées de Laplace-Stieltjes des $\alpha_1(t)$ on peut considérer celles de certaines fonctions complexes, qui définissent aussi des fonctions holomorphes dans leur demi-plan de convergence. Soit

$$\alpha(t)=\alpha_1(t)+i\alpha_2(t). \tag{8.11}$$

où $\alpha_1(t)$ vérifie les conditions énoncées ci-dessus et $\alpha_2(t)$ est une fonction réelle vérifiant

$$|\alpha_2(t+\delta)-\alpha_2(t)| \leq K\,|\alpha_1(t+\delta)-\alpha_1(t)|, \qquad K=const.\geq 0, \tag{8.12}$$

pour chaque t, pourvu que $|\delta|$ soit assez petit. Évidemment $\alpha_2(t)$ est à variation bornée dans chaque intervalle $(0, T)$, $T>0$. Donc $\alpha(t)$ l'est aussi et $\alpha(\lambda_n+)$ et $\alpha(\lambda_n-)$ existent. De plus, on suppose que $\alpha_2(\lambda_n)$ se trouve entre $\alpha_2(\lambda_n-)$ et $\alpha_2(\lambda_n+)$. Considérons

$$F(z)=\int_0^\infty e^{zt}d\alpha(t)=\int_0^\infty e^{zt}d\alpha_1(t)+i\int_0^\infty e^{zt}d\alpha_2(t)=F_1(z)+iF_2(z). \tag{8.13}$$

[1] On modifie facilement le raisonnement dans le cas où cette borne supérieure n'est pas atteinte en un point à distance finie.

Par hypothèse,

$$\int_0^T e^{xt}|\,d\alpha(t)\,| \leq \sqrt{K^2+1}\int_0^T e^{vt}|\,d\alpha_1(t)\,|, \qquad T>0.$$

Donc $F(z)$ est absolument convergente partout et définit une fonction entière. On a

$$F_2(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\alpha_2(t)=\Sigma\{[\alpha_2(\lambda_n+)-\alpha_2(\lambda_n-)]+B_{1n}\gamma'_n(z)\}\,e^{\lambda_n z},$$
$$|\gamma'_n(z)|<K, \qquad \gamma'_0(z)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Par suite

$$(8.14)\quad F(z)=\Sigma\{\varepsilon_n A_{1n}+i[\alpha_2(\lambda_n+)-\alpha_2(\lambda_n-)]+B_{1n}[\gamma_n(z)+i\gamma'_n(z)]\}\,e^{\lambda_n z} \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

On a de même, quel que soit $\varepsilon>0$,

$$(8.15)\qquad M(x,F)<\mu(x+D+\varepsilon,\mathcal{F}_1)$$

pour x assez grand. D'autre part

$$M(x,\Sigma\{\varepsilon_n A_{1n}+i[\alpha_2(\lambda_n+)-\alpha_2(\lambda_n-)]\}\,e^{\lambda_n z})>\mu(x,\Sigma\{\varepsilon_n A_{1n}+i[\alpha_2(\lambda_n+)-\alpha_2(\lambda_n-)]\}\,e^{\lambda_n z})$$
$$=\mu(x,\Sigma\sqrt{A_{1n}^2+[\alpha_2(\lambda_n+)-\alpha_2(\lambda_n-)]^2}\,.\,e^{\lambda_n z})>\mu(x,\mathcal{F}_1) \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

On trouve, comme on a fait plus haut, que, quel que soit $\varepsilon>0$,

$$(8.16)\qquad M(x+\varepsilon,F)>\mu(x,\mathcal{F}_1)$$

pour x assez grand.

On peut également étudier la transformée de Laplace-Stieltjes de $\alpha_2(t)+i\alpha_1(t)$. On remarque que $F_1(z)$ est une fonction $F(z)$ particulière.

9. *Méthode de sommation et droites de Borel.* — Comme dans le Chapitre précédent, on peut étudier par la méthode de sommation les droites de Borel de $F(z)$ ou $F_1(z)$ d'ordre linéaire positif. On voit que $F(z)$, $F_1(z)$ et $\mathcal{F}_1(z)$ sont du même ordre linéaire $\tau>0$. Introduisons comme dans le n° 3 les fonctions $V_1(t)$ et $\Omega(t)$ au moyen de $\mu(x,\mathcal{F}_1)$. Il s'ensuit que $F(z)$, $F_1(z)$ *et* $\mathcal{F}_1(z)$ *sont au plus de l'ordre linéaire de* $W(x+D)$ *et au moins de l'ordre linéaire de* $W(x)$.

Considérons

$$(9.1)\qquad f_1(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,\Omega(t)\,d\alpha_1(t)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\nu_1(t),$$

où

$$\nu_1(t)=\int_0^t \Omega(u)\,d\alpha_1(u).$$

Évidemment $\nu_1(t)$ est monotone dans les intervalles $\lambda_n<t<\lambda_{n+1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, et l'on a

$$\nu_1(\lambda_n+)-\nu_1(\lambda_n)=\Omega(\lambda_n)[\alpha_1(\lambda_n+)-\alpha_1(\lambda_n)],$$
$$\nu_1(\lambda_n)-\nu_1(\lambda_n-)=\Omega(\lambda_n)[\alpha_1(\lambda_n)-\alpha_1(\lambda_n-)],$$
$$\nu_1(\lambda_{n+1}-)-\nu_1(\lambda_n+)=\Omega(\xi_{n+1})[\alpha_1(\lambda_{n+1}-)-\alpha_1(\lambda_n+)], \qquad \lambda_n\leq\xi_{n+1}\leq\lambda_{n+1}.$$

Donc $\varphi_1(\lambda_n)$ se trouve entre $\varphi_1(\lambda_n-)$ et $\varphi_1(\lambda_n+)$. D'ailleurs, en vertu de (3.8) et (3.1), on a, pour n assez grand,

$$\begin{aligned}\log|\varphi_1(\lambda_{n+1}-)-\varphi_1(\lambda_n+)| &= \log\Omega(\xi_{n+1})+\log B_{1,n+1}\\ &< \log 2\xi_{n+1}+\log\nu(\xi_{n+1})+\log B_{1,n+1}\\ &= \log 2\xi_{n+1}+\xi_{n+1}t_{n+1}-V(t_{n+1})+\log B_{1,n+1}\\ &\leq \log 2\lambda_{n+1}+\xi_{n+1}t_{n+1}-\log\mu(t_{n+1},\mathcal{F}_1)+\log B_{1,n+1}\\ &< \log 2\lambda_{n+1}-(\xi_{n+1}-\lambda_{n+1})t_{n+1}-\log A_{1,n+1}+\log B_{1,n+1}.\end{aligned}$$

(8.8) entraîne ainsi

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|\varphi_1(\lambda_{n+1}-)-\varphi_1(\lambda_n+)|}{\lambda_{n+1}}=-\infty. \tag{9.2}$$

D'autre part, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|\varphi_1(\lambda_n+)-\varphi_1(\lambda_n-)|}{\lambda_n}=0. \tag{9.3}$$

En effet,

$$\log|\varphi_1(\lambda_n+)-\varphi_1(\lambda_n-)|=\log\Omega(\lambda_n)+\log A_{1n}<\log 2\lambda_n-o(1).$$

En outre,

$$\begin{aligned}\log|\varphi_1(\lambda_n+)-\varphi_1(\lambda_n-)| &= \log\Omega(\lambda_n)+\log A_{1n}\\ &> \log\nu(\lambda_n)-\log 2\lambda_n+\log A_{1n}, \qquad \text{pour } n \text{ assez grand},\\ &> \lambda_n t-V(t)-\log 2\lambda_n+\log A_{1n}, \qquad \text{quel que soit } t,\\ &= \lambda_n t-\log\mu(t,\mathcal{F}_1)-\log 2\lambda_n+\log A_{1n}, \qquad \text{pour une suite de } t\to\infty,\\ &= -\log 2\lambda_n, \qquad \text{pour une suite de } n\to\infty.\end{aligned}$$

(9.3) est ainsi démontrée. En vertu de (9.2), (9.3) et (8.4), l'abscisse de convergence absolue, $x_a(f_1)$, de $f_1(z)$ se trouve entre $-D$ et o.

A la fonction $F(z)$ on associe

$$f(z)=\int_0^\infty e^{zt}\Omega(t)\,d\alpha(t)=\int_0^\infty e^{zt}\Omega(t)\,d\alpha_1(t)+i\int_0^\infty e^{zt}\Omega(t)\,d\alpha_2(t). \tag{9.4}$$

Puisque

$$\int_0^\infty e^{xt}\Omega(t)\,|\,d\alpha_1(t)\,|\leq\int_0^\infty e^{xt}\Omega(t)\,|\,d\alpha(t)\,|\leq\sqrt{K^2+1}\int_0^\infty e^{xt}\Omega(t)\,|\,d\alpha_1(t)\,|,$$

l'abscisse de convergence absolue, $x_a(f)$, de $f(z)$ est égale à $x_a(f_1)$. D'après le théorème de Fubini [11, p. 26], on trouve que, pour $\mathcal{R}(z)<x_a(f)$,

$$f(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\alpha(t)\int_1^\infty\frac{e^{tu}}{W(u)}\,du=\int_1^\infty\frac{du}{W(u)}\int_0^\infty e^{(u+z)t}\,d\alpha(t)=\int_1^\infty\frac{F(u+z)}{W(u)}\,du. \tag{9.5}$$

Suivant le raisonnement du n° 3 on arrive à un théorème analogue au théorème 3.1. On démontre, en tenant compte de ce théorème, deux propositions dont les énoncés correspondent à ceux des théorèmes 4.1 et 4.2.

On remarque que l'extension de la formule de M. M. Riesz (1) donne

(1) *Voir* le n° 12 ci-dessous.

l'abscisse du sommet de l'étoile horizontale de $f(z)$ appartenant à chaque droite horizontale et qu'elle donne donc des renseignements sur les droites de Borel de $F(z)$.

10. *Quelques théorèmes sur les singularités et leurs applications.* — Nous donnons ci-dessous des extensions d'un théorème de M. Fekete et d'un théorème de M. Cramér dont les démonstrations sont analogues à celles données dans le cas des séries de Dirichlet.

Théorème 10.1. — *Soit*

$$\beta(t)=\beta_1(t)+i\beta_2(t), \qquad 0\leq t<\infty, \tag{10.1}$$

où $\beta_1(t)$ est une fonction croissante et $\beta_2(t)$ est une fonction réelle vérifiant

$$|\beta_2(t+\delta)-\beta_2(t)|\leq K\,|\beta_1(t+\delta)-\beta_1(t)|, \qquad K=\text{const.}>0, \tag{10.2}$$

pour chaque t, pourvu que $|\delta|$ soit assez petit. Les droites de convergence et de convergence absolue de

$$g(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\beta(t)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\beta_1(t)+i\int_0^\infty e^{zt}\,d\beta_2(t) \tag{10.3}$$

coïncident et coupent l'axe réel en un sommet de l'étoile horizontale de $g(z)$.

Théorème 10.2. — *Soient $\beta(t)$, $(0\leq t<\infty)$, une fonction complexe à variation bornée dans chaque intervalle finie et $\theta(z)$ une fonction holomorphe dans tout le plan vérifiant*

$$\log|\theta(z)|<(k+\varepsilon)|z|, \qquad \varepsilon>0, \qquad |z|>Z(\varepsilon), \qquad k\geq 0. \tag{10.4}$$

Si la transformée de Laplace-Stieltjes

$$g(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\beta(t),$$

dont l'abscisse de convergence est finie, définit une fonction $g(z)$ holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ sur une surface de Riemann et si $\mathcal{D}_k$ désigne le domaine intérieur à $\mathcal{D}$ et d'un seul tenant avec le demi-plan $\mathcal{R}(z)<c-k$, et dont les points sont situés à une distance supérieure à k de la frontière de $\mathcal{D}$, l'intégrale

$$\Phi(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,\theta(t)\,d\beta(t)$$

converge pour $\mathcal{R}(z)<c-k$ et définit une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}_k$.

Le théorème 10.1 et les résultats du numéro précédent conduisent à cette proposition :

Théorème 10.3. — *Si $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ vérifient les conditions énoncées au n° 8 et si $\alpha_1(t)$ est une fonction croissante,* $F(z)$ *admet, dans le cas $0<\tau<\infty$, une*

droite de Borel dans la bande $|y| \leq \frac{\pi}{2\tau}$, *et, dans le cas* $\tau = \infty$, *l'axe des* x *comme droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x - x_c)$, $x_c = x_c(f)$.

On peut étendre quelques théorèmes de M. Biggeri [2, *a* et *b*] aux transformées de Laplace-Stieltjes et en tirer des résultats sur les droites de Borel. On peut également étendre des autres théorèmes sur les singularités des séries de Dirichlet aux transformées de Laplace-Stieltjes particulières et obtenir ainsi, par exemple, des théorèmes pour $F(z)$ correspondant aux théorèmes 4.3 et 4.4.

Au moyen du théorème 10.2, on peut comparer les droites de Borel de $F(z)$ et celles de sa transformée de Cramér

$$\Psi(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, \theta(t)\, d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{zt}\, d\omega(t), \qquad \omega(t) = \int_0^t \theta(u)\, d\alpha(u), \tag{10.5}$$

où $\theta(z)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan vérifiant (10.4) et

$$\log|\theta(x)| > -(k+\varepsilon)x, \qquad \varepsilon > 0, \qquad x > Z(\varepsilon), \qquad k \geq 0. \tag{10.6}$$

On voit que $\Psi(z)$ définit une fonction entière. En effet, on a

$$\left|\int_{Z(\varepsilon)}^\infty e^{zt}\, d\omega(t)\right| = \left|\int_{Z(\varepsilon)}^\infty e^{zt}\, \theta(t)\, d\alpha(t)\right| < \int_{Z(\varepsilon)}^\infty e^{(x-k+\varepsilon)t}\, d\alpha(t).$$

$\Psi(z)$ est donc absolument convergente partout.

De la même manière qu'au n° 8, on trouve que

$$\Psi(z) = \sum \{\theta(\lambda_n)[\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)] + w_n(z)\,\theta(\xi_n)\,B_{1n}\}\, e^{\lambda_n z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10.7}$$

$$w_0(z) = 0, \qquad |w_n(z)| < \sqrt{k^2+1}, \qquad \lambda_n \leq \xi_{n+1} \leq \lambda_{n+1}.$$

Par hypothèse,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_{1n}} \leq \sqrt[\lambda_n]{|\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)|} < \sqrt[2\lambda_n]{k^2+1}\ \sqrt[\lambda_n]{A_{1n}},$$

$$\sqrt[\lambda_n]{|\theta(\xi_n)|\, B_{1n}} = o\left(\sqrt[\lambda_n]{|\theta(\lambda_n)|\,|\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)|}\right).$$

En posant

$$\mathcal{G}(z) = \sum |\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)|\, |\theta(\lambda_n)|\, e^{\lambda_n z}, \tag{10.8}$$

qui est convergente partout, on démontre que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$M(x, \Psi) < \mu(x + D + \varepsilon, \mathcal{G}), \qquad M(x+\varepsilon, \Psi) > \mu(x, \mathcal{G}) \tag{10.9}$$

pour x assez grand. En vertu de (10.4) et (10.6),

$$\mu(x, \mathcal{G}) > \mu(x - k - \varepsilon, \mathcal{F}_1), \qquad \mu(x, \mathcal{G}) < \mu(x + k + \varepsilon, \mathcal{F}_1) \tag{10.10}$$

pour x assez grand. Par suite, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$M(x, \Psi) < \mu(x + D + k + \varepsilon, \mathcal{F}_1) < W(x + D + k + \varepsilon) \tag{10.11}$$

pour x assez grand et

$$M(x, \Psi) > \mu(x - k - \varepsilon, \mathcal{F}_1) = W(x - k - \varepsilon) \tag{10.12}$$

pour une suite de x tendant vers l'infini. Donc $\Psi(z)$ *est au plus de l'ordre linéaire de* $W(x+D+k)$ *et au moins de l'ordre linéaire de* $W(x-k)$.

A la fonction $\Psi(z)$ on associe

$$\psi(z)=\int_0^{\infty} e^{zt}\alpha(t)\,\Omega(t)\,d\alpha(t), \tag{10.13}$$

qui est évidemment une transformée de Cramér de $f(z)$ et dont l'abscisse de convergence absolue $x_a(\psi)$ vérifie les inégalités suivantes :

$$x_a(f)-k\leq x_a(\psi)\leq x_a(f)+k. \tag{10.14}$$

Par un raisonnement analogue à celui du n° 5 et en tenant compte de (10.11) et (10.12), on démontre deux théorèmes dont les énoncés correspondent à ceux des premières parties des théorèmes 5.1 et 5.2, et un théorème dont l'énoncé correspond à celui du théorème 5.3.

11. *Fonctions entières associées à certaines transformées de Laplace-Stieltjes ayant une abscisse finie de convergence absolue.* — On étend maintenant à certaines transformées de Laplace-Stieltjes le problème étudié dans le n° 6. On considère une transformée

$$g(z)=\int_0^{\infty} e^{zt}\,d\beta(t)=\int_0^{\infty} e^{zt}\,d\beta_1(t)+i\int_0^{\infty} e^{zt}\,d\beta_2(t)=g_1(t)+ig_2(t) \tag{11.1}$$

ayant une abscisse de convergence absolue $x_a(g)=C$, où $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ sont des fonctions réelles satisfaisant aux hypothèses suivantes :

1° $\beta_1(t)$ est une fonction monotone dans les intervalles $\lambda_n<t<\lambda_{n+1}$, tels que la suite $\{\lambda_n\}$ soit croissante avec $\lambda_0=0$ et vérifiant (1.2);

$$2^{\circ}\quad |\beta_2(t+\delta)-\beta_2(t)|\leq K'\,|\beta_1(t+\delta)-\beta_1(t)|, \qquad K'=\text{const.}>0; \tag{11.2}$$

pour chaque t, pourvu que $|\delta|$ soit assez petit;

3° $\beta_1(\lambda_n)$ se trouve entre $\beta_1(\lambda_n-)$ et $\beta_1(\lambda_n+)$ et $\beta_2(\lambda_n)$ se trouve entre $\beta_2(\lambda_n-)$ et $\beta_2(\lambda_n+)$;

$$4^{\circ}\quad \lim_{n=\infty}\frac{\log E_{1n}}{\lambda_n}=-\infty, \qquad E_{1n}=|\beta_1(\lambda_n-)-\beta_1(\lambda_{n-1}+)|. \tag{11.3}$$

On voit que les abscisses de convergence absolue de $g_1(z)$ et de $g(z)$ sont égales et que l'on a

$$-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log C_{1n}}{\lambda_n}-D\leq C\leq-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log C_{1n}}{\lambda_n}, \qquad C_{1n}=|\beta(\lambda_n+)-\beta_1(\lambda_n-)|. \tag{11.4}$$

Soit $V_1(t)$ une fonction croissante continue définie pour $t\geq 1$ telle que (6.3) soit vérifiée, que $\frac{V_1(x)}{x}$ soit non décroissante et que

$$E_{1n}\Omega(\lambda_n)=o[C_{1n}\Omega_1(\lambda_{n-1})]. \tag{11.5}$$

Construisons une suite $\{\mu_n\}$ et introduisons la fonction $\Phi(z)$ comme dans le n° 6. Considérons

$$(11.6)\quad G(z)=\int_0^\infty \frac{e^{zt}}{\Omega_1(t)}\,d\beta(t), \qquad \mathcal{G}_1(z)=\sum \frac{C_{1n}}{\Omega_1(\lambda_n)}\,e_{\lambda_n z} \qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

qui sont absolument convergentes partout et définissent *deux fonctions entières*. Suivant les raisonnements des n^{os} 8 et 6, on trouve que

$$(11.7)\quad G(z)=\Sigma\left\{\frac{\varepsilon'_n C_{1n}}{\Omega_1(\lambda_n)}+i\frac{[\beta_2(\lambda_n+)-\beta_2(\lambda_n-)]}{\Omega_1(\lambda_n)}+\frac{E_{1n}[\gamma''_n(z)+i\gamma'''_n(z)]}{\Omega_1(\lambda_{n-1})}\right\}e^{\lambda_n z},$$

$$\varepsilon'_n=\pm 1, \qquad |\gamma''_n(z)|<1, \qquad |\gamma'''_n(z)|<K', \qquad \gamma''_0(z)=\gamma'''_0(z)=0 \qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

et que, quel que soit $\varepsilon>0$,

$$(11.8)\qquad M(x,\,G)<\Phi(x+D-C+2\varepsilon)<W_1(x+D-C+K+3\varepsilon)$$

pour x assez grand et

$$(11.9)\qquad M(x,\,G)>W_1(x-2D-C-3\varepsilon)>\Phi(x-2D-C-K-4\varepsilon)$$

pour une suite de x tendant vers l'infini, où K est la constante définie dans le n° 6.

Si $K(z)<C$, on pourra écrire

$$(11.10)\qquad g(z)=\int_1^\infty \frac{G(t+z)}{W_1(t)}\,dt.$$

En comparant (11.10) et (6.12), on obtient deux théorèmes pour $G(z)$ analogues aux théorèmes 6.2 et 6.3.

La remarque faite sur le n° 6 s'applique encore au cas que l'on considère ici.

12. *Extension d'une méthode de sommation de M. M. Riesz et ses applications.* — On peut étendre dans le cas des transformées de Laplace-Stieltjes une méthode de sommation de MM. Riesz et ses applications que l'on a étudiée au n° 7. Pour établir cette extension on trouve d'abord une proposition pour les intégrales de Stieltjes correspondant à celle de M. O. Perron [8] pour les séries.

Considérons la transformée de Laplace-Stieltjes

$$(12.1)\qquad f(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\omega(t),$$

où $\omega(t)$ est une fonction à variation bornée dans chaque intervalle finie $(0,\,R)$. Elle possède une abscisse finie de convergence. On lui associe l'intégrale

$$(12.2)\qquad \mathcal{F}_\tau(z)=\int_0^\infty \frac{e^{zt}\,d\omega(t)}{\Gamma\left(1+\frac{t}{\tau}\right)}, \qquad \tau=\text{const.}>0,$$

qui est *absolument convergente partout* et qui tend vers $\overline{f}(z)$ dans le domaine de convergence de $\overline{f}(z)$ lorsque $\tau \to \infty$.

Comme dans le cas des séries de Dirichlet, on démontre d'abord, en appliquant une proposition correspondant à celle de M. Perron mentionnée ci-dessus, que, *dans le demi-plan de convergence absolue de* $\overline{f}(z)$, *on a*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \overline{\mathcal{F}}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt, \tag{12.3}$$

et l'on arrive ensuite au théorème suivant :

Théorème 12.1. — *L'abscisse* $x(y)$ *du sommet de l'étoile horizontale de* $\overline{f}(z)$ *qui appartient à la droite* $\mathcal{I}(z) = y$ *est donnée par la formule*

$$x(y) = -\lim_{\tau=\infty} \overline{\lim_{n=\infty}} \left[\frac{1}{\tau} \log \log \overline{\mathcal{F}}_\tau(-u + iy) - u\right]. \tag{12.4}$$

Considérons la transformée $g(z)$ étudiée dans le numéro précédent, pour laquelle $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ vérifient de plus la relation suivante :

$$E_{1n}\Gamma(\lambda_n) = o[C_{1n}\Gamma(\lambda_{n-1})]. \tag{12.5}$$

A la fonction $g(z)$ associons

$$\mathcal{G}_\tau(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}\, d\beta(t)}{\Gamma\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)}, \qquad \tau = \text{const.} > 0, \tag{12.6}$$

qui *définit une fonction entière d'ordre linéaire fini positif* τ. Nous avons, pour $\mathcal{R}(z) < C$,

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \mathcal{G}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt. \tag{12.7}$$

En utilisant les calculs du n° 11 et en comparant (12.7) avec (7.4), nous établissons un théorème correspondant au théorème 7.1.

Réciproquement, considérons une transformée de Laplace-Stieltjes absolument convergente partout

$$\mathcal{G}_\tau(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, d\gamma(t) = \int_0^\infty e^{zt}\, d\gamma_1(t) + i \int_0^\infty e^{zt}\, d\gamma_2(t), \tag{12.8}$$

où $\gamma(t)$ vérifie les mêmes conditions que $\alpha(t)$ dans le n° 8 et la relation

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lambda_n}{\tau e} \left(\sqrt[\lambda_n]{H_{1n}}\right)^\tau = 1, \qquad H_{1n} = \gamma_1(\lambda_n +) - \gamma_1(\lambda_n -), \qquad \tau = \text{const.} > 0. \tag{12.9}$$

$\mathcal{G}_\tau(z)$ *définit évidemment une fonction entière du type* 1 *de l'ordre linéaire fini positif* $\tau > 0$.

Introduisons la transformée

$$\bar{g}(z)=\int_a^{\infty} e^{zt}\Gamma\left(1+\frac{t}{z}\right)d\beta(t). \tag{12.10}$$

Suivant les calculs du n° 9 on trouve que $x_a(\bar{g})=0$. En écrivant

$$\bar{g}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t}\bar{\varphi}\left(z+\frac{t}{z}\right)e^t\,dt. \tag{12.11}$$

et en la comparant avec (7.4), on prouve un théorème dont l'énoncé correspond à celui du théorème 7.2.

II. — Séries d'exponentielles complexes.

13. *Préliminaires* [4 et 10, *c*]. — Considérons une série d'exponentielles complexes

$$F(z)=\Sigma a_n e^{\nu_n z}, \qquad \nu_n=\lambda_n e^{i\tau_n}, \qquad \lambda_n\geq 0, \qquad 0\leq\tau_n<2\pi, \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{13.1}$$

dont le domaine de convergence absolue est un domaine convexe. Posons $|a_n|=A_n$ et traçons les droites D_n

$$\mathcal{R}\left(\frac{-\nu_n z}{\log A_n}\right)=1.$$

Désignons par $\delta_n(z)$ la distance algébrique de z à D_n, cette distance étant comptée positivement lorsque z se trouve du côté de D_n qui contient le point à l'infini de la direction d'argument $-\tau_n$. Les points z pour lesquels $\delta_n(z)<0$, $|\delta_n(z)|>\delta(z)>0$, $n>n[\delta(z)]$ constituent un domaine convexe Δ. Hors de ce domaine et de sa frontière la série (13.1) est divergente. Si la condition (1.2) est vérifiée avec $D=0$, cette série converge absolument et uniformément dans tout domaine complètement intérieur à celui-ci et elle y définit donc une fonction holomorphe. Sous cette condition, pour que (13.1) soit absolument convergente partout et définisse donc une fonction entière il faut et il suffit que la condition (1.5) soit vérifiée.

On supposera que les nombres λ_n sont non décroissants, que

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{n}{\lambda_n}=H<\infty \tag{13.2}$$

et que les conditions (E) suivantes ont lieu :

1° Le nombre des λ_n compris entre x et $x+1$ est inférieur à un nombre K fixe;

2° A partir d'une valeur n, $|\nu_{n+p}-\nu_n|>e^{-\lambda_n\delta}$, $0<\delta<1$, si $\lambda_{n+p}-\lambda_n<1$.

On remarque que la condition (E) 1° entraîne (13.2) avec $H\leq K$ et que

(13.2) entraîne (1.2) avec D = 0. En outre, on supposera que (1.5) est vérifiée. $F(z)$ *est ainsi une fonction entière.*

En désignant par $m(r, F)$ le module du terme de plus grand module de (13.1) pour $|z| = r$ et par $M(r, F)$ le maximum de $|F(re^{i\varphi})|$ pour $0 \leq \varphi < 2\pi$. M. Valiron [10, *e*] a démontré que, les conditions (1.5), (13.2) et les conditions (E) étant vérifiées, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$ et pour r assez grand

$$M(r, F) < m(r + \varepsilon, F), \tag{13.3}$$

$$M(r, F) > m(r - H', F), \tag{13.4}$$

H' étant un nombre positif fixe, qui dépend de H et de K et qui est arbitrairement petit quand $H = 0$. Il a défini *l'ordre en* e^r *de* $F(z)$ par le nombre

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r, \rho)}{r}$$

et a indiqué la définition de la croissance régulière et des notions qui s'y rattachent, et des théorèmes concernant la relation entre $M(r, F)$ et les suites $\{a_n\}$ et $\{\nu_n\}$. On peut définir, comme dans le n° 3, l'ordre de $F(z)$ en comparant $M(r, F)$ avec une fonction réelle.

14. *Méthode de sommation et droites de Borel.* — On étudie ici, avec la méthode de sommation de M. Valiron, les droites de Borel de $F(z)$ d'ordre fini positif ρ en e^r. On définit une fonction réelle $V(r)$ pour $r \geq 1$ comme suit :

Soit $\{\tau_{1n}\}$ une suite positive décroissante tendant vers zéro et G une constante supérieure à H', si l'on a, quels que soient $r(> R_0)$ et n,

$$\log m(r, F) > e^{(\rho - \tau_{1n})r},$$

on prend

$$V(r + H' - G) = \log m(r, F).$$

Dans le cas contraire, on a une suite $\{r_n\}$ indéfiniment croissante pour laquelle

$$\log m(r_n, F) = e^{(\rho - \tau_{1n})r_n}.$$

Dans chaque intervalle (r_n, r_{n+1}), on prend $V(r + H' - G)$ égale au plus grand des deux nombres $\log m(r, F)$ et $e^{(\rho - \tau_{1n})r}$. On prend $H' = 0$ si $H = 0$.

En posant $W(r) = \exp V(r)$ on voit que $F(z)$ *est au plus de l'ordre de* $W(r + H' - G)$ *et au moins de l'ordre de* $W(r - G)$. *Dans le cas* $H = 0$, $F(z)$ *est de l'ordre de* $W(r - G)$.

Comme dans le n° 3, on démontre deux relations analogues aux (3.5) et (3.6). Introduisons la fonction

$$\Omega(u) = \int_1^u \frac{e^{ut}}{W(t)} dt. \tag{14.1}$$

Il s'ensuit que

$$\Omega(\nu_n) \leq \int_1^\infty \frac{e^{\lambda_n t}}{W(t)}\,dt < 2\lambda_n \nu(\lambda_n), \tag{14.2}$$

dès que n est assez grand, où $\nu(u)$ étant le maximum de $\frac{e^{ut}}{W(t)}$, u étant réel.

A la fonction $F(z)$ on associe la série

$$f(z) = \Sigma a_n \Omega(\nu_n) e^{\gamma_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{14.3}$$

qui a un domaine $\mathcal{D}$ de convergence absolue contenant dans son intérieur $z = 0$, puisqu'on a, en tenant compte de (14.2),

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_n \Omega(\nu_n)}{\lambda_n} \leq H' - G < 0.$$

Pour $z \in \mathcal{D}$, on a

$$f(z) = \sum a_n e^{\gamma_n z} \int_1^\infty \frac{e^{\gamma_n t}\,dt}{W(t)} = \sum \int_1^\infty \frac{a_n e^{\gamma_n (z+t)}}{W(t)}\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui converge absolument et uniformément dans tout domaine complètement intérieur à $\mathcal{D}$. Il en résulte que

$$f(z) = \int_1^\infty \frac{F(z+t)}{W(t)}\,dt. \tag{14.4}$$

Suivant le raisonnement du n° 3, on trouve la proposition suivante :

THÉORÈME 14.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un point singulier de $f(z)$ provenant du prolongement analytique horizontal à partir de $\mathcal{D}$, il existe une suite de points $z_n = x_n + iy_n$ telle que $x_n \to \infty$, $y_n \to y_0$ et que*

$$|F(z_n)| > W(x_n - x_0 - o(1)). \tag{14.5}$$

Le théorème précédent conduit à ce résultat :

THÉORÈME 14.2. — *Si $F(z)$ est d'ordre fini positif ρ en e^t et si z_0 est une singularité définie ci-dessus, il existe une droite de Borel de $F(z)$ parallèle à la direction ox dans la bande $|y - y_0| \leq \frac{\pi}{2\rho}$.*

Démonstration. — On considère la transformation (T_x) comme dans la démonstration du théorème 4.1. Posons également $\Phi(\zeta)$ et $\overline{M}(\zeta, \Phi)$ tout en remplaçant $\zeta = \rho e^{i\theta}$ par $\zeta = s e^{i\theta}$. On a

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(s, \Phi)}{\log s} \geq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log |F(z_n)|}{\log e^{\alpha_1 x_n - \alpha_1 x_0}} \geq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log V(x_n - x_0 - o(1))}{\alpha(x_n - x_0)} = \frac{\rho}{\alpha} > 1.$$

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(s, \Phi)}{\log s} \leq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log M\left(\sqrt{x^2 + \left(y_0 + \frac{\pi}{2\alpha}\right)^2}, F\right)}{\log e^{\alpha_1 x_n - \alpha_1 x_0}} = \frac{\rho}{\alpha}.$$

Donc

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log\log \mathrm{M}(s,\Phi)}{\log s} = \frac{\rho}{\alpha} > 1.$$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème établit notre proposition.

On peut étudier les droites de Borel de $\mathrm{F}(z)$ parallèles à une direction *quelconque* $\varphi = \varphi_0$ en considérant celles de

$$\mathrm{F}(e^{-i\varphi_0}z) = \Sigma a_n \exp(\nu_n e^{-i\varphi_0}z) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

parallèles à la direction ox. A $\mathrm{F}(e^{-i\varphi_0}z)$ on associe la série

$$f(e^{-i\varphi_0}z) = \Sigma a_n \Omega(\nu_n) \exp(\nu_n e^{-i\varphi_0}z) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Du théorème 14.2, il résulte que

Théorème 14.3. — *Si* $\mathrm{F}(z)$ *est d'ordre fini* $\rho > 0$ *en* e^{ν} *et si* z_0 *est une singularité de* $f(z)$ *provenant du prolongement analytique le long des droites passant par* $\mathcal{D}$ *et parallèles à la direction* $\varphi = \varphi_0$, *il existe une droite de Borel de* $\mathrm{F}(z)$ *parallèle a cette direction dans la bande*

$$z = z_0 + r e^{i\varphi_0} + i e^{i\varphi_0} t, \qquad r > 0, \qquad -\frac{\pi}{2\rho} \leq t \leq \frac{\pi}{2\rho}. \tag{14.6}$$

Le théorème précédent et un théorème de M. Ritt [9, *a*] (1) conduisent à la proposition suivante :

Théorème 14.4. — *Si* $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ *est convergente* (2), *si*

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1 + \frac{k}{n}, \qquad k > 0,$$

pour n assez grand, et si $\mathrm{F}(z)$ *est d'ordre fini* $\rho > 0$ *en* e^{ν}, *correspondant à chaque droite ayant un point commun* z_0 *avec la frontière de* $\mathcal{D}$ *et parallèle à une direction* $\varphi = \varphi_0$, *il existe une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande* (14.6).

M. E. Hille [4] a généralisé le théorème de M. Cramér dans le cas des séries d'exponentielles complexes. Considérons la transformée de Cramér de $\mathrm{F}(z)$

$$\Psi(z) = \Sigma a_n \vartheta(\nu_n) e^{\nu_n z}, \tag{14.7}$$

où $\vartheta(z)$ est une fonction entière pour laquelle il existe une constante $k \geq 0$ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a, pour $|z|$ et n assez grands,

$$\log|\vartheta(z)| < (k+\varepsilon)|z|, \qquad \log|\vartheta(\nu_n)| > -(k+\varepsilon)\lambda_n. \tag{14.8}$$

(1) Ce théorème a été généralisé par M. Valiron [10, *c*]. De ce théorème généralisé on pourra déduire une proposition correspondant au théorème 14.4.

(2) Cette condition entraîne évidemment $\mathrm{H} = 0$.

$\Psi(z)$ *définit une fonction entière au plus de l'ordre de* $W(r+H'-G+k)$ *et au moins de l'ordre de* $W(r-G-k)$.

La transformée de Cramér de $f(z)$

$$\psi(z)=\Sigma a_n\theta(\nu_n)\Omega(\nu_n)e^{\nu_n z} \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{14.9}$$

converge absolument et uniformément dans chaque domaire complètement intérieur à $\mathcal{D}_k$, où $\mathcal{D}_k$ désigne le domaine intérieur à $\mathcal{D}$ dont les points ont une distance supérieure à k de la frontière de $\mathcal{D}$. Lorsque $z\in\mathcal{D}_k$, on peut écrire

$$\psi(z)=\int_1^\infty \frac{\Psi(z+t)}{W(t)}\,dt. \tag{14.10}$$

Suivant le raisonnement du n° 5, on établit les deux propositions :

Théorème 14.5. — *Si* $F(z)$ *est sa transformée de Cramér* $\Psi(z)$ *sont d'ordre fini* $\rho>0$ *en* e^r *et si* $z_0=x_0+iy_0$ *est une singularité de* $\psi(z)$ *provenant du prolongement analytique le long des droites passant par* $\mathcal{D}_k$ *et parallèle à la direction* φ_0, $F(z)$ *admet une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande*

$$z=\bar{z}_0+re^{i\varphi_0}+ie^{i\varphi_0}t, \qquad r>0, \qquad -k-\frac{\pi}{2\rho}\leq t\leq k-\frac{\pi}{2\rho}. \tag{14.11}$$

et $\Psi(z)$ *admet une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande*

$$z=\bar{z}_0+re^{i\varphi_0}+ie^{i\varphi_0}t, \qquad r>0, \qquad -\frac{\pi}{2\rho}\leq t\leq\frac{\pi}{2\rho}. \tag{14.12}$$

Théorème 14.6. — *Si* $F(z)$ *sont d'ordre fini* $\rho>0$ *en* e^r *et si* $z_0=x_0+iy_0$ *est une singularité de* $f(z)$ *provenant du prolongement analytique le long des droites passant par* $\mathcal{D}$ *et parallèles à la direction* φ_0, $F(z)$ *et toutes ses dérivées admettent une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande* (14.6).

Remarque 1. — Comme dans le cas des séries de Dirichlet, on peut construire la fonction $V(r)$ au moyen de $M(r, F)$ au lieu de $m(r, F)$ et les résultats ainsi obtenus sont analogues à ceux énoncés ci-dessus.

Remarque 2. — La méthode de sommation ne s'applique pas à la recherche des droites de Borel d'une fonction d'ordre infini en e^r à moins qu'il existe une singularité de la fonction associée sur l'axe des x. Dans le cas général, on ne peut pas arriver à une contradiction comme celle que l'on a obtenue dans la démonstration du théorème 4.2.

Remarque 3. — Si le domaine de convergence absolue de $f(z)$ est le plan entier sauf le point à l'infini, la méthode de sommation n'est plus valable. Il faudrait donc ajouter une condition supplémentaire pour que

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log A_n\ \Omega(\nu_n)}{\lambda_n}>-\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet* (Paris, Gauthier-Villars, 1933).

[2] C. Biggeri, *a. Sur les séries de Dirichlet dont les abscisses de convergence simple et absolue sont égales* (*Bull. Soc. Math. France*, 66, 1938, p. 56-68).

b. Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des séries de Dirichlet (*Comptes rendus Acad. Sc., Paris*, 209, 1939, p. 979-980).

[3] G. Doetsch, *Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden* (*Math. Zeitschrift*, 8, 1920, p. 237-240).

[4] E. Hille, *Note On Dirichlet series with complex exponents* (*Annals of Math.*, 2e série, 26, 1924, p. 261-278).

[5] S. Mandelbrojt, *Dirichlet series* (*The Rice Institute Pamphlet*, 31, nº 4, 1944).

[6] S. Mandelbrojt et J. Gergen, *On entire functions definited by a Dirichlet series* (*Amer. Jour. Math.*, 53, 1931, p. 1-14).

[7] R. E. A. C. Paley et A. Zygmund, *On some series of functions* (1), (2), (3) (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 26, 1930, p. 337-357 et 458-474; 28, 1932, p. 190-205).

[8] O. Perron, *Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen* (*Math. Zeitschrift*, 6, 1920, p. 286-310).

[9] J. F. Ritt, *a. On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 18, 1917, p. 27-49).

b. On certain points in the theory of Dirichlet series (*Amer. Jour. Math.*, 50, 1929, p. 37-86).

[10] G. Valiron, *a. Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, Édouard Privat, 1923; nouveau tirage, New-York, Chelsea, 1949).

b. Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes (*Acta Mathematica*, 52, 1928, p. 67-92).

c. Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants (*Annales École Norm. Sup.*, 46, 1929, p. 25-53).

d. Méthodes de sommation et directions de Borel (*Annali R. Scoula Norm. Sup. Pisa*, 2e série, 2, 1933, p. 355-380).

e. Croissance et zéros des fonctions entières définies par certaines séries d'exponentielles (*Tôhoku Math. Jour.*, 1933, p. 358-374.

f. Functions and Borel's directions (*Proc. Nat. Acad. Sc. entire, U. S. A.*, 20, 1934, p. 211-215).

g. Directions de Borel des fonctions méromorphes (*Mémorial Sc. Math.*, fasc. 89, 1938).

[11] D. V. Widder, *The Laplace transforme* (Princeton Univ. Press, 1946).

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LA SÉRIE DE TAYLOR

PAR MM. J. DUFRESNOY ET CH. PISOT.

Le présent travail ne contient pas de résultats essentiellement nouveaux. Mais on y trouvera rattachées de la façon la plus étroite des considérations éparses dans la littérature mathématique.

Notre étude a comme point de départ la transformation de Laplace-Borel, dont nous rappelons quelques propriétés dans la première Section, avec les relations, signalées par M. Pólya (1), qu'elle permet d'établir entre les séries de puissances et les fonctions entières du type moyen d'ordre 1. L'étude détaillée de ces relations fait l'objet de la seconde Section, où figurent, entre autres, les résultats qui servent de base à la méthode de prolongement analytique de M. Émile Borel (2).

Dans la suite, ou bien nous partons de propriétés des séries de puissances et nous en déduisons des propriétés des fonctions entières du type moyen d'ordre 1, ou bien nous opérons en sens inverse. C'est cette correspondance de propriétés qui forme l'essentiel du présent travail.

La facilité avec laquelle les résultats se présentent nous a incités à publier cette rapide synthèse, qui est à la base de nos recherches en cours.

1. *Transformation de Laplace-Borel.* — Rappelons rapidement quelques propriétés classiques qui joueront un rôle fondamental dans la suite.

Nous désignerons toujours par $f(z)$ une fonction entière du type moyen d'ordre 1 au plus, c'est-à-dire telle que $\limsup_{|z|=\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|}$ ait une valeur finie.

(1) *Math. Zeitschr.*, 29, 1929, p. 549-640.

(2) E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes.*

Nous introduirons, avec M. Pólya, la fonction

$$\alpha(\varphi) = \limsup_{r=\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r}$$

et nous considérerons la courbe I d'équation polaire $\rho = \alpha(\varphi)$, appelée indicatrice de croissance.

Il est clair que, $s = |s| e^{i\omega}$ étant un nombre complexe, l'intégrale

$$l_\varphi(s) = \int e^{-sz} f(z)\, dz,$$

prise le long de la demi-droite ayant $z = 0$ comme origine et φ comme angle polaire, est convergente si s est situé dans le demi-plan défini par

$$|s| \cos(\omega + \varphi) > \alpha(\varphi).$$

La fonction $l_\varphi(s)$ est holomorphe dans ce demi-plan. La réunion des demi-plans correspondant à toutes les valeurs de φ est le complémentaire d'un domaine D borné convexe limité par une courbe fermée C. Cette courbe est la symétrique par rapport à l'axe réel de l'antipodaire de I relative à l'origine.

Les fonctions $l_\varphi(s)$ coïncident avec une seule et même fonction $l(s)$ holomorphe à l'extérieur de C, point à l'infini compris, et $l(\infty) = 0$; elle est, par suite, uniforme à l'extérieur de C.

D'ailleurs, si $f(z)$ a pour développement en série de puissances

$$f(z) = u_0 + \frac{u_1}{1!} z + \ldots + \frac{u_n}{n!} z^n + \ldots,$$

la fonction $l(s)$ a pour développement au voisinage de $s = \infty$

$$l(s) = \frac{u_0}{s} + \frac{u_1}{s^2} + \ldots + \frac{u_n}{s^{n+1}} + \ldots.$$

Il en résulte que si L est une courbe fermée quelconque entourant C, ou plus généralement un nombre fini de courbes rectifiables fermées, sans point double, extérieures les unes aux autres, telles que $l(s)$ soit holomorphe et uniforme à l'extérieur de L et sur L, alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zs} l(s)\, ds.$$

Une fonction $l(s)$ holomorphe et nulle à l'infini, donnée *a priori*, correspond à une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus et la correspondance est biunivoque entre les fonctions $f(z)$ et $l(s)$. La dernière formule donnée permet de limiter la croissance de $f(z)$ connaissant la courbe L. On a

$$|f(z)| < K \operatorname*{Max}_{s \text{ sur L}} |e^{zs}|, \qquad \text{soit} \quad |f(re^{i\varphi})| < K \operatorname*{Max}_{s \text{ sur L}} e^{r|s|\cos(\omega+\varphi)}$$

en posant $s = |s| e^{i\omega}$, d'où $\alpha(\varphi) \leq \lambda(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$ étant la plus grande abscisse de la projection de L sur l'axe d'angle polaire $-\varphi$.

Remarque. — A la fonction $f_1(z)=f'(z)$ correspond $l_1(s)=sl(s)-u_0$; il en résulte qu'en général $f'(z)$ a même indicatrice de croissance que $f(z)$ (1).

LEMME 1. — *Soit $\Phi(\sigma)$ une fonction continue de σ sur une courbe Γ de longueur finie (fermée ou non, pouvant être formée d'un nombre fini de morceaux distincts). La fonction $f(z)=\int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$ est une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus, dont la transformée de Laplace-Borel est $l(s)=\int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma}$.*

En effet, vu son comportement à l'infini, cette fonction $l(s)$ est la transformée de Laplace-Borel d'une certaine fonction entière $f^*(z)$ et l'on a

$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}\left(\int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma}\right)ds,$$

L étant une courbe fermée (de longueur finie) entourant Γ. On peut intervertir les intégrations et l'on obtient

$$f^*(z)=\int_\Gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{zs}\,ds}{s-\sigma}\right)\Phi(\sigma)\,d\sigma=\int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma=f(z).$$

Conséquence. — La fonction $f(z)$ a une transformée de Laplace-Borel holomorphe dans toute la région du plan des s, que l'on peut atteindre à partir de $s=\infty$ sans traverser Γ.

Définition. — Nous appellerons dorénavant « extérieur d'une courbe relativement au point P » la région formée des points que l'on peut atteindre à partir de P par un chemin continu ne traversant pas la courbe.

2. *Séries de puissances et fonctions entières.* — Soit

$$g(\zeta)=a_0+a_1\zeta+\ldots+a_n\zeta^n+\ldots$$

une série de puissances à rayon de convergence non nul. Nous allons montrer qu'il existe des fonctions entières $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus telles que $a_n=f(n)$ (2).

Soit γ une courbe fermée sans point double entourant l'origine et telle que $g(\zeta)$ soit holomorphe dans et sur γ; alors, d'après Cauchy,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^{-n-1}g(\zeta)\,d\zeta.$$

---

(1) Il y a exception quand $l(s)=\frac{a}{s}+\gamma(s)$, où $a\neq 0$, $\gamma(s)$ étant une fonction holomorphe dans un demi-plan contenant $s=0$.

(2) Ce résultat peut encore s'énoncer comme suit : étant donnée une suite de nombres complexes a_n tels que $|a_n|<k\alpha^n$, où k et α sont des constantes, il existe des fonctions entières $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus pour lesquelles $f(n)=a_n$.

Faisons la transformation $\zeta = e^{-s}$, alors $g(\zeta)$ devient $G(s) = g(e^{-s})$ et γ se transforme en une courbe Γ qui joint un point A à un point B de même partie réelle que A et dont la partie imaginaire dépasse de 2π celle de A. On a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{ns} G(s)\, ds,$$

et par conséquent $a_n = f(n)$, quand $f(z)$ désigne la fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zs} G(s)\, ds.$$

Remarques. — 1° La fonction $f(z)$ n'est pas unique, car il existe des fonctions entières de type moyen d'ordre 1 s'annulant pour $z = n$, par exemple $\sin \pi z$.

Le calcul fait ci-dessus laisse d'ailleurs place à un certain arbitraire, les courbes γ et Γ n'étant pas entièrement déterminées. Si l'on prend une courbe Γ^* joignant un point A^* à un point B^*, on obtient une fonction $f^*(z)$ et

$$f^*(z) - f(z) = F(z)\sin \pi z, \qquad \text{où} \quad F(z) = \frac{e^{i\pi z}}{\pi}\int_{AA^*} e^{zs} G(s)\, ds$$

est une fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus.

2° Toutes les fonctions $f(z)$ que nous venons d'obtenir satisfont de plus à $f(-n) = 0$ pour n entier ≥ 1, puisque

$$f(-n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^{n-1} g(\zeta)\, d\zeta.$$

3° D'après le lemme 1 la transformée de Laplace-Borel de $f(z)$ est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{G(\sigma)\, d\sigma}{s - \sigma};$$

elle est donc holomorphe sauf peut-être sur Γ. Cela permet d'étudier simplement l'indicatrice de croissance de $f(z)$.

Inversement, en nous plaçant dans les conditions du lemme 1, on peut associer à la fonction entière $f(z) = \int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\, d\sigma$ la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\zeta^n$. On aura

$$g(\zeta) = \int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\, d\sigma}{1 - \zeta e^{\sigma}} \qquad \text{et} \qquad G(s) = g(e^{-s}) = \int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\, d\sigma}{1 - e^{\sigma - s}}.$$

Cette dernière formule permet de prolonger $G(s)$ dans toute la partie du plan que l'on peut atteindre en venant du point $+\infty$ de l'axe réel sans traverser ni Γ, ni aucune des courbes déduites de Γ par des translations parallèles à l'axe imaginaire et de grandeur $2k\pi$, k entier.

En restreignant nos hypothèses nous allons établir des formules [*voir* ci-

dessous : relations (R)], qui relient entre elles la fonction $f(z)$, sa transformée de Laplace $l(s)$ et sa fonction associée $g(\zeta)$.

HYPOTHÈSE H. — *Nous supposons que les courbes déduites de* Γ *par des translations de grandeur* $2k\pi i$ (k *entier*) *sont toutes dans l'extérieur de* Γ *relatif au point à l'infini.*

Si Γ vérifie l'hypothèse H, on peut entourer Γ d'une courbe L formée d'un nombre fini de courbes fermées extérieures les unes aux autres contenant toute la courbe Γ à leur intérieur et vérifiant elle aussi l'hypothèse H. Cette hypothèse entraîne que si s est un point situé dans ou sur L, aucun point $s+2k\pi i$ ne peut être situé dans ou sur L. La fonction $\beta(\sigma-s)=\frac{1}{1-e^{\sigma-s}}-\frac{1}{s-\sigma}$ est alors holomorphe en s dans L quel que soit le point σ situé dans ou sur L. Il en résulte que $G(s)-l(s)=\int_\Gamma \beta(\sigma-s)\Phi(\sigma)\,d\sigma$ est une fonction holomorphe de s dans L. $G(s)$ et $l(s)$ ont donc les mêmes singularités dans L.

Mais la transformée de Laplace-Borel $l(s)$ est holomorphe à l'extérieur de L et sur L, donc $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}l(s)\,ds$. Par suite on a aussi

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zs}G(s)\,ds.$$

D'où le résultat suivant :

Si Γ *vérifie l'hypothèse* H, *on a entre les trois fonctions* $f(z)=\int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$, $l(s)$ *et* $G(\sigma)$ *les relations suivantes :*

$$(R)\qquad \begin{cases} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}l(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z\sigma}G(\sigma)\,d\sigma, \\ G(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\,e^{-n\sigma}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{l(s)\,ds}{1-e^{s-\sigma}}, \\ l(s)=\int_0^\infty e^{-sz}f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma}\quad (1). \end{cases}$$

---

(1) Cette dernière expression de $l(s)$ se déduit du lemme 1. On pourra remarquer que l'hypothèse H n'a été utilisée que pour obtenir les expressions de $f(z)$ et $l(s)$ en fonction de $G(\sigma)$.

Signalons encore une relation intéressante dont la démonstration ne fait pas intervenir l'hypothèse H. Partons de

$$\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{x+2ni\pi}+\frac{1}{x-2ni\pi}\right),$$

où l'on fait $x=s-\sigma$. On en déduit, à l'aide de (R),

$$G(\sigma)=\frac{u_0}{2}+l(\sigma)+\sum_1^\infty[l(\sigma+2ni\pi)+l(\sigma-2ni\pi)].$$

Remarquons encore que lorsque Γ vérifie l'hypothèse H, on peut aller du point $+\infty$ de l'axe réel au point $-\infty$ de l'axe réel sans traverser ni Γ, ni ses translatés de $2k\pi i$; $G(s)$ est donc prolongeable jusqu'à $s=-\infty$; de façon plus précise $g(\zeta)$ est prolongeable jusqu'à $\zeta=\infty$. On a d'ailleurs

$$g(\zeta)=\int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{1-\zeta e^{\sigma}}=-\int_\Gamma\left[\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^{-n}e^{-n\sigma}\Phi(\sigma)\right]d\sigma=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(-n)}{\zeta^n},$$

qui donne le développement de $g(\zeta)$ autour de $\zeta=\infty$. On constate que $g(\infty)=0$.

3. *Fonctions $g(\zeta)$ prolongeables jusqu'à $\zeta=\infty$.* — Nous venons de voir que toute fonction $f(z)=\int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$ donne naissance à une fonction $g(\zeta)$ prolongeable jusqu'à $\zeta=\infty$ quand Γ vérifie l'hypothèse H. Il en est en particulier ainsi lorsque $l(s)$ est holomorphe à l'extérieur d'une courbe L et sur L si L vérifie l'hypothèse H, car alors $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}l(s)\,ds$.

Montrons maintenant la réciproque. Soit $g(\zeta)$ une fonction holomorphe en $\zeta=0$ et prolongeable le long d'un chemin Λ quelconque, mais sans point double, jusqu'à $\zeta=\infty$. En ajoutant au besoin une constante, on peut toujours supposer $g(\infty)=0$. Nous allons montrer que l'on peut associer à $g(\zeta)$ une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus reliée à $g(\zeta)$ et à $l(s)$ par les relations (R). En effet, soit $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ le développement de $g(\zeta)$ autour de $\zeta=0$. On a, d'après Cauchy, $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\zeta^{-(n+1)}g(\zeta)\,d\zeta$, γ_0 étant un cercle entourant $\zeta=0$ dans le sens direct. Considérons la même intégrale le long d'un cercle γ_∞ de rayon assez grand pour être dans le domaine d'holomorphie du point $\zeta=\infty$. Comme $g(\infty)=0$, $|g(\zeta)|<\frac{M}{|\zeta|}$ sur γ_∞, donc l'intégrale le long de γ_∞ est nulle. Soient Λ_1 et Λ_2 deux chemins déduits de Λ par une rotation autour de 0, assez petite pour que $g(\zeta)$ soit holomorphe entre Λ_1 et Λ_2. Il est alors très facile de former un contour fermé $\mathcal{C}$, composé d'arcs de γ_0, Λ_1, γ_∞ et Λ_2 et tel que

$$a_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\zeta^{-(n+1)}g(\zeta)\,d\zeta,$$

où $\mathcal{C}$ est parcouru dans le sens direct.

Par la transformation $\zeta=e^{-s}$, $\mathcal{C}$ se transforme en une courbe L vérifiant manifestement l'hypothèse H. On a aussi

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{ns}G(s)\,ds.$$

La fonction entière

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L} e^{zs}\,G(s)\,ds$$

répond donc aux conditions.

THÉORÈME I. — *Soit $f(z)$ une fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus, dont la transformée de Laplace soit holomorphe et uniforme à l'extérieur d'une courbe* L *vérifiant l'hypothèse* H. *Alors on a*

$$\alpha(o)=\limsup_{n=\infty}\frac{\log|f(n)|}{n}.$$

Il en résulte en particulier que si $f(n)=0$ pour n entier positif, on a $f(z)\equiv 0$.

En effet, posons $\beta=\limsup_{n=\infty}\frac{\log|f(n)|}{n}$, alors la fonction $G(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)e^{-n\sigma}$ est holomorphe pour $\mathcal{R}\sigma>\beta$. $G(\sigma)$ et $l(\sigma)$ ayant les mêmes singularités dans L (*voir* p. 5), $l(\sigma)$ est holomorphe pour $\mathcal{R}\sigma>\beta$, donc $\alpha(o)\leq\beta$. L'inégalité inverse étant évidente, l'énoncé en résulte.

Si $\beta=-\infty$, la fonction $G(\sigma)$ est holomorphe dans tout le plan, et par suite aussi $l(s)$. Le comportement de cette dernière à l'infini montre que l'on a nécessairement $l(s)\equiv 0$, d'où $f(z)\equiv 0$. La condition $f(n)=0$ pour n entier est un cas particulier.

Cas du prolongement radial de $g(\zeta)$. — A toute fonction $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ prolongeable radialement jusqu'à $\zeta=\infty$, on peut associer une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus telle que $a_n=f(n)$ et que

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi$$

et réciproquement.

Pour le démontrer, appelons ω l'argument de la demi-droite suivant laquelle $g(\zeta)$ est prolongeable; $g(\zeta)$ est alors holomorphe dans un angle $\omega-\delta$, $\omega+\delta$ où $\delta>0$. La courbe $\mathcal{C}$ (introduite p. 7) peut alors être choisie extérieure à cet angle, et la courbe L déduite de $\mathcal{C}$ par $\zeta=e^{-s}$ sera comprise entre deux parallèles à l'axe réel du plan des ζ définies par $\mathcal{I}\zeta=-\omega+\delta$ et $\mathcal{I}\zeta=-\omega-\delta+2\pi$. La fonction $l(s)$ déduite de $g(\zeta)$ par les relations (R) est alors holomorphe, à l'extérieur de ces parallèles, ce qui donne pour la fonction $f(z)$ correspondante $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leq 2\pi-2\delta<2\pi$. La réciproque se démontre par le raisonnement inverse.

4. *Extension du théorème* I. — Le théorème I montre en particulier que si $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi$, l'hypothèse $f(n)=0$ pour n entier positif entraîne

$f(z) \equiv 0$. Cette propriété aurait également pu être déduite des études classiques de M. R. Nevanlinna (*voir* Appendice). Celles-ci conduisent aussi au résultat plus général suivant : *Si* $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$, *l'hypothèse* $f(n_\nu) = 0$, *où les* n_ν *forment une suite croissante d'entiers avec* $\lim_{\nu=\infty} \frac{n_\nu}{\nu} = 1$, *entraîne* $f(z) \equiv 0$.

Nous allons montrer que ce résultat peut encore être obtenu avec des considérations analogues aux précédentes. Pour cela, nous allons introduire deux fonctions auxiliaires.

Soit n_ν une suite d'entiers positifs avec $\lim_{\nu=\infty} \frac{n_\nu}{\nu} = 1$; les entiers qui n'appartiennent pas à la suite n_ν forment une nouvelle suite que nous noterons n'_μ. Nous poserons :

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n_\nu^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \psi(z) = \prod_{\mu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n'^2_\mu}\right).$$

Les produits infinis sont manifestement convergents pour tout z.

Nous allons grouper en un lemme les propriétés des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ qui nous seront utiles et en donner une démonstration succincte.

Lemme 2. — *$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions entières du type moyen d'ordre 1 au plus, $\psi(z)$ est du type minimum et $\alpha_\varphi(0) = 0$.*

Il est d'abord clair que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions entières paires; d'autre part, on a

$$\varphi(z)\psi(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Si l'on pose $|z| = r$, il vient

$$|\varphi(z)| \leq \varphi(ir), \qquad |\psi(z)| \leq \psi(ir)$$

et

$$\varphi(ir)\psi(ir) = \frac{\operatorname{sh} \pi r}{\pi r}.$$

Comme chacun des facteurs du premier membre est supérieur à 1 d'après les formules de définition, on voit que

$$|\varphi(z)| < \frac{\operatorname{sh} \pi r}{\pi r} \qquad \text{et} \qquad |\psi(z)| < \frac{\operatorname{sh} \pi r}{\pi r};$$

les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont du type moyen d'ordre 1 au plus.

Considérons alors

$$\varphi(ir) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{n_\nu^2}{r^2}}{\frac{n_\nu^2}{r^2}} \right);$$

on a

$$\frac{\log\varphi(ir)}{r} > \frac{1}{r}\sum_{a<\frac{n_\nu}{r}<b}\log\frac{1+\frac{n_\nu^2}{r^2}}{\frac{n_\nu^2}{r^2}},$$

expression qui tend (¹) vers

$$\int_a^b \log\frac{1+x^2}{x^2}\,dx.$$

Ainsi

$$\liminf_{r=\infty}\frac{\log\varphi(ir)}{r} \geq \int_0^{+\infty}\log\frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \pi.$$

Comme, d'autre part,

$$\log\varphi(ir)+\log\psi(ir) = \log\operatorname{sh}\pi r - \log\pi r$$

et que $\log\psi(ir) > 0$, on en déduit

$$\lim_{r=\infty}\frac{\log\varphi(ir)}{r} = \pi \qquad \text{et} \qquad \lim_{r=\infty}\frac{\log\psi(ir)}{r} = 0.$$

La fonction $\psi(z)$ est donc du type minimum d'ordre 1 au plus, Enfin on a

$$\frac{1}{r}\log\left|\frac{\varphi(r)}{\varphi(ir)}\right| = \frac{1}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\log\left|\frac{\frac{n_\nu^2}{r^2}-1}{\frac{n_\nu^2}{r^2}+1}\right|.$$

donc (¹)

$$\limsup_{r=\infty}\frac{1}{r}\log\left|\frac{\varphi(r)}{\varphi(ir)}\right| \leq \int_0^{+\infty}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|dx = -\pi.$$

En combinant ce résultat avec le résultat précédent, on obtient

$$\alpha_\varphi(0) = \limsup_{r=\infty}\frac{\log\varphi(r)}{r} \leq 0.$$

Comme on a toujours $\alpha_\varphi(0)+\alpha_\varphi(\pi)\geq 0$ et que, $\varphi(z)$ étant pair, $\alpha_\varphi(\pi)=\alpha_\varphi(0)$, on en déduit $\alpha_\varphi(0)=0$.

THÉORÈME 2. — *Soit $f(z)$ une fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus, vérifiant $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi$. Alors on a $\alpha(0)=\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}$.*

En particulier, il en résulte que $f(n_\nu)=0$ entraîne $f(z)\equiv 0$.

(¹) Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque de la variable réelle x dans l'intervalle a, b avec $0\leq a<b$, on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sum_{ar<n_\nu<br}F\left(\frac{n_\nu}{r}\right) = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Ce résultat repose essentiellement sur la remarque suivante :

Si $a\leq c<d\leq b$, le nombre d'entiers n_ν compris entre rc et rd est, lorsque r tend vers l'infini, un infiniment grand équivalent à $r(d-c)$.

Avec la fonction $\psi(z)$ précédente, formons, en effet, la fonction

$$h(z)=f(z)\psi(z).$$

Celle-ci est aussi de type moyen d'ordre un au plus, et l'on a

$$\alpha_h\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq\alpha_f\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \alpha_h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leq\alpha_f\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\alpha_h\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_h\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi.$$

On a donc, en appliquant le théorème 1,

$$\alpha_h(o)=\limsup_{n=\infty}\frac{\log|h(n)|}{n}\leq\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

Or $f(z)=\dfrac{h(z)}{\psi(z)}=\dfrac{h(z)\varphi(z)\pi z}{\sin\pi z}$ entraîne

$$|f(n'_\mu)|=|h(n'_\mu)||\varphi(n'_\mu)|n'_\mu,$$

d'où, comme $\alpha_\varphi(o)=o$,

$$\limsup_{n'_\mu=\infty}\frac{\log|f(n'_\mu)|}{n'_\mu}\leq\limsup_{n'_\mu=\infty}\frac{\log|h'(n'_\mu)|}{n'_\mu}\leq\alpha_{h'}(o)\leq\alpha_h(o)\leq\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

Le théorème 1 donne alors

$$\alpha_f(o)\leq\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

L'inégalité en sens inverse étant immédiate, le théorème 2 en résulte.

Conséquence. — Une fonction $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ dans laquelle $a_{n_\nu}=o$ (série lacunaire), n'est pas prolongeable radialement jusqu'à l'infini.

En effet, on pourrait dans le cas contraire lui associer une fonction entière $f(z)$ vérifiant les conditions du théorème 2, et telle que $f(n_\nu)=o$. Donc $f(z)\equiv o$ et $a_n=f(n)=o$, sauf peut-être a_0. Ce cas écarté, il n'y a pas de prolongement radial possible jusqu'à l'infini. Ce résultat, grâce au théorème 3, va être considérablement amélioré.

5. *Prolongement analytique en dehors du cercle de convergence.* — Les résultats que nous venons d'obtenir vont nous permettre d'étudier non seulement le prolongement jusqu'à l'infini, mais un prolongement quelconque hors du cercle de convergence.

Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3. — *Soit $g(\zeta)$ une fonction holomorphe et uniforme dans une région, frontière comprise, limitée par une courbe rectifiable Δ (pouvant être formée de plu-*

sieurs morceaux). On partage Δ *arbitrairement en deux arcs partiels* Δ_1 *et* Δ_2. *On peut alors décomposer* $g(\zeta)$ *en une somme de deux fonctions* $g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta)$ *telles que* $g_1(\zeta)$ *soit holomorphe et uniforme à l'extérieur de* Δ_1 *et* $g_2(\zeta)$ *à l'extérieur de* Δ_2, *extérieur relatif à un point de la région d'holomorphie de* $g(\zeta)$ *limitée par* Δ.

Ce lemme est une conséquence immédiate de l'intégrale de Cauchy. Il suffit de prendre

$$g_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_1} \frac{g(z)\,dz}{z-\zeta} \qquad \text{et} \qquad g_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_2} \frac{g(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

THÉORÈME 3. — *Pour que la fonction* $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ *soit prolongeable en dehors de son cercle de convergence, il faut et il suffit que*

$$a_n = b_n + c_n,$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ *a un cercle de convergence plus grand que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ *est prolongeable radialement jusqu'à* $\zeta = \infty$.

Il est évident que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de prendre pour Δ une courbe qui, dans un certain angle de sommet O, a un arc s'écartant de O à une distance supérieure au rayon de convergence de $g(\zeta)$. En prenant cet arc pour Δ_1 et le reste de Δ pour Δ_2 et en appliquant le lemme, le théorème en résulte.

Nous pouvons encore énoncer le théorème 3 sous la forme suivante :

THÉORÈME. — *Pour que la fonction* $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ *soit prolongeable en dehors de son cercle de convergence* $|\zeta| < R$, *il faut et il suffit qu'il existe une fonction entière* $f(z)$ *du type moyen d'ordre* 1 *au plus avec* $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$, *telle que*

$$a_n = f(n) + b_n$$

où $\limsup_{n=\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}$.

COROLLAIRE (1). — *Une série lacunaire* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ *avec* $a_{n_\nu} = 0$ *n'est pas prolongeable en dehors de son cercle de convergence.*

En effet, dans le cas contraire, on aurait pour $n = n_\nu$, $0 = f(n_\nu) + b_{n_\nu}$ donc

$$\limsup_{n_\nu = \infty} \frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu} < \log\frac{1}{R},$$

(1) Ce corollaire est l'extension de Fabry du théorème de M. Hadamard sur les séries lacunaires.

ce qui entraînerait, d'après le théorème 2,

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log |f(n)|}{n} < \log \frac{1}{R}, \qquad \text{d'où} \qquad \limsup_{n=\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}$$

en contradiction avec la définition de R.

On démontrera de même le résultat plus général suivant : une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ de rayon de convergence R et telle que

$$\limsup_{n_\nu=\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} < \frac{1}{R}$$

n'est pas prolongeable en dehors de son cercle de convergence.

6. *Nouvelles extensions du théorème* 1. — La dernière application nous permet de démontrer la généralisation suivante des théorèmes 1 et 2 :

Théorème 4. — *Soit $f(z)$ une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus, dont la transformée de Laplace soit holomorphe et uniforme à l'extérieur d'une courbe* L *vérifiant l'hypothèse* H. *Alors*

$$\alpha(0) = \limsup_{n_\nu=\infty} \frac{\log |f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

En particulier, si $f(n_\nu) = 0$, on a $f(z) \equiv 0$.

En effet, en posant $a_n = f(n)$, la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ est prolongeable (même jusqu'à l'infini) en dehors de son cercle de convergence de rayon R. Donc

$$\frac{1}{R} \leq \limsup_{n_\nu=\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n=\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n_\nu=\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}}.$$

Les formules (R) montrent que $\alpha(0) = \log \frac{1}{R}$; le théorème en résulte.

Le théorème 1 peut encore être précisé de la manière suivante :

Théorème 5 (1). — *Soit $f(z)$ une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus, dont la transformée de Laplace soit holomorphe et uniforme à l'extérieur*

(1) *Cf.* Korvaar, *Thèse*, Amsterdam, 1949.

d'une courbe L *vérifiant l'hypothèse* H. *Si pour tous les entiers positifs n, les quantités* $|f(n)|$:

a. sont bornées dans leur ensemble, alors $|f(x)|$ *est borné pour x réel positif ;*

b. tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, alors $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$, *x réel positif.*

Remarque. — Ce théorème contient bien le théorème 1. On le voit immédiatement en remarquant que la fonction G associée en vertu des relations (R) à $f(z)e^{\lambda z}$ est $G(\sigma - \lambda)$, si $G(\sigma)$ est associée à $f(z)$. On peut donc dire que $f(n)$ et $f(x)$ sont de même ordre et de même type (maximum, moyen ou minimum).

Pour démontrer le théorème 5 remarquons d'abord que :

Si à la fonction $f(z)$ on fait correspondre la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\zeta^n$, à la fonction $f(z+p)$, p entier positif, correspondra la fonction

$$g_p(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+p)\zeta^n = \frac{g(\zeta) - \sum_{n=0}^{p-1} f(n)\zeta^n}{\zeta^p}.$$

Ces fonctions $g_p(\zeta)$ jouissent de la propriété suivante :

THÉORÈME 6 (1). — *Soit* $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ *holomorphe dans un domaine* D_0 *contenant* $\zeta = 0$ *et supposons que dans* D_0, $|g(\zeta)|$ *soit borné par une constante* K. *Supposons d'autre part que l'on ait*

$$|a_n| < A \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$
$$|a_n| < B \quad \text{pour} \quad n = p, p+1, \ldots$$

Alors, dans un domaine D_1 *complètement intérieur à* D_0, *la fonction*

$$g_p(\zeta) = \frac{g(\zeta) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n \zeta^n}{\zeta^p}$$

vérifie

$$|g_p(\zeta)| < M\left(A + \frac{K}{p}, B\right),$$

où $M(u, v)$ *est une fonction qui dépend uniquement des deux domaines* D_0 *et* D_1, *qui est croissante en u et en v et qui tend vers zéro lorsque l'une des variables u ou v tend vers zéro.*

---

(1) *Cf.* SZEGÖ, *Math. Annalen*, 89, 1923.

En effet, D_0 et D_1 étant donnés, nous pouvons toujours supposer (quitte à le restreindre), que le domaine D_0 est limité par un nombre fini de courbes à tangentes continues, ces courbes ne coupant le cercle $|\zeta|=1$ qu'un nombre fini de fois et chaque fois sous un angle droit.

Dans le domaine D_0 on a alors, si $|\zeta|<1$,

$$|g_p(\zeta)|=\left|\frac{\sum_{n=p}^{\infty}a_n\zeta^n}{\zeta^p}\right|<B\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^n=\frac{B}{1-|\zeta|};$$

si $|\zeta|>1$,

$$|g_p(\zeta)|<\left|\frac{g(\zeta)}{\zeta^p}\right|+\left|\frac{\sum_{n=0}^{p-1}a_n\zeta^n}{\zeta^p}\right|<\frac{K}{|\zeta|^p}+\frac{A}{|\zeta|^p}\sum_{n=0}^{p-1}|\zeta|^n<\frac{K}{|\zeta|^p}+\frac{A}{|\zeta|-1}<\frac{A+\frac{K}{p}}{|\zeta|-1}.$$

Or il existe une fonction harmonique dans D_0 qui, aux points frontières vérifiant $|\zeta|<1$, a pour valeur limite $\log\frac{B}{1-\zeta}$ et aux points frontière vérifiant $|\zeta|>1$ a pour valeur limite $\log\frac{A+\frac{K}{p}}{\zeta-1}$. Dans D_1 cette fonction harmonique a pour borne supérieure une fonction $M^*(u,v)$. $u=A+\frac{K}{p}$, $v=B$, fonction qui dépend uniquement de D_0 et D_1, qui est croissante en u et en v et qui tend vers $-\infty$ lorsque l'une des variables u ou v tend vers zéro. Le principe des majorantes harmoniques nous donne immédiatement pour ζ dans D_1

$$|g_p(\zeta)|<e^{M^*\left(A+\frac{K}{p},B\right)}=M\left(A+\frac{K}{p},B\right).$$

Ce théorème nous permet de démontrer le théorème 5 de la manière suivante. On a

$$f(z+p)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z\sigma}g_p(e^{-\sigma})\,d\sigma$$

donc

$$|f(z+p)|<\frac{1}{2\pi}M\left(A+\frac{K}{p},B\right)\int_L|e^{z\sigma}|\,|d\sigma|.$$

Soit x réel, p sa partie entière; posons $x=z+p$; alors $\int_L|e^{z\sigma}|\,|d\sigma|$ est borné par une constante $2\pi C$ indépendante de x, et $|f(x)|<CM\left(A+\frac{K}{p},B\right)$.

Si alors $|f(n)|<A$ pour tous les entiers n, on peut prendre $B=A$ et, d'après les propriétés de croissance de $M(u,v)$, on pourra remplacer p par 1, d'où la partie a du théorème 5.

Si $\lim f(n)=0$, lorsque x tend vers l'infini, on pourra faire tendre p vers

l'infini et prendre pour B une quantité tendant vers zéro, tandis que A restera fixe. La partie *b* du théorème 5 en résulte.

Application. — Le théorème 5*a* nous donne immédiatement un énoncé de *Pólya* : une fonction entière $F(z)$ d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, qui est bornée sur l'ensemble des points $z = n^2$, se réduit à une constante. En effet $f(z) = F(z^2)$ est entière d'ordre inférieur à 1, donc vérifie les hypothèses du théorème.

$|f(z)|$ est donc borné sur l'axe réel positif, par suite sur tout l'axe réel; comme son ordre est inférieur à 1, $|f(z)|$ est borné dans tout le plan complexe, donc $F(z)$ est constant. Le même raisonnement s'applique lorsque $F(z)$ est du type minimum d'ordre $\frac{1}{2}$ (1).

7. Application du théorème 6. — 1. Théorème de Fatou (2). — *Soit*

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

une série dont le rayon de convergence est 1 *et supposons* $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. *Alors la série converge vers* $g(\zeta)$ *en tout point du cercle* $|\zeta| = 1$ *en lequel* $g(\zeta)$ *est holomorphe et cette convergence est uniforme sur tout arc d'holomorphie.*

En effet, en un tel point ζ on aura

$$|g_p(\zeta)| = \left| g(\zeta) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n \zeta^n \right| < M\left(A + \frac{K}{p}, B\right).$$

Or B peut être choisi aussi petit que l'on veut, si l'on prend p assez grand. Le théorème en résulte.

2. Si l'on associe à la fonction $f(z)$ la fonction

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \zeta^n,$$

on associera à la fonction $f(z+q) - f(z+r)$, où q et r sont des entiers positifs fixés, la fonction $\gamma(\zeta) = g_q(\zeta) - g_r(\zeta)$; et à la fonction $f(z+q+p) - f(z+r+p)$ sera associée la fonction $\gamma_p(\zeta)$.

Supposons $|f(n)| < B$; si ζ est dans D_1, $|g_p(\zeta)|$ a une borne supérieure indépendante de p, à savoir $M(B+K, B)$; d'où $|\gamma(\zeta)| < \mu$ avec $\mu = 2M(B+K, B)$.

(1) Sur ce sujet, *voir* un important Mémoire de M. Valiron (*Bull. Sc. Math.*, t. 49, 1925) et un Article de Miss Cartwright (*Quart. Journal*, t. 7, 1936).

(2) *Acta mathematica*, 30, 1906.

Si l'on suppose de plus $|f(q+n)-f(r+n)|<A$ pour $n=0, 1, \ldots, p-1$, on a $|\gamma_p(\zeta)|<M\left(A+\frac{\mu}{p}, 2B\right)$ dans un domaine D_2 complètement intérieur à D_1.

Comme d'autre part,

$$f(z+q+p)-f(z+r+p)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{z\sigma}\gamma_p(e^{-\sigma})\,d\sigma,$$

on a

$$|f(q+p)-f(r+p)|<LM\left(A+\frac{\mu}{p}, 2B\right),$$

où $2\pi L$ est la longueur du chemin d'intégration.

Soient alors $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ des domaines extérieurs les uns aux autres, ε la borne supérieure de leurs diamètres respectifs et δ le minimum de leur distance deux à deux. Considérons une fonction $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus, dont la transformée de Laplace est holomorphe et uniforme à l'extérieur d'une courbe de longueur $2\pi L$ vérifiant l'hypothèse H, et supposons que tout $f(n)$ appartienne à l'un des domaines $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Si $f(n+q)$ et $f(n+r)$ appartiennent tous deux au même domaine pour chacune des valeurs $n=0, 1, \ldots, p-1$ et si

$$\delta>LM\left(\varepsilon+\frac{\mu}{p}, 2B\right),$$

alors $f(n+q)$ et $f(n+r)$ appartiennent tous deux au même domaine Δ encore pour $n=p$, et par conséquent (de proche en proche) pour chaque valeur de l'entier n. Si i_n est l'indice du domaine Δ dans lequel est situé $f(n)$, la suite des i_n est périodique à partir d'un certain rang.

Cette conclusion subsistera si l'on suppose seulement $\delta>LM(\varepsilon, 2B)$ et $f(n)$ dans l'un des domaines $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ pour $n\geq N$. En effet, par suite de la continuité de la fonction M, on peut trouver un entier p tel que l'on ait encore $\delta>LM\left(\varepsilon+\frac{\mu}{p}, 2B\right)$. D'autre part, dans la suite $i_N, i_{N+1}, \ldots, i_{N+n}, \ldots$, on peut trouver deux groupes de p termes consécutifs $i_q, i_{q+1}, \ldots, i_{q+p-1}$ et $i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+p-1}$ identiques, car le nombre de tels groupes possibles est fini (k^p). Le résultat annoncé s'en déduit.

En particulier : *si les $f(n)$ ont un nombre fini de valeurs d'accumulation, la suite i_n est périodique à partir d'un certain rang.*

Ce résultat peut s'énoncer sous la forme suivante :

Théorème. — *Si $g(\zeta)=\sum' a_n\zeta^n$ est prolongeable jusqu'à l'infini et si les a_n ont un nombre fini de valeurs d'accumulation $d_1, \ldots, d_k$, soit $a_n-d_{i_n}\to 0$, $i_n=1, \ldots, k$, la suite i_n est périodique à partir d'un certain rang.*

Dans cette proposition on peut remplacer « *prolongeable jusqu'à l'infini* » par « *prolongeable en dehors du cercle de convergence* » en vertu du théorème 3 et l'on retrouve ainsi un résultat de Szegö (¹).

En particulier : *si dans* $g(\zeta)=\Sigma a_n\zeta^n$ *les* a_n *ont un nombre fini de valeurs et si* $g(\zeta)$ *est prolongeable en dehors de son cercle de convergence* $|\zeta|=1$, *la suite des* a_n *est périodique à partir d'un certain rang.*

Il est bien connu que cela entraine que $g(\zeta)$ est une fraction rationnelle dont tous les pôles sont simples et racines de l'unité.

8. *Utilisation de la méthode de Nevanlinna.* — L'utilisation de la méthode de Nevanlinna, déjà signalée page 9, fournit directement d'autres propriétés des fonctions entières $f(z)$, dont les conséquences pour les fonctions $g(\zeta)$ associées peuvent être intéressantes. Par exemple :

Si $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)<\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)<\pi$, *on ne peut avoir* $\mathcal{R}(-1)^n f(n)\geq 0$ *pour tous les entiers positifs* n, *à moins que* $f(z)$ *ne soit imaginaire pur sur l'axe réel, auquel cas* $\mathcal{R}f(n)=0$.

Considérons en effet la fonction entière $F(z)=f(z)+\overline{f(z)}$; elle est réelle pour z réel et par hypothèse $(-1)^n F(n)\geq 0$. Du théorème de Rolle on déduit sans peine que si $z_1, z_2, \ldots$ sont les zéros positifs de $F(z)$ rangés par grandeur croissante, on a

$$\liminf_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{z_\nu<r}\frac{1}{z_\nu}\geq 1,$$

ce qui est en contradiction avec la relation fondamentale de Nevanlinna (*voir* Appendice). L'hypothèse ne peut donc être vérifiée que si $F(z)\equiv 0$.

Ceci peut être précisé (la démonstration restant la même) :

Si $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)\leq\theta\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leq\theta\pi$, $0\leq\theta<1$, *il est impossible que la quantité* $\mathcal{R}(-1)^n f(n)$ *ne change de signe* (²) *dans le passage de* n *à* $n+1$ *que pour des valeurs* n_ν *de* n *vérifiant*

$$\liminf_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{n_\nu<r}\frac{1}{n_\nu}<1-\theta.$$

Au lieu de placer $(-1)^n f(n)$ par rapport aux deux demi-plans séparés par l'axe imaginaire, on peut placer cette même quantité par rapport à deux demi-plans séparés par une droite quelconque passant par l'origine. Il est clair que les résultats seront encore les mêmes.

(¹) *Math. Annalen*, 89, 1923.

(²) La valeur zéro peut être considérée indifféremment comme positive ou négative.

COROLLAIRE. — *Si* $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)<\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)<\pi$, *il est impossible que* $\lim_{n=\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=-1$.

En effet, supposons que $\lim_{n=\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=-1$. Posons $u_n=(-1)^n f(n)$, alors $u_n\neq 0$ à partir d'un certain rang, et $\arg u_{n+1}-\arg u_n\to 0$. D'autre part, il existe un nombre θ avec $0\leq\theta<1$ tel que $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq\theta\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leq\theta\pi$. Soit p un entier tel que $\frac{1}{p}<1-\theta$. Considérons p droites passant par l'origine et découpant le plan en $2p$ angles d'ouverture $\frac{\pi}{p}$. Soit n_ν la suite des indices n des points u_n situés dans deux tels angles opposés par le sommet et formons

$$\liminf_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{n_\nu<r}\frac{1}{n_\nu}.$$

Pour un couple d'angles opposés par le sommet au moins, parmi les p couples possibles, cette expression est au plus égale à $\frac{1}{p}<1-\theta$. La bissectrice intérieure commune aux deux angles du couple sépare le plan complexe en deux demi-plans; u_n, dès que n est assez grand, ne peut passer de l'un à l'autre qu'en pénétrant dans l'un des angles du couple; d'où l'impossibilité.

Ce corollaire entraîne la conséquence suivante :

THÉORÈME. — *Si* $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ *est prolongeable jusqu'à l'infini le long de l'axe réel positif, on ne peut avoir* $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

En utilisant le théorème 3 on en déduit un théorème de Fabry : *Si* $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, *la fonction* $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ *admet le point* $\zeta=1$ *comme point singulier.*

APPENDICE.

THÉORÈME. — *Soit* $f(z)$ *une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus. Si* $f(x_\nu)=0$, *les* x_ν *formant une suite réelle positive et croissante, avec*

$$\limsup_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}>\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

alors on a (1) $f(z)\equiv 0$.

(1) On peut, sans altérer la conclusion, remplacer ces hypothèses par des hypothèses beaucoup plus larges, la démonstration restant la même. Mais c'est l'énoncé indiqué que nous utilisons.

Pour établir cette proposition nous suivrons une méthode due à R. Nevanlinna. Considérons la partie du demi-plan $\mathcal{R}z > 0$ intérieure à la couronne $0 < r_0 < |z| < r$; c'est un domaine que nous entaillerons le long des demi-droites issues des zéros $a_\nu e^{i\alpha_\nu}$ (a_ν et α_ν réels) de la fonction $f(z)$, et dont le prolongement passe par l'origine. Le long du contour de ce domaine entaillé on a

$$\int \log f(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\right)\frac{dz}{z}=0.$$

En explicitant la partie imaginaire, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}[\log f(iy)+\log f(-iy)]\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{r^2}\right)\frac{dy}{y}+\frac{2}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi$$
$$=2\sum_{a_\nu<r}\left(\frac{1}{a_\nu}-\frac{a_\nu}{r^2}\right)\cos\alpha_\nu+\frac{1}{\pi}\int_{|z|=r_0}\log f(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Par conséquent

$$2\sum_{a_\nu<r}\left(\frac{1}{a_\nu}-\frac{a_\nu}{r^2}\right)\cos\alpha_\nu<\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}[\log|f(iy)|+\log|f(-iy)|]\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{r^2}\right)\frac{dy}{y}+O(1).$$

En particulier, en se bornant aux zéros réels :

$$\sum_{x_\nu<r}\left(\frac{1}{x_\nu}-\frac{x_\nu}{r^2}\right)<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r).$$

Dans cette relation remplaçons r par $r\log r$ tout en limitant à r la sommation du premier membre; il vient

$$\sum_{x_\nu<r}\left(\frac{1}{x_\nu}-\frac{x_\nu}{r^2\log^2 r}\right)<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r).$$

Or $\frac{x_\nu}{r^2\log^2 r}<\frac{1}{x_\nu\log^2 r}$, donc

$$\left(1-\frac{1}{\log^2 r}\right)\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r),$$

soit

$$\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r),$$

ou encore

$$\limsup_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}\leq\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Le théorème énoncé en résulte.

Nous avons appliqué ce théorème à plusieurs reprises :

1° Lorsque $x_\nu = \nu$, $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$. Dans ce cas

$$\sum_{x_\nu < r} \frac{1}{x_\nu} = \sum_{\nu < r} \frac{1}{\nu} = \log r + O(1).$$

2° Lorsque $\lim_{\nu=\infty} \frac{x_\nu}{\nu} = 1$, $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$. On a encore

$$\sum_{x_\nu < r} \frac{1}{x_\nu} = \log r + o(\log r).$$

3° Dans le cas général (p. 121).

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

TRANSFORMATIONS INTÉRIEURES D'UN DOMAINE BORNÉ

PAR M. MICHEL HERVÉ.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude des transformations intérieures d'un domaine D borné, univalent, du plan complexe ou de l'espace à deux dimensions complexes : ces transformations sont définies, dans le premier cas par une fonction $z' = f(z)$ holomorphe sur D et à valeurs dans D, dans le deuxième par deux fonctions $x' = f_1(x, y)$, $y' = f_2(x, y)$ holomorphes sur D et telles que le point de coordonnées f_1, f_2 appartienne à D. Dans les deux cas on écarte les transformations qui mettent D en correspondance biunivoque avec lui-même, plus brièvement : les automorphismes de D.

Lorsque D est un domaine plan simplement connexe, les automorphismes A de D ne se séparent pas des autres transformations intérieures, soit I, en ce sens qu'un A peut être limite (uniforme sur tout compact contenu dans D) d'une suite de I ; il n'en est plus de même si D est un domaine plan d'ordre de connexion fini $p \geqq 2$, dont la frontière sera, dans toute la suite, supposée formée de p continus non ponctuels $C_1, \ldots, C_p$: les A et les I sont alors séparés par des critères topologiques tels que celui-ci (1) : étant donné une transformation I, on peut trouver dans D une courbe fermée non équivalente à zéro dont la transformée par I soit équivalente à zéro.

(1) H. CARTAN, *Math. Z.*, t. 35, 1932, p. 760.

De là résulte en particulier que, si l'on considère les transformations I admettant un point z_0 donné de D comme point fixe, les modules de leurs dérivées en ce point ont une borne supérieure $\Omega(z_0, D) < 1$: la « constante de point fixe » relative à D et au point z_0. L'objet des trois premiers Chapitres de ce travail est de déterminer Ω et les transformations extrémales $z' = f(z)$ pour lesquelles $\hat{f}'(z_0) = \Omega(z_0, D)$: le Chapitre II résout ce problème, dans le cas $p = 2$, pour l'ensemble des transformations I; le Chapitre III le résout, dans le cas $p \geq 3$, seulement pour les transformations I_0 dans lesquelles toute courbe fermée tracée dans D a pour image une courbe équivalente à zéro. Pour traiter ce problème, je le mets successivement en relation avec les deux suivants :

Problème A. — Étant donné les substitutions $S_2, \ldots, S_p$ génératrices du groupe des automorphismes de la fonction $z = \Phi(Z)$ qui met D en correspondance conforme avec le disque $|Z| < 1$, et les angles $\theta_2, \ldots, \theta_p$, on appelle $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ la classe des fonctions $H(Z)$ holomorphes et de module au plus égal à 1 pour $|Z| < 1$ et vérifiant les $p - 1$ identités $H(S_k Z) \equiv e^{-i\theta_k} H(Z)$; trouver alors, pour Z_0 donné, $\sup |H(Z_0)|$ et les extrémales, pour lesquelles cette borne est atteinte.

Problème B. — Soit $\mathcal{F}$ la classe des fonctions $f(z)$ holomorphes (uniformes) sur D et telles que

$$\overline{\lim_{z = x_1 \in C_1}} |f(z)| \leq 1, \qquad \overline{\lim_{z = x_k \in C_k}} |f(z)| \leq e^{M_k} \qquad (2 \leq k \leq p),$$

où les M_k sont des nombres donnés; trouver alors, pour z_0 donné, $\sup |f(z_0)|$ et les extrémales, pour lesquelles cette borne est atteinte.

Pour $p = 2$, M. Heins (1) a étudié le problème A par une méthode d'interpolation, mais sans expliciter les extrémales; le problème B a été traité par Teichmüller (2) (j'ignore par quelle méthode, n'ayant connaissance de ce Mémoire que par son compte rendu dans le *Zentralblatt*); d'autre part, pour p quelconque, le problème B a été résolu par M. Grunsky (3), qui établit d'abord deux propriétés importantes des extrémales; des problèmes voisins font l'objet de plusieurs Mémoires récents, dont ceux de MM. Ahlfors (4), Garabedian (5), Nehari (6).

Au Chapitre I de ce travail, j'aborde le problème A pour $p = 2$, par une méthode nouvelle, partant des propriétés de la borne $\sup |H(Z_0)|$ demandée ;

(1) M. Heins, *Amer. J. Math.*, t. 62, 1940, p. 91.

(2) O. Teichmüller, *Deutsche Math.*, t. 4, 1939, p. 16.

(3) H. Grunsky, *Jahresbericht der D. M. V.*, t. 52, 1942, p. 118.

(4) L. Ahlfors, *Duke Math. J.*, t. 14, 1947, p. 1.

(5) P. R. Garabedian, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1949, p. 917 et *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 67, 1949, p. 1.

(6) Z. Nehari, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 69, 1950, p. 161.

les extrémales sont exprimées sous forme de produits de Blaschke; les résultats sont appliqués au problème B et à d'autres problèmes d'extremum relatifs à un domaine D doublement connexe : citons une expression de la distance de Caratheodory de deux points de D à l'aide de la fonction de Green de D.

Les applications aux transformations I (toujours pour $p=2$) font l'objet du Chapitre II : $\Omega(z_0, D)$ est donnée sous forme de produit infini; pour chaque angle $\psi \pmod{2\pi}$, il existe une extrémale $\hat{f}(z)$ et une seule telle que

$$\hat{f}'(z_0) = e^{i\psi}\Omega(z_0, D);$$

chaque point de D a, dans la transformation $z' = \hat{f}(z)$, une infinité d'antécédents répartis en quatre suites qui, si C_1 et C_2 sont deux courbes simples de Jordan, convergent respectivement vers deux points de C_1 et deux points de C_2; la position de ces points est précisée par des conditions portant sur les mesures harmoniques, par rapport à D, des arcs de C_1 et C_2 qu'ils limitent; de même pour leur variation avec ψ. Le Chapitre s'achève avec l'étude du problème suivant : à quelle condition existe-t-il des transformations I changeant deux points donnés z_1, z_2 de D en deux points donnés z'_1, z'_2, et, si oui, les arcs $z'_1z'_2$ images d'un même arc z_1z_2 par ces transformations sont-ils topologiquement équivalents dans D ? La réponse fait intervenir la distance de Caratheodory de z_1 et z_2.

Le Chapitre III considère le cas $p \geqq 3$: la solution du problème B est empruntée à M. Grunsky; il en résulte celle du problème A et la constante de point fixe $\Omega_0(z_0, D)$ relative aux transformations I_0; en supposant encore que $C_1, \ldots, C_p$ sont des courbes simples de Jordan, chacune porte un ensemble parfait totalement discontinu de points d'accumulation des antécédents d'un point de D par une transformation extrémale I_0. En ce qui concerne les transformations I, autres que les I_0, qui laissent fixe le point z_0, elles se répartissent en un nombre fini de classes disjointes fermées (dans la topologie de la convergence uniforme sur tout sous-ensemble compact de D), pour chacune desquelles je donne une borne supérieure de la constante de point fixe, analogue à la valeur exacte de Ω_0.

Au Chapitre IV, D est un domaine de l'espace à deux dimensions complexes; le problème étudié est celui des transformations limites de suites d'itérées d'une transformation I donnée. Si l'une de ces transformations est intérieure, il en est de même de toutes les autres; le cas du point double attractif étant écarté, il existe une variété analytique E dans D, irréductible (au sens global du mot) qui est l'image de D par chacune des transformations limites; l'ensemble de celles-ci est fini ou a la puissance du continu selon que E est, ou non, conservée point par point par une itérée de la transformation donnée.

Une grande partie des résultats de ce travail a été publiée dans trois Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 230, 1950, p. 609, 707 et 1491.

A M. P. Montel, qui me fait de nouveau l'honneur de présider mon Jury;

à M. A. Denjoy, qui a bien voulu accepter d'être mon second directeur de recherches;

à M. G. Valiron, qui, depuis mon entrée à l'École Normale Supérieure, n'a jamais cessé de guider mes travaux, qui m'a fourni le thème du présent travail et dont les précieux conseils m'ont permis de le développer;

à M. H. Cartan, à qui je suis tant redevable également, particulièrement pour son enseignement à l'École Normale Supérieure;

J'offre ce Mémoire comme un hommage de ma très vive admiration et de ma profonde reconnaissance.

CHAPITRE I.

Étude de la classe $\mathcal{AC}[\theta]$ et application a des problèmes d'extremum relatifs a un domaine doublement connexe.

1. Soit, dans le plan de la variable z, un domaine D borné, univalent, dont la frontière se compose de deux continus non ponctuels disjoints, C_1, C_2 : ce sera par exemple la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$. Un tel domaine est mis en correspondance conforme (non biunivoque) avec le disque $|Z| < 1$ au moyen de la fonction $z = \Phi(Z)$, invariante par une substitution hyperbolique S conservant le disque; en désignant par SZ le transformé de Z par S, nous écrirons $\Phi(SZ) \equiv \Phi(Z)$ et nous poserons

$$\frac{SZ-\alpha}{SZ-\beta} \equiv \lambda \frac{Z-\alpha}{Z-\beta} \qquad (\lambda > 1, |\alpha| = |\beta| = 1, \alpha \neq \beta). \tag{1}$$

Soient encore Γ_1 et Γ_2 les deux arcs $\widehat{\alpha\beta}$ de la circonférence $|Z| = 1$, qui représentent respectivement C_1 et C_2.

En particulier, dans le cas de la couronne $R_2 < |z| < R_1$, la correspondance $z = \Phi(Z)$ entre cette couronne et le disque est donnée par la formule

$$i \log \frac{Z-\alpha}{Z-\beta} = \gamma_1 + \pi \frac{\log z - \log R_2}{\log R_1 - \log R_2}, \tag{2}$$

où $2\gamma_1$ est la mesure en radians de Γ_1 et en supposant que $\Gamma_2 \alpha \Gamma_1 \beta$ est le sens direct sur la circonférence $|Z| = 1$; ainsi

$$\log \lambda = \frac{2\pi^2}{\log R_1 - \log R_2}. \tag{3}$$

2. La représentation $z = \Phi(Z)$ permet d'associer, à chaque fonction $f(z)$

holomorphe (et uniforme) sur D, la fonction $F(Z)\equiv f[\Phi(Z)]$ holomorphe pour $|Z|<1$ et invariante par S; si $F(Z_0)=0$, $F(Z)$ admet comme zéros tous les zéros du produit de Blaschke

$$B(Z_0, Z)\equiv \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\overline{S^n Z_0}}{|S^n Z_0|}\,\frac{S^n Z_0 - Z}{1-\overline{S^n Z_0}\,Z}. \tag{4}$$

Comme

$$\left|\frac{S^n Z_0 - Z}{1-\overline{S^n Z_0}\,Z}\right| = \left|\frac{S^{n+1} Z_0 - SZ}{1-\overline{S^{n+1} Z_0}\,SZ}\right|,$$

on a

$$|B(Z_0, Z)| = |B(Z_0, SZ)|,$$

donc

$$B(Z_0, SZ)\equiv e^{i\varphi} B(Z_0, Z). \tag{5}$$

Pour évaluer la constante réelle φ, considérons la fonction

$$u(z) = -\log|B[Z_0, \Phi^{-1}(z)]|,$$

où $\Phi^{-1}(z)$ désigne la fonction inverse, définie à la substitution S près, de $\Phi(Z)$: $u(z)$ est uniforme sur D, harmonique à l'exception du point z_0 image de Z_0, nulle à la frontière de D, telle enfin que $u(z)+\log|z-z_0|$ soit harmonique partout sur D, c'est donc la fonction de Green de D admettant z_0 pour pôle logarithmique :

$$G(z_0, z)\equiv -\log|B(Z_0, Z)|, \tag{6}$$

avec

$$z=\Phi(Z), \qquad z_0=\Phi(Z_0).$$

La fonction multiforme

$$v(z) = \arg B[Z_0, \Phi^{-1}(z)]$$

est telle que $v(z)+iG(z_0, z)$ soit analytique; d'après (5), φ est, à 2π près, l'accroissement de $v(z)$ lorsque le point $\Phi^{-1}(z)$ subit la substitution S, donc (en nous bornant ici au cas où D est une couronne circulaire de centre O) lorsque le point z tourne de 2π autour de l'origine, par exemple le long de la circonférence extérieure C_1; à 2π près, φ est donc (1) le produit par 2π de la mesure harmonique de C_1 par rapport à D au point z_0, ou le double de l'angle que font Γ_2 et l'arc de cercle $\alpha Z_0 \beta$. Nous pouvons écrire

$$B(Z_0, SZ)\equiv e^{i\varphi(z_0)} B(Z_0, Z) \tag{7}$$

où $\frac{\varphi(z_0)}{2\pi}$ est la mesure harmonique de C_1 au point z_0, ou bien

$$B(Z_0, SZ)\equiv e^{i\varphi(Z_0)} B(Z_0, Z), \tag{8}$$

(1) NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen.*

où $\frac{\varphi(Z_0)}{2}$ est l'angle orienté (à π près) que fait le cercle $|Z| = 1$ avec le cercle $\alpha Z_0 \beta$ au point β.

3. Nous dirons que la fonction $B(Z_0, Z)$ appartient à la classe $\mathcal{H}[-\varphi(Z_0)]$, $\mathcal{H}[\theta]$ désignant la classe des fonctions $H(Z)$ holomorphes pour $|Z| < 1$ qui vérifient

$$|H(Z)| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad H(SZ) \equiv e^{-i\theta} H(Z).$$

Le problème étudié dans ce Chapitre est la recherche de $\sup_{H \in \mathcal{H}[\theta]} |H(Z)|$, pour un point Z donné, et des fonctions de la classe $\mathcal{H}[\theta]$ pour lesquelles cette borne supérieure est atteinte : nous les appellerons extrémales de la classe $\mathcal{H}[\theta]$ au point Z.

Tout d'abord, cette borne supérieure ne dépend que de $\varphi(Z)$, car, si S′ est une substitution hyperbolique de points doubles α et β, $H'(Z) \equiv H(S'Z)$ appartient à $\mathcal{H}[\theta]$ en même temps que $H(Z)$ (S et S′ étant permutables), donc l'ensemble des valeurs que prennent les fonctions de $\mathcal{H}[\theta]$ au point Z coïncide avec celui des valeurs qu'elles prennent au point S′Z. Nous poserons

$$\sup_{H \in \mathcal{H}[\theta]} |H(Z)| = A[\theta, \varphi(Z)], \tag{9}$$

définissant ainsi une fonction $A(\theta, \theta')$ des deux arguments θ, θ' (mod 2π); notons que $A(0, \theta') \equiv 1$.

Cette fonction $A(\theta, \theta')$ est *symétrique :* soit en effet à évaluer la distance $C(z_1, z_2)$, dans la métrique de Caratheodory (1) relative au domaine D, de deux points z_1, z_2 de D, c'est-à-dire le maximum de la distance non euclidienne (dans le cercle $|z| < 1$) des valeurs $f(z_1)$, $f(z_2)$ en ces deux points d'une fonction $f(z)$ holomorphe (uniforme) et de module inférieur à 1 sur D; suivant le principe énoncé au début du n° 2, on a

$$\operatorname{th} C(z_1, z_2) = \sup \left| \frac{F(Z_1) - F(Z_2)}{1 - \overline{F(Z_1)} F(Z_2)} \right|,$$

avec

$$z_1 = \Phi(Z_1), \qquad z_2 = \Phi(Z_2),$$

la borne supérieure étant prise pour toutes les $F(Z)$ holomorphes et de module inférieur à 1 pour $|Z| < 1$ et invariantes par S. On peut poser $F(Z_1) = 0$: alors

$$F(Z) \equiv B(Z_1, Z)\, H(Z), \qquad \text{où} \quad H \in \mathcal{H}[\varphi(Z_1)] \quad \text{d'après (8)},$$

donc

$$\operatorname{th} C(z_1, z_2) = \sup |F(Z_2)| = |B(Z_1, Z_2)|\, A[\varphi(Z_1), \varphi(Z_2)]. \tag{10}$$

(1) Caratheodory, *Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 76.

De même, en posant $F(Z_2) = o$, on a

$$(11) \qquad \text{th}\, C(z_1, z_2) = \sup |F(Z_1)| = |B(Z_2, Z_1)| \, A[\varphi(Z_2), \varphi(Z_1)].$$

D'après la formule (6) et la symétrie de la fonction de Green, on a

$$|B(Z_1, Z_2)| = |B(Z_2, Z_1)|;$$

la comparaison de (10) et (11) donne donc la relation

$$(12) \qquad A(\theta, \theta') \equiv A(\theta', \theta),$$

établie ici en supposant θ et $\theta' \not\equiv o \pmod{2\pi}$, et qui nous conduit à poser $A(\theta, o) \equiv 1$.

4. Montrons maintenant la *continuité* de la fonction $A(\theta, \theta')$, en supposant $\theta' \not\equiv o \pmod{2\pi}$ et en établissant séparément les deux semi-continuités :

Semi-continuité *inférieure :* soit $H_0(Z)$ une extrémale de la classe $\mathcal{H}[\theta_0]$ au point Z_0; la fonction $\left(\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right)^{\frac{i\theta_0-\theta}{\log\lambda}}$ (où l'on a fait choix, une fois pour toutes, d'une détermination de $\arg\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}$ qui, sur tout le cercle $|Z|<1$, soit du signe de $\theta_0-\theta$) appartient à $\mathcal{H}[\theta-\theta_0]$ et son module tend vers 1, uniformément sur tout le cercle $|Z|<1$, lorsque $\theta-\theta_0 \to o$; la fonction $H_0(Z)\left(\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right)^{\frac{i\theta_0-\theta}{\log\lambda}}$ appartient à $\mathcal{H}[\theta]$ et est de module au plus égal à $A[\theta, \varphi(Z)]$, d'où la semi-continuité inférieure de $A(\theta, \theta')$ au point θ_0, $\varphi(Z_0)$.

Semi-continuité *supérieure :* si les suites θ_p, Z_p convergent respectivement vers θ_0 et Z_0, et si $H_p(Z)$ désigne une extrémale de la classe $\mathcal{H}[\theta_p]$ au point Z_p, de la suite $H_p(Z)$ on peut extraire une suite partielle $H_{p_k}(Z)$ uniformément convergente au voisinage de Z_0, dont la limite $H(Z)$ appartient à $\mathcal{H}[\theta_0]$; comme

$$H(Z_0) = \lim_{k=\infty} H_{p_k}(Z_{p_k}),$$

on a

$$A[\theta_0, \varphi(Z_0)] \geq \lim_{k=\infty} A[\theta_{p_k}, \varphi(Z_{p_k})].$$

Notons encore que l'on a toujours $o < A(\theta, \theta') < 1$ pour θ et $\theta' \not\equiv o \pmod{2\pi}$.

5. Montrons maintenant que, θ étant fixé $\not\equiv o \pmod{2\pi}$, $\log A(\theta, \theta')$ est fonction *strictement convexe* de θ' sur $(o, 2\pi)$, c'est-à-dire que, pour

$$o \leq \theta'_0 < \theta'_1 < \theta'_2 \leq 2\pi,$$

on a

$$(13) \qquad (\theta'_2 - \theta'_0)\log A(\theta, \theta'_1) + (\theta'_0 - \theta'_1)\log A(\theta, \theta'_2) + (\theta'_1 - \theta'_2)\log A(\theta, \theta'_0) < o.$$

Pour cela, plaçons-nous dans le cas où D est la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$,

et considérons la classe $\mathcal{F}$ des fonctions $f(z)$ holomorphes (uniformes) sur D et telles que

$$\overline{\lim_{z=R_2e^{i\omega}}}|f(z)|\leq 1, \qquad \overline{\lim_{z=R_1e^{i\omega}}}|f(z)|\leq e^{M},$$

quel que soit l'angle ω : soit à chercher $\sup_{f\in\mathcal{F}}|f(z)|$ pour un point z donné de D. La fonction $F(Z)\equiv f[\Phi(Z)]$ associée à une fonction de $\mathcal{F}$ doit être invariante par S et $|F(Z)|$ doit avoir des limites supérieures au plus égales à 1 sur Γ_2, e^M sur Γ_1 ; or ces valeurs limites sont celles du module de la fonction

$$e^{-\frac{\gamma_1 M}{\pi}}\left(\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right)^{\frac{iM}{\pi}}=\exp\left(-\frac{\gamma_1 M}{\pi}+\frac{iM}{\pi}\log\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right),$$

où la détermination choisie pour $\arg\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}$ est celle qui vaut $-\gamma_1$ sur Γ_2, $-(\gamma_1+\pi)$ sur Γ_1 ; par contre, cette fonction n'est pas invariante par S, mais appartient à la classe $\mathcal{H}\left[-\frac{M}{\pi}\log\lambda\right]$; comme elle ne s'annule pas et que $F(Z)$ est bornée, on a

$$F(Z)\equiv e^{-\frac{\gamma_1 M}{\pi}}\left(\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right)^{\frac{iM}{\pi}}H(Z), \qquad H\in\mathcal{H}\left[\frac{M}{\pi}\log\lambda\right],$$

et par suite

$$\sup\log|F(Z)|=-\frac{M}{\pi}\left(\gamma_1+\arg\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right)+\log A\left[\frac{M}{\pi}\log\lambda,\ \varphi(Z)\right],$$

ou, en comparant avec (2),

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\log|f(z)|=M\frac{\log|z|-\log R_2}{\log R_1-\log R_2}+\log A\left[\frac{M}{\pi}\log\lambda,\ \varphi(z)\right]. \tag{14}$$

Le premier terme du deuxième membre est la borne supérieure de $\log|f(z)|$ fournie par le théorème des trois cercles de M. Hadamard ; cette borne est la borne exacte si l'on admet que $f(z)$ soit multiforme ; si au contraire, comme nous le faisons ici, on exige que $f(z)$ soit uniforme, la borne exacte est donnée par la formule (14) au moyen de la fonction A.

Il peut arriver que cette borne exacte se réduise au terme fourni par le théorème des trois cercles : il faut et il suffit pour cela que

$$\frac{M}{\pi}\log\lambda\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

donc, d'après (3),

$$M\equiv 0 \pmod{\log\frac{R_1}{R_2}}, \tag{15}$$

toute extrémale de la classe $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire toute fonction de $\mathcal{F}$ pour laquelle la borne exacte est atteinte) est alors un monome en z (à exposant entier positif ou négatif).

6. Si au contraire (15) n'a pas lieu, je dis qu'une extrémale de $\mathcal{F}$ en un point z_0 de D ne peut être un monome en z : le module d'un monome en z prend en effet sur les circonférences C_1 et C_2 des valeurs constantes m_1 et m_2 ; si ce monome appartient à $\mathcal{F}$, on a $m_2 \leq 1$, $m_1 \leq e^M$, les égalités $m_2 = 1$, $m_1 = e^M$ ne pouvant être réalisées en même temps puisque (15) n'a pas lieu; si l'on a $m_2 < 1$ et $m_1 < e^M$, le monome peut être multiplié par une constante de module plus grand que 1 sans cesser d'appartenir à $\mathcal{F}$, donc ne peut être extrémale de $\mathcal{F}$; si $m_2 = 1$ et $m_1 < e^M$, le monome peut être multiplié par $\frac{1 + ae^{-i\theta_0} z}{1 + aR_2}$, où $\theta_0 = \arg z_0$ et le nombre positif a est choisi de manière que $\frac{1 + aR_1}{1 + aR_2} = \frac{e^M}{m_1}$; si $m_2 < 1$ et $m_1 = e^M$, même raisonnement avec $\frac{1 + \frac{ae^{i\theta_0}}{z}}{1 + \frac{a}{R_1}}$, où $\frac{1 + \frac{a}{R_2}}{1 + \frac{a}{R_1}} = \frac{1}{m_2}$.

Pour établir l'inégalité (13), nous choisissons M tel que $\frac{M}{\pi} \log \lambda = 0$; comme la formule (14) peut encore s'écrire

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \log |f(z)| = \frac{M}{2\pi} \varphi(z) + \log A\left[\frac{M}{\pi} \log \lambda, \varphi(z)\right], \tag{16}$$

il suffit de montrer que le deuxième membre de (16) est fonction strictement convexe de $\varphi(z)$, ou de $\log|z|$ qui est lié à $\varphi(z)$ par une relation linéaire; choisissons donc dans D les points z_0, z_1, z_2 tels que

$$\varphi(z_0) = \theta'_0, \qquad \varphi(z_1) = \theta'_1, \qquad \varphi(z_2) = \theta'_2,$$

et soient

$$r_0 = |z_0|, \qquad r_2 = |z_2| ;$$

si m_0, m_1, m_2 sont les valeurs prises par le deuxième membre de (16) aux points z_0, z_1, z_2, et $f_1(z)$ une extrémale de $\mathcal{F}$ au point z_1, on a

$$\log|f_1(z_1)| = m_1 \qquad \text{et} \qquad \log|f_1(r_0 e^{i\omega})| \leq m_0, \qquad \log|f_1(r_2 e^{i\omega})| \leq m_2$$

quel que soit l'angle ω; d'après le théorème des trois cercles,

$$(\log|z_2| - \log|z_0|)\, m_1 + (\log|z_1| - \log|z_2|)\, m_0 \leq 0 ;$$

puisque $\varphi(z)$ est fonction linéaire croissante de $\log|z|$, cette inégalité donne (13) avec le signe $\leq$.

Si l'on avait le signe $=$, la borne fournie par le théorème des trois cercles serait atteinte par la fonction uniforme $f_1(z)$, donc (en appliquant à la couronne circulaire $r_0 < |z| < r_2$ le raisonnement fait à la fin du n° 5) $f_1(z)$ serait un monome en z; mais (début du n° 6) c'est impossible puisque par hypothèse $f_1(z)$ est une extrémale de la classe $\mathcal{F}$ relativement au domaine D avec

$$\frac{M}{\pi} \log \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

7. Les propriétés (12) (symétrie) et (13) (stricte convexité par rapport à l'une des variables) permettent de déterminer la fonction $A(\theta, \theta')$ et les extrémales de $\mathcal{H}[\theta]$ en un point donné Z_0. Supposons d'abord qu'une telle extrémale, soit $H(Z)$, ne s'annule pas pour $|Z| < 1$: une détermination, holomorphe pour $|Z| < 1$, de $\log H(Z)$ vérifie une identité de la forme

$$\log H(SZ) \equiv \log H(Z) - i\theta,$$

qui détermine la constante θ, non plus seulement (mod 2π), mais complètement ; la lettre θ désignera dans ce numéro ce nombre fixe. Si t est un nombre réel compris entre 0 et 1, chaque détermination de $[H(Z)]^t$ appartient à $\mathcal{H}[t\theta]$, chaque détermination de $[H(Z)]^{1-t}$ à $\mathcal{H}[(1-t)\theta]$, donc

$$(17) \qquad \begin{cases} A[t\theta, \varphi(Z_0)] \geq \{A[\theta, \varphi(Z_0)]\}^t, \\ A[(1-t)\theta, \varphi(Z_0)] \geq \{A[\theta, \varphi(Z_0)]\}^{1-t}. \end{cases}$$

Mais d'autre part le produit d'une fonction de $\mathcal{H}[t\theta]$ et d'une fonction de $\mathcal{H}[(1-t)\theta]$ appartient à $\mathcal{H}[\theta]$, donc

$$(18) \qquad A[\theta, \varphi(Z_0)] \geq A[t\theta, \varphi(Z_0)]\, A[(1-t)\theta, \varphi(Z_0)].$$

La comparaison de (17) et (18) donne

$$A[t\theta, \varphi(Z_0)] = \{A[\theta, \varphi(Z_0)]\}^t,$$

quel que soit t $(0 < t < 1)$, contrairement à la stricte convexité de $\log A(\theta, \theta')$ par rapport à θ.

8. Une extrémale $H(Z)$ de $\mathcal{H}[\theta]$ au point Z_0 s'annule donc nécessairement en un point Z_1, et par suite aussi en tous les points $S^n Z_1$:

$$H(Z) \equiv B(Z_1, Z)\, K(Z), \qquad \text{où} \quad K \in \mathcal{H}[\theta + \varphi(Z_1)];$$

on peut même affirmer que $K(Z)$ est une extrémale de $\mathcal{H}[\theta + \varphi(Z_1)]$ au point Z_0; comme $B(Z_1, Z)$ appartient à $\mathcal{H}[-\varphi(Z_1)]$, on a donc

$$(19) \qquad A[\theta, \varphi(Z_0)] \leq A[-\varphi(Z_1), \varphi(Z_0)]\, A[\theta + \varphi(Z_1), \varphi(Z_0)];$$

mais comme le produit d'une fonction de $\mathcal{H}[-\varphi(Z_1)]$ et d'une fonction de $\mathcal{H}[\theta + \varphi(Z_1)]$ appartient à $\mathcal{H}[\theta]$, on a aussi l'inégalité large analogue à (19) et de sens contraire, donc (19) est à remplacer par l'égalité correspondante, que nous écrirons

$$(20) \qquad \log A[\theta + \varphi(Z_1), \varphi(Z_0)] - \log A[\theta, \varphi(Z_0)] = -\log A[-\varphi(Z_1), \varphi(Z_0)].$$

Je dis que $\theta + \varphi(Z_1) \equiv 0 \pmod{2\pi}$; supposons que ce ne soit pas le cas, et précisons les deux angles θ, $\theta + \varphi(Z_1)$, jusqu'ici définis (mod 2π), en leur imposant d'être compris entre 0 et 2π; si $0 < \theta + \varphi(Z_1) < \theta < 2\pi$, on a $0 < -\varphi(Z_1) < \theta$; si l'on marque, sur la courbe représentative de la fonction $\log A[\theta, \varphi(Z_0)]$ pour $0 < \theta < 2\pi$, les points A, B, C d'abscisses $\theta + \varphi(Z_1)$,

0, $-\varphi(Z_1)$, la relation (20) exprime le parallélisme des droites AB et OC; mais, comme C est à gauche de B, cela est en contradiction avec la stricte convexité de $\log A[\theta, \varphi(Z_0)]$. Si au contraire, $0 < \theta < \theta + \varphi(Z_1) < 2\pi$, même raisonnement, à cela près que C sera le point d'abscisse $2\pi - \varphi(Z_1)$ et sera joint, non plus à l'origine, mais au point d'abscisse 2π.

9. Ainsi $\theta + \varphi(Z_1) \equiv 0 \pmod{2\pi}$, et $K(Z)$, extrémale de la classe $\mathcal{H}[0]$, est une constante de module 1 :

$$H(Z) \equiv B(Z_1, Z)\, e^{i\omega}, \qquad \varphi(Z_1) = -\theta \pmod{2\pi}. \tag{21}$$

Reste à déterminer Z_1, c'est-à-dire le maximum de $|B(Z_1, Z_0)|$ pour Z_0 donné, Z_1 vérifiant la deuxième condition (21); en supposant encore que D soit la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$, cela revient, d'après (6), à trouver le minimum de $G(z_1, z_0)$ pour z_0 donné, z_1 variable sur un cercle de centre O : il est atteint lorsque z_0 et z_1 sont alignés avec O et de part et d'autre de O.

Pour le montrer, prenons dans D deux points z_1, z_1' tels que $|z_1| = |z_1'|$, et considérons les deux fonctions de Green $G(z_1, z)$, $G(z_1', z)$: elles sont égales sur la médiatrice de z_1, z_1'; dans la demi-couronne limitée par cette médiatrice et contenant le point z_1, la deuxième est harmonique tandis que la première est surharmonique, donc $G(z_1, z) > G(z_1', z)$; cela prouve que $G(z_1, z_0)$ ne peut être minimum si $\widehat{z_0 O z_1} < \pi$.

L'alignement $z_0 O z_1$ se traduit sur les points Z_0 et Z_1 par la condition

$$\left|\frac{Z_1 - \alpha}{Z_1 - \beta}\right| : \left|\frac{Z_0 - \alpha}{Z_0 - \beta}\right| = \lambda^{m+\frac{1}{2}} \qquad (m \text{ entier}),$$

qui, jointe à la deuxième équation (21), détermine Z_1 à la substitution S près. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème. — *Les extrémales de la classe $\mathcal{H}[0]$ en un point donné Z_0 ne diffèrent entre elles que par une constante multiplicative de module* 1, *elles sont données par*

$$\begin{cases} H(Z) \equiv e^{i\omega} B(Z_1, Z), \\ \text{avec} \\ \varphi(Z_1) = -\theta \pmod{2\pi}, \qquad \left|\dfrac{Z_1 - \alpha}{Z_1 - \beta}\right| : \left|\dfrac{Z_0 - \alpha}{Z_0 - \beta}\right| = \lambda^{m+\frac{1}{2}} \quad (m \text{ entier}). \end{cases} \tag{21}$$

10. Applications. — 1° *Distance de Caratheodory de deux points z_1, z_2, de* D. — Si l'on reprend la formule (10), le théorème ci-dessus donne

$$\log \operatorname{th} C(z_1, z_2) = -G(z_1, z_2) - G(z_3, z_2), \tag{22}$$

où l'homologue Z_3 de z_3 est déterminé par les conditions

$$\varphi(Z_3) = -\varphi(Z_1) \pmod{2\pi}, \qquad \left|\frac{Z_3 - \alpha}{Z_3 - \beta}\right| : \left|\frac{Z_2 - \alpha}{Z_2 - \beta}\right| = \lambda^{m+\frac{1}{2}}.$$

Si D est la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$, ces conditions se traduisent pour le point z_3 par

$$|z_1 z_3| = R_1 R_2, \qquad \frac{z_3}{z_2} \text{ réel} < 0. \tag{23}$$

2° *Amélioration du théorème des trois cercles.* — Si $\mathcal{F}$ désigne, comme au n° 5, la classe des fonctions $f(z)$ holomorphes (uniformes) sur la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$ et telles que

$$\overline{\lim_{z = R_2 e^{i\omega}}} |f(z)| \leq 1, \qquad \overline{\lim_{z = R_1 e^{i\omega}}} |f(z)| \leq e^M,$$

en reprenant la formule (14), le théorème ci-dessus donne

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \log |f(z)| = M \frac{\log |z| - \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} - G(z, \zeta), \tag{24}$$

où ζ est défini par les conditions

$$\log |\zeta| \equiv \log R_1 - M \pmod{\log \frac{R_1}{R_2}}, \qquad \frac{z}{\zeta} \text{ réel} < 0. \tag{25}$$

C'est le résultat de Teichmüller (1).

3° La méthode s'applique aussi au problème suivant traité par M. Robinson (2) : étant donné, sur la couronne $R_2 < |z| < R_1$, les points $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_l$ (3), on considère les fonctions $f(z)$ méromorphes sur la couronne, dont les zéros comprennent les points $a_1, \ldots, a_k$ et dont les pôles sont compris parmi les points $b_1, \ldots, b_l$, et qui enfin vérifient

$$\overline{\lim_{z = R_2 e^{i\omega}}} |f(z)| \leq 1, \qquad \overline{\lim_{z = R_1 e^{i\omega}}} |f(z)| \leq e^M;$$

trouver pour ces fonctions $\sup |f(z)|$ en un point z donné. Il suffit de reprendre le raisonnement du n° 5 en écrivant cette fois

$$F(Z) \equiv e^{-\frac{\gamma_1 M}{\pi}} \left(\frac{Z - \alpha}{Z - \beta}\right)^{\frac{iM}{\pi}} \frac{B(A_1, Z) \ldots, B(A_k, Z)}{B(B_1, Z) \ldots, B(B_l, Z)} H(Z),$$

avec

$$H \in \mathcal{C}\left[\frac{M}{\pi} \log \lambda + \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_k) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_l)\right],$$

$A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l$ étant des homologues dans $|Z| < 1$ de $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$; une extrémale de la classe considérée a donc en général un zéro de plus que

---

(1) O. Teichmüller, *Deutsche Math.*, t. 4, 1939, p. 16.

(2) R. Robinson, *Duke Math. J.*, t. 10, 1943, p. 341.

(3) Les a_i pouvant n'être pas distincts, et de même les b_j, mais aucun des a_i ne figurant parmi les b_j.

$a_1, \ldots, a_k$ (ou éventuellement un pôle de moins que $b_1, \ldots, b_l$); pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut et il suffit que

$$(26)\qquad \frac{2\pi M}{\log R_1 - \log R_2} + \varphi(a_1) + \ldots \varphi(a_k) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_l) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

4° Le problème suivant, apparemment plus compliqué que celui de M. Robinson, se traite encore de la même manière :

On considère encore les $f(z)$ méromorphes sur la couronne D : $R_2 < |z| < R_1$, dont les zéros comprennent les points donnés $a_1, \ldots, a_k$ et dont les pôles sont compris parmi les points donnés $b_1, \ldots, b_l$, mais vérifiant cette fois à la frontière les conditions

$$\overline{\lim_{z = R_2 e^{i\omega}}} \log|f(z)| \leq l_2(\omega), \qquad \overline{\lim_{z = R_1 e^{i\omega}}} \log|f(z)| \leq l_1(\omega),$$

l_1 et l_2 étant deux fonctions données continues, de période 2π, et l'on cherche encore $\sup|f(z)|$ en un point donné z de D.

Si $u(z)$ est la fonction harmonique sur D qui résout le problème de Dirichlet

$$u(R_2 e^{i\omega}) = l_2(\omega), \qquad u(R_1 e^{i\omega}) = l_1(\omega),$$

la fonction $e^{u(z)}$ n'est pas en général uniforme, mais multipliée par $e^{i\theta}$ quand $\arg z$ croît de 2π. On écrira donc

$$F(Z) \equiv e^{u[\Phi(Z)]} \frac{B(A_1, Z) \ldots B(A_k, Z)}{B(B_1, Z) \ldots B(B_l, Z)} H(Z),$$

avec

$$H \in \mathfrak{M}[\theta + \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_k) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_l)].$$

5° La méthode s'applique enfin à des problèmes sur les transformations intérieures du domaine D qui font l'objet du prochain Chapitre.

CHAPITRE II.

Application des résultats précédents aux transformations intérieures d'un domaine doublement connexe : Calcul de la « constante de point fixe ».

11. D étant toujours le domaine considéré au Chapitre précédent, soit maintenant $\mathfrak{I}$ la famille formée des fonctions holomorphes (uniformes) sur D qui appliquent D sur tout ou partie de lui-même mais ne l'appliquent pas sur lui-même de manière biunivoque, et en outre des constantes appartenant à la frontière de D. A l'aide de la correspondance $z = \Phi(Z)$, utilisée au Chapitre précédent, entre D et le disque $|Z| < 1$, on associe à chaque $f(z)$ de la famille $\mathfrak{I}$ l'une des fonctions

$$F(Z) \equiv \Phi^{-1}\{f[\Phi(Z)]\},$$

toutes holomorphes et de module au plus égal à 1 pour $|Z|<1$: si $F_0(Z)$ est l'une d'elles, les autres sont (1) les $S^n F_0(Z)$ (n entier positif ou négatif). Comme $f(z)$ est uniforme, on a

$$F(SZ) \equiv S^p F(Z) \qquad (p \text{ entier}).$$

L'entier p a, relativement à D, la signification géométrique suivante : en convenant que C_1 est celui des deux continus-frontières de D qui sépare D de l'infini et marquant sur C_2 un point quelconque a, si le point z décrit dans D un chemin fermé le long duquel $\arg(z-a)$ varie de $2k\pi$, le point $f(z)$ décrit un chemin fermé le long duquel $\arg[f(z)-a]$ varie de $2kp\pi$. Si p n'était pas nul, toute courbe fermée tracée dans D et non réductible à zéro dans D ($k\neq 0$) aurait pour image par $f(z)$ une courbe fermée non réductible à zéro dans D; mais alors $f(z)$ mettrait D en correspondance biunivoque avec lui-même (2), contrairement à l'hypothèse. Ainsi, toute F(Z) associée à une $f(z)$ de la famille $\mathcal{J}$ vérifie

$$F(SZ) \equiv F(Z). \tag{1}$$

12. Réciproquement, toute F(Z) holomorphe et de module au plus égal à 1 pour $|Z|<1$ et qui vérifie (1) définit une fonction et une seule (3)

$$f(z) \equiv \Phi\{F[\Phi^{-1}(z)]\}$$

de la famille $\mathcal{J}$: si en effet $f(z)$ mettait D en correspondance biunivoque avec lui-même, F(Z) ferait de même pour le cercle $|Z|<1$, donc ne prendrait pas la même valeur aux points Z et SZ.

Dans la topologie de la convergence uniforme sur tout sous-ensemble compact du cercle $|Z|<1$, la famille des F(Z) holomorphes, de module au plus égal à 1 et vérifiant (1) est *fermée* et *connexe*, c'est-à-dire ne peut être partagée en deux sous-familles fermées disjointes : si en effet $F_1(Z)$ et $F_2(Z)$ appartenaient à deux telles sous-familles, suivant les valeurs du paramètre réel t ($0\leq t\leq 1$), la fonction $tF_1(Z)+(1-t)F_2(Z)$ appartiendrait à l'une ou à l'autre, le segment $0\leq t\leq 1$ pourrait lui-même être partagé en deux ensembles fermés disjoints non vides. Par suite, dans la topologie de la convergence uniforme sur tout sous-ensemble compact de D, la famille $\mathcal{J}$ est elle-même fermée et connexe.

13. Considérons, dans la famille $\mathcal{J}$, la sous-famille $\mathcal{J}(z_0)$ qui laisse fixe un

(1) En laissant de côté le cas où $f(z)\equiv x$, x point-frontière de D à image multiple dans la représentation conforme.

(2) H. Cartan, *Math. Z.*, t. 33, 1932, p. 760.

(3) A part les cas d'exception $F(Z)\equiv\alpha$, β ou X, point de la circonférence $|Z|=1$ représentant un bout premier de la frontière de D.

point donné z_0 de D : $f(z_0) = z_0$ pour $f \in \mathcal{J}(z_0)$. On sait (1) que, pour $f \in \mathcal{J}(z_0)$, $|f'(z_0)|$ a une borne supérieure précise inférieure à 1, soit $\Omega(z_0, D)$, que l'on peut appeler *constante de point fixe* (Starrheitskonstante) relative à D et au point z_0 ; le deuxième Mémoire cité (1) utilise la représentation de D sur $|Z| < 1$, choisie de manière que z_0 ait pour image l'origine, et donne la borne supérieure

$$\Omega(z_0, D) \leq \prod_{n=1}^{+\infty} |S^n O|^2. \tag{2}$$

Reprenons le calcul en choisissant pour image de z_0 un point quelconque Z_0 ; on fixe la fonction $F(Z)$ associée à une $f(z)$ de la classe $\mathcal{J}(z_0)$ en posant $F(Z_0) = Z_0$; d'après (1), la fonction $\dfrac{F(Z) - Z_0}{1 - Z_0 F(Z)}$ est invariante par la substitution S, donc, avec les notations du Chapitre I,

$$\frac{F(Z) - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 F(Z)} \equiv B(Z_0, Z)\, H(Z), \qquad \text{où} \quad H \in \mathcal{H}[\varphi(Z_0)].$$

D'autre part

$$f'(z_0) = F'(Z_0) = \lim_{Z = Z_0} \frac{F(Z) - Z_0}{Z - Z_0} = H(Z_0)\,(1 - |Z_0|^2) \lim_{Z = Z_0} \frac{B(Z_0, Z)}{Z - Z_0},$$

donc

$$\Omega(z_0, D) = \prod_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{n = +\infty} \left| \frac{S^n Z_0 - Z_0}{1 - Z_0 S^n Z_0} \right| A[\varphi(Z_0), \varphi(Z_0)].$$

Le théorème du n° 9 (Chap. I) permet d'énoncer :

THÉORÈME. — *La constante de point fixe est donnée par la formule*

$$\log \Omega(z_0, D) = \log \prod_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{n = +\infty} \left| \frac{S^n Z_0 - Z_0}{1 - Z_0 S^n Z_0} \right| - G(z_0, z_0^*). \tag{3}$$

où z_0^* est l'image dans D *de l'un des points Z_0^* définis par*

$$\varphi(Z_0^*) = -\varphi(Z_0) \pmod{2\pi}, \qquad \left| \frac{Z_0^* - \alpha}{Z_0^* - \beta} \right| : \left| \frac{Z_0 - \alpha}{Z_0 - \beta} \right| = \lambda^{m + \frac{1}{2}},$$

ce qui, lorsque D *est la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$, s'exprime simplement par*

$$z_0^* = -\frac{R_1 R_2}{z_0}. \tag{4}$$

(1) CARATHEODORY, *Math. Z.*, t. 34, 1932, p. 758, et AUMANN-CARATHEODORY, *Math. Ann.*, t. 109, 1934, p. 756.

De plus, les fonctions extrémales $\hat{f}(z)$, pour lesquelles

$$|\hat{f}'(z_0)| = \Omega(z_0, D),$$

sont données par la formule

$$\frac{\hat{F}(Z) - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \hat{F}(Z)} \equiv e^{i\omega} B(Z_0, Z) B(Z_0^*, Z), \tag{5}$$

donc à chaque nombre $e^{i\psi}$ de module 1 correspond une extrémale $\hat{f}$ et une seule telle que

$$\hat{f}'(z_0) = e^{i\psi} \Omega(z_0, D).$$

On remarque que le produit infini qui figure au deuxième membre de (3) n'est autre que celui de la formule (2) (obtenue en posant $Z_0 = 0$).

14. *Principales propriétés des extrémales $\hat{f}$.* — Pour les étudier, on peut, ce qui simplifie l'exposé, se borner au cas où D est la couronne circulaire $R_2 < |z| < R_1$: si en effet il existe, entre D et un autre domaine doublement connexe D', une correspondance conforme biunivoque dans laquelle z_0 a pour image z'_0, les extrémales relatives à D et au point z_0 sont transmuées par cette correspondance en celles relatives à D' et au point z'_0, et réciproquement.

Cela étant, pour que $\hat{f}(z)$ prenne une valeur z_1 de D dont Z_1 est une image dans le cercle $|Z| < 1$, il faut et il suffit que

$$g(z) \equiv \frac{\hat{F}[\Phi^{-1}(z)] - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \hat{F}[\Phi^{-1}(z)]} \tag{6}$$

prenne l'une des valeurs $\dfrac{S^n Z_1 - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 S^n Z_1}$; or, d'après (5), la fonction

$$g(z) \equiv e^{i\omega} B[Z_0, \Phi^{-1}(z)] B[Z_0^*, \Phi^{-1}(z)] \tag{7}$$

est holomorphe et de module inférieur à 1 sur D; elle est même holomorphe sur $\bar{D}$, car $Z = \Phi^{-1}(z)$ est prolongeable analytiquement à travers toute portion des cercles C_1 et C_2 et chaque produit de Blaschke à travers toute portion du cercle $|Z| = 1$ qui ne contient aucun point d'accumulation de ses zéros (donc ne contient ni α ni β). Sur C_1 ou C_2, $|g(z)| = 1$, donc $g(z)$ prend autant de fois dans D chaque valeur de module inférieur à 1 : ce nombre fixe est 2 puisque, d'après (7), $g(z) = 0$ pour $z = z_0$ et $z = z_0^*$. Ainsi, quel que soit D :

Propriété 1. — Chaque point z_1 de D a, dans la transformation $z' = \hat{f}(z)$, une infinité d'antécédents : à chaque valeur de l'entier n (de $-\infty$ à $+\infty$) peuvent être associés deux de ces antécédents, soient $a_n(z_1)$, $a'_n(z_1)$, tels que

$$g[a_n(z_1)] = g[a'_n(z_1)] = \frac{S^n Z_1 - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 S^n Z_1}. \tag{8}$$

En particulier

$$a_0(z_0) = z_0, \qquad a'_0(z_0) = z_0^*$$

quelle que soit l'extrémale $\hat{f}$ considérée ; mais les autres antécédents dépendent de l'angle ω (ou ψ) qui définit $\hat{f}$.

15. Quand le point z décrit C_1 ou C_2 en laissant D à sa gauche, le point $g(z)$ décrit la circonférence du cercle-unité en laissant ce cercle à sa gauche, donc $\arg g(z)$ croît, d'un multiple de 2π sur chacune des circonférences C_1 et C_2 ; comme $g(z)$ a deux zéros dans D, la variation totale de $\arg g(z)$ est 4π, donc elle est de 2π sur $C_1\uparrow$ et de 2π sur $C_2\downarrow$; ainsi $g(z)$ prend chaque valeur de module 1 une fois sur C_1 et une fois sur C_2. Or

$$\lim_{n=+\infty} \frac{S^n Z_1 - Z_0}{1 - Z_0 S^n Z_1} = \frac{\beta - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \beta}, \qquad \lim_{n=-\infty} \frac{S^n Z_1 - Z_0}{1 - Z_0 S^n Z_1} = \frac{\alpha - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \alpha};$$

soient donc a, b les points de C_1, a', b' les points de C_2 définis par

$$(9) \qquad g(a) = g(a') = \frac{\alpha - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \alpha}, \qquad g(b) = g(b') = \frac{\beta - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \beta}.$$

On a alors, en plaçant convenablement les lettres a_n, a'_n :

$$(10) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=+\infty} a_n(z_1) = b, & \lim\limits_{n=+\infty} a'_n(z_1) = b'; \\ \lim\limits_{n=-\infty} a_n(z_1) = a, & \lim\limits_{n=-\infty} a'_n(z_1) = a'. \end{cases}$$

D'après la formule (7), et en utilisant le raisonnement du n° 2 (Chap. I), la fonction multiforme $\arg g(z)$ est telle que $\arg g(z) + i\,G(z_0, z) + i\,G(z_0^*, z)$ soit analytique ; l'accroissement de $\arg g(z)$, quand z décrit un arc de C_1 ou C_2 en laissant D à sa gauche, est donc le produit par 2π de la somme des mesures harmoniques de cet arc par rapport à D aux points z_0 et z_0^*. Pour mettre en place les points a, b, a', b', il suffit de connaître la différence des arguments de $\frac{\alpha - Z_0}{1 - Z_0 \alpha}$ et $\frac{\beta - Z_0}{1 - Z_0 \beta}$, autrement dit les mesures harmoniques au point O, par rapport au cercle $|Z| < 1$, des arcs de la circonférence $|Z| = 1$ limités par ces deux points ; comme $\frac{\alpha - Z_0}{1 - Z_0 \alpha}$, $\frac{\beta - Z_0}{1 - Z_0 \beta}$, O sont images de α, β, Z_0 par la transformation $Z' = \frac{Z - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 Z}$ qui conserve le cercle, ces mesures harmoniques sont aussi celles de Γ_1 et Γ_2 au point Z_0 par rapport au cercle, ou de C_1 et C_2 au point z_0 par rapport à D.

Le même raisonnement permet de préciser comment varient les points a, b, a', b' avec l'extrémale $\hat{f}$: si l'on considère deux valeurs ω_1, ω_2 de l'angle ω qui définit $\hat{f}$, on a, d'après (7),

$$g_2(z) \equiv e^{i(\omega_1 - \omega_2)} g_1(z),$$

donc les conditions (9) pour g_2 :

$$g_2(a_2)=g_2(a'_2)=\frac{\alpha-Z_0}{1-Z_0\alpha},\qquad g_2(b_2)=g_2(b'_2)=\frac{\beta-Z_0}{1-Z_0\beta},$$

peuvent être remplacées par

$$g_1(a_2)=g_1(a'_2)=e^{i(\omega_1-\omega_2)}\frac{\alpha-Z_0}{1-Z_0\alpha},\qquad g_1(b_2)=g_1(b'_2)=e^{i(\omega_1-\omega_2)}\frac{\beta-Z_0}{1-Z_0\beta}.$$

Ainsi :

16. *Propriété* 2. — Si C_1 et C_2 sont des courbes de Jordan, les antécédents d'un point z_1 de D dans la transformation $z'=\hat{f}(z)$ se répartissent en quatre suites convergeant respectivement vers deux points a, b de C_1 et deux points a', b' de C_2 tels que les mesures harmoniques $u(z,\widehat{ab})$, $u(z,\widehat{a'b'})$, par rapport à D, des arcs de C_1 et C_2 qu'ils limitent, vérifient

$$(11)\quad\begin{cases} u(z_0,\widehat{ab})+u(z_0^*,\widehat{ab})=u(z_0,C_1)\quad\text{ou}\quad u(z_0,C_2)\\ \text{suivant que l'on considère l'un ou l'autre } \widehat{ab}\ (^1),\\ u(z_0,\widehat{a'b'})+u(z_0^*,\widehat{a'b'})=u(z_0,C_1)\quad\text{ou}\quad u(z_0,C_2)\\ \text{suivant que l'on considère l'un ou l'autre } \widehat{a'b'}\ (^1). \end{cases}$$

Lorsque l'angle ω qui définit $\hat{f}$ croît de $\Delta\omega$, chacun de ces points décrit, dans le sens négatif par rapport à D, un arc de C_1 ou C_2 dont la somme des mesures harmoniques par rapport à D aux points z_0 et z_0^* est $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$.

Remarque. — Si l'on passe, par représentation conforme, d'un domaine D limité par deux courbes de Jordan à un domaine D′ quelconque, il peut arriver que l'un des points a, b, a', b' relatifs à D ait pour image un bout premier de D′, auquel cas la suite correspondante d'antécédents dans D′ peut ne pas converger. On peut néanmoins, si le bout premier présente un point accessible, affirmer qu'elle converge vers ce point : en effet, les points $\frac{S^nZ_1-Z_0}{1-Z_0S^nZ_1}$ tendent vers $\frac{\alpha-Z_0}{1-Z_0\alpha}$ ou $\frac{\beta-Z_0}{1-Z_0\beta}$ en restant sur un même arc de cercle joignant ces deux points ; donc, lorsque D est une couronne circulaire, la suite d'antécédents qui converge vers a (par exemple) reste sur un arc qui admet au point a une tangente distincte de la tangente à C_1.

---

(1) Ces conditions sont compatibles en vertu de $\varphi(Z_0^*)=-\varphi(Z_0)\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$, d'où

$$u(z_0^*,C_1)=u(z_0,C_2),\qquad u(z_0^*,C_2)=u(z_0,C_1).$$

17. On peut écrire, d'après (6),

$$\hat{f}(z) \equiv \Phi\{\hat{F}[\Phi^{-1}(z)]\} \equiv \Phi\left[\frac{g(z)+Z_0}{1+Z_0\,g(z)}\right]. \tag{12}$$

Si C_1 et C_2 sont des courbes simples analytiques, $\Phi(Z)$ est prolongeable analytiquement à travers toute portion du cercle $|Z|=1$ qui ne contient ni α ni β, donc $\hat{f}(z)$ est prolongeable à travers toute portion de C_1 ou C_2 qui ne contient aucun des points a, a', b, b' définis par (9); ces points sont au contraire singuliers pour $\hat{f}(z)$ d'après la propriété 2. Lorsque z décrit, dans le sens positif par rapport à D, l'un des arcs $\overset{\frown}{ab}$ de C_1 ou l'un des arcs $\overset{\frown}{a'b'}$ de C_2, $\hat{f}(z)$ décrit C_1' ou C_2' selon que $u(z_0, C_1)$ ou $u(z_0, C_2)$ figure au deuxième membre de (11), et cela une infinité de fois : c'est encore une conséquence de (12). Il en résulte que les antécédents d'ordre 2 d'un point z_1 ont une infinité dénombrable de points d'accumulation sur chacun des arcs $\overset{\frown}{ab}$, $\overset{\frown}{a'b'}$. On reconnaît aisément la nature des points singuliers a, a', b, b' à l'aide du principe de symétrie lorsque C_1, C_2 sont des cercles.

De façon plus précise, lorsque z décrit un arc γ de C_1 ou C_2, le point $\frac{g(z)+Z_0}{1+Z_0\,g(z)}$ décrit un arc de la circonférence $|Z|=1$ dont la mesure harmonique au point Z_0 est $u(z_0, \gamma)+u(z_0^*, \gamma)$, donc les valeurs prises par $\hat{f}(z)$ couvrent un arc γ' (qui peut être décrit plusieurs fois) tel que

$$u(z_0, \gamma') \geqq u(z_0, \gamma) + u(z_0^*, \gamma), \tag{13}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si γ est l'un des arcs $\overset{\frown}{ab}$, $\overset{\frown}{a'b'}$ [*cf.* (11)]; cette inégalité renforce celle de Löwner.

Il en résulte par exemple que les antécédents d'ordre quelconque de z_1 sont partout denses sur C_1 et C_2 : on suppose qu'il n'en soit pas ainsi et applique (13) aux arcs γ (ouverts) qui forment le complémentaire de l'ensemble d'accumulation des antécédents, d'où résulte que les $u(z_0, \gamma)$ ne sont pas bornés.

18. Une conséquence du calcul fait au n° 13 est que le lieu des valeurs de $f'(z_0)$ pour les $f \in \mathcal{J}(z_0)$ est le cercle $|f'(z_0)| \leqq \Omega(z_0, D)$; pour généraliser cette propriété, on peut considérer le problème suivant :

Étant donné dans D les points z_1, z_2, z_1', lieu des images $z_2' = f(z_2)$ du point z_2 par les transformations $z' = f(z)$ de la classe $\mathcal{J}$ qui changent z_1 en z_1'.

On se donne les images Z_1, Z_2, Z_1' de z_1, z_2, z_1' et fixe la fonction $F(Z)$ associée à une $f(z)$ répondant à la question en posant $F(Z_1) = Z_1'$; on a alors

$$\frac{F(Z)-Z_1'}{1-Z_1'F(Z)} \equiv B(Z_1, Z)\,H(Z), \qquad \text{où} \quad H \in \mathcal{H}[\varphi(Z_1)],$$

de sorte que le lieu des valeurs de $F(Z_2)$ est défini par

$$\left|\frac{F(Z_2)-Z_1'}{1-Z_1'F(Z_2)}\right| \leq |B(Z_1, Z_2)|\,|B(Z_3, Z_2)|,$$

Z_3 étant déterminé par les mêmes conditions que dans l'équation (22) du Chapitre I; compte tenu de cette équation, la condition trouvée pour $F(Z_2)$ s'écrit

$$\left|\frac{F(Z_2)-Z_1'}{1-Z_1'F(Z_2)}\right| \leq \operatorname{th} C(z_1, z_2), \tag{14}$$

$C(z_1, z_2)$ étant la distance de Caratheodory de z_1 et z_2 (1). Le lieu cherché de z_2' est celui des points de D dont une image au moins dans le cercle $|Z|<1$ vérifie (14), c'est-à-dire est à une distance non euclidienne de Z_1' au plus égale à $C(z_1, z_2)$.

Il peut d'ailleurs arriver qu'un point z_2' ait plusieurs images dans ce cas : cela veut dire, non seulement qu'il existe des transformations $z'=f(z)$ de la classe $\mathcal{J}$ qui changent z_1 et z_2 en z_1' et z_2', mais que les arcs $z_1'z_2'$ images par ces transformations d'un même arc z_1z_2 tracé dans D (choisi une fois pour toutes) ne sont pas réductibles les uns aux autres par déformation continue dans D. Pour qu'il existe de tels couples z_1', z_2', il faut et il suffit qu'il existe deux points Z, SZ du cercle $|Z|<1$ dont la distance non euclidienne soit au plus égale à $2C(z_1, z_2)$; comme le minimum de la distance non euclidienne des points Z et SZ est $\frac{1}{2}\log\lambda$, la condition imposée à z_1 et z_2 est

$$C(z_1, z_2) \geq \frac{1}{4}\log\lambda = \frac{\pi^2}{2\log\frac{R_1}{R_2}} \tag{15}$$

pour une couronne circulaire.

CHAPITRE III.

Recherches sur des problèmes analogues relatifs a un domaine d'ordre de connexion $p \geq 3$.

19. Soit maintenant D un domaine borné, univalent, dont la frontière se compose de p continus non ponctuels disjoints C_1 (qui sera dans la suite celui qui sépare D de l'infini), $C_2, \ldots, C_p$; il est mis en correspondance conforme avec le disque $|Z|<1$ au moyen de la fonction $z=\Phi(Z)$, invariante par toutes les substitutions (dont aucune n'est elliptique) S d'un groupe $\mathcal{G}$ proprement discontinu sur $|Z|<1$ et sur les arcs de $|Z|=1$ images de $C_1, \ldots, C_p$.

(1) D'après les formules (6) et (22) du Chapitre I, cette condition implique $G(z_1', z_2') > G(z_1, z_2)$ (principe de Lindelöf).

Dans le cas $p=2$, lorsque le point z décrit dans D un chemin fermé le long duquel $\arg(z-a)$ croît de 2π (a étant un point de C_2), tous les points $Z=\Phi^{-1}(z)$ subissent la même substitution S. Dans le cas $p\geq 3$, marquons sur $C_2, \ldots, C_p$ les points $a_2, \ldots, a_p$ et dans le domaine D les chemins simples fermés $s_2, \ldots, s_p$ tels que, quand z décrit s_k $(2\leq k\leq p)$,

$$(1)\qquad \Delta\arg(z-a_k)=2\pi, \qquad \Delta\arg(z-a_j)=0 \qquad \text{pour } 2\leq j\leq p \qquad (j\neq k);$$

alors, quand z décrit s_k, les points $Z=\Phi^{-1}(z)$ subissent diverses substitutions hyperboliques, transmuées les unes des autres par toutes les substitutions de $\mathcal{G}$, parmi lesquelles nous en choisirons une, soit S_k.

20. Nous considérons maintenant le produit de Blaschke

$$(2)\qquad B(Z_0, Z)\equiv \prod_{S\in\mathcal{G}} \frac{\overline{SZ}_0}{|SZ_0|}\,\frac{SZ_0-Z}{1-\overline{SZ}_0 Z},$$

qui, comme au n° 2 (Chap. I), est lié à la fonction de Green de D par

$$(3)\qquad G(z_0, z)\equiv -\log|B(Z_0, Z)|,$$

avec

$$z=\Phi(Z), \qquad z_0=\Phi(Z_0),$$

et vérifie les identités $(2\leq k\leq p)$

$$(4)\qquad B(Z_0, S_kZ)\equiv e^{i\varphi_k(z_0)}B(Z_0, Z),$$

où $-\frac{\varphi_k(z_0)}{2\pi}$ est la mesure harmonique de C_k au point z_0. $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ sera la classe des fonctions H(Z) holomorphes pour $|Z|<1$ qui vérifient $|H(Z)|\leq 1$ et $(2\leq k\leq p)$

$$H(S_kZ)\equiv e^{-i\theta_k}H(Z);$$

cette définition est indépendante du choix des S_k : en effet S_k ne peut être remplacée que par une $S'_k=T^{-1}S_kT$ où $T\in\mathcal{G}$; mais $S_2, \ldots, S_p$ engendrent le groupe $\mathcal{G}$, donc $T=S_{\alpha_1}^{q_1}\ldots S_{\alpha_r}^{q_r}$ ($q_1, \ldots, q_r$ entiers positifs ou négatifs, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r=2, 3, \ldots, p$),

$$S'_k=S_{\alpha_r}^{-q_r}\ldots S_{\alpha_1}^{-q_1}S_kS_{\alpha_1}^{q_1}\ldots S_{\alpha_r}^{q_r},$$

et les identités

$$H(S_kZ)\equiv e^{-i\theta_k}H(Z) \qquad \text{entraînent} \qquad H(S'_kZ)\equiv e^{-i\theta_k}H(Z).$$

21. La question se pose ensuite (*cf.* n° 3, Chap. I) de savoir si $\sup_{H\in\mathcal{H}[\theta_2,\ldots,\theta_p]}|H(Z)|$ pour un point Z donné ne dépend que de $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_p(z)$; pour le montrer, nous établirons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné deux points z_0, z'_0 de* D, *pour que chacun des continus-frontières* $C_1, \ldots, C_p$ *ait même mesure harmonique en* z_0 *et* z'_0, *il faut et il suffit que* z_0 *et* z'_0 *soient homologues dans une transformation biunivoque anticonforme et symétrique* (1) *de* D *en lui-même qui conserve dans son ensemble chacun des continus* $C_1, \ldots, C_p$.

La condition est évidemment suffisante; montrons qu'elle est nécessaire en supposant que $C_1, \ldots, C_p$ soient des courbes simples analytiques (d'où l'on passe ensuite au cas général par une représentation conforme biunivoque convenable) : d'après l'hypothèse et les identités (4), la fonction

$$g(z) \equiv \frac{B[Z_0, \Phi^{-1}(z)]}{B[Z'_0, \Phi^{-1}(z)]} \tag{5}$$

est uniforme sur D; elle est d'autre part méromorphe sur D, et même sur D, de module 1 sur la frontière de D, présente dans D un zéro unique z_0 et un pôle unique z'_0; elle prend donc une fois et une seule dans D toute valeur de module différent de 1 (théorème de Rouché appliqué à g ou $\frac{1}{g}$) et par suite au plus une fois dans D toute valeur de module 1.

Dans ces conditions, la formule $g(z') = \frac{1}{\overline{g(z)}}$ définit une transformation biunivoque, anticonforme, symétrique de D en lui-même; soit a un point de C_1, choisi en dehors des points, en nombre fini, où $g'(z) = 0$: quand le point z franchit a en cheminant sur C_1, $\arg g(z)$ varie dans un certain sens σ; d'autre part, d'après un raisonnement déjà utilisé, la variation de $\arg g(z)$ quand z décrit C_1 est la différence des mesures harmoniques de C_1 en z_0 et z'_0 (multipliée par 2π), donc nulle par hypothèse; il existe donc un point b de C_1 tel que, quand z franchit b en cheminant sur C_1, $\arg g(z)$ franchisse la valeur $\arg g(a)$ dans le sens $-\sigma$, autrement dit $g(a) = g(b)$ et la valeur commune $\arg g(a) = \arg g(b)$ est franchie dans les sens opposés σ et $-\sigma$ quand z franchit a et b en parcourant C_1. Au voisinage de a dans D, $g(z)$ prend toutes les valeurs voisines de $g(a)$ de module inférieur à 1 si σ est positif, supérieur à 1 si σ est négatif; de même, en permutant les conclusions, au voisinage de b dans D; dans tous les cas, en réunissant des voisinages convenables de a et b dans D, on obtient un ensemble où $g(z)$ prend toutes les valeurs voisines de $g(a)$; comme elle ne peut les prendre ailleurs à nouveau, on a montré que b est homologue de a dans la transformation considérée.

22. *Remarques.* — 1° Pour $p \geq 4$, une telle transformation n'existe que pour des domaines D particuliers. Au contraire, pour $p = 3$, il en existe toujours

(1) C'est-à-dire une transformation $z' = \psi(z)$ telle que $\overline{\psi}(z)$ soit holomorphe et $\psi[\psi(z)] \equiv z$.

une et une seule, qui laisse invariant chaque point de trois arcs analytiques simples i_1, i_2, i_3 joignant respectivement C_2 à C_3, C_3 à C_1, C_1 à C_2.

2° Pour $p=2$, $\frac{\varphi(z_0)}{2\pi}$, mesure harmonique de C_1 en z_0, prenait toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Ici au contraire, le système des $-\frac{\varphi_k(z_0)}{2\pi}$, mesures harmoniques des C_k en z_0, n'est pas susceptible de prendre tout système de $p-1$ valeurs comprises entre 0 et 1 : c'est évident pour $p\geq 4$ puisque z_0 ne dépend que de deux paramètres réels et, pour $p=3$, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont les mesures harmoniques de C_2 et C_3 en un point z de D est une aire intérieure au triangle ayant pour sommets

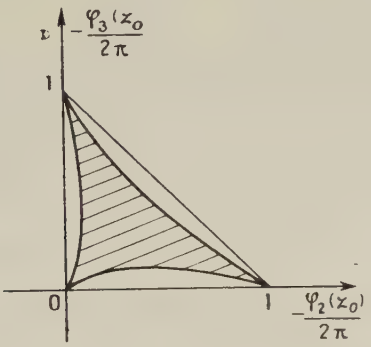


Fig. 1.

les points (0, 0), (0, 1), (1, 0), limitée par trois arcs qui joignent ces points deux à deux et correspondent à des points z respectivement situés sur i_1, i_2, i_3 (*fig.* 1).

23. Soient alors Z_0, Z'_0 deux points du cercle $|Z|<1$ dont les images z_0, z'_0 dans D vérifient

$$\varphi_k(z_0)=\varphi_k(z'_0) \qquad \text{pour} \quad 2\leq k\leq p;$$

la correspondance $z'=\psi(z)$, biunivoque, anticonforme, symétrique dans D, a pour image dans le cercle une correspondance

$$Z'=\Psi(Z)\equiv\Phi^{-1}\{\psi[\Phi(Z)]\},$$

choisie de telle sorte que $Z'_0=\Psi(Z_0)$, qui est aussi biunivoque et anticonforme. Soient α_k, β_k les points doubles de S_k; lorsque le point Z subit, sur l'arc $\widehat{\alpha_k\beta_k}$ qui est l'une des images de C_k, la substitution S_k, d'après les propriétés de $\psi(z)$, le point $\Psi(Z)$ subit, sur l'un des autres arcs images de C_k, c'est-à-dire sur un arc déduit de $\widehat{\alpha_k\beta_k}$ par une substitution $T_k\in\mathcal{G}$, la substitution transmuée de S_k^{-1} par T_k :

$$\Psi(S_kZ)=T_kS_k^{-1}T_k^{-1}\Psi(Z).$$

Par suite la fonction $H'(Z) \equiv \overline{H}[\Psi(Z)]$ appartient à $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ en même temps que $H(Z)$, l'ensemble des valeurs que prennent les fonctions de $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ au point Z_0 coïncide avec celui des valeurs qu'elles prennent au point $Z'_0 = \Psi(Z_0)$.

Cela permet de poser

$$(6) \qquad \sup_{H \in \mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]} |H(Z)| = A[\theta_2, \ldots, \theta_p; \varphi_2(z), \ldots, \varphi_p(z)].$$

On établit comme au n° 3 (Chap. I) la propriété de symétrie

$$(7) \qquad A(\theta_2, \ldots, \theta_p; \theta'_2, \ldots, \theta'_p) \equiv A(\theta'_2, \ldots, \theta'_p; \theta_2, \ldots, \theta_p),$$

mais elle n'a de sens que si les $-\frac{\theta_k}{2\pi}$ d'une part, les $-\frac{\theta'_k}{2\pi}$ d'autre part, sont (mod 1) les mesures harmoniques des C_k en un même point de D.

La semi-continuité supérieure de la fonction A s'établit comme au n° 4; la semi-continuité inférieure résulte de l'existence d'une fonction de la classe $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ dont le module tend vers 1 uniformément quand $\theta_2 \to 0, \ldots, \theta_p \to 0$; pour s'en assurer, on peut se borner au cas où $C_2, \ldots, C_p$ sont des courbes simples de Jordan, marquer les points $a_2, \ldots, a_p$ respectivement intérieurs à $C_2, \ldots, C_p$ et considérer l'une des déterminations de

$$\frac{[\Phi(Z) - a_2]^{-\frac{\theta_2}{2\pi}} \ldots [\Phi(Z) - a_p]^{-\frac{\theta_p}{2\pi}}}{\sup_{z \in D} |z - a_2|^{-\frac{\theta_2}{2\pi}} \ldots |z - a_p|^{-\frac{\theta_p}{2\pi}}},$$

qui répond à la question.

24. Soit $\mathcal{F}$ la classe des fonctions $f(z)$ holomorphes (uniformes) sur D et telles que

$$\overline{\lim_{z = x_1 \in C_1}} |f(z)| \leq 1; \qquad \overline{\lim_{z = x_k \in C_k}} |f(z)| \leq e^{M_k} \qquad (2 \leq k \leq p),$$

et soit à chercher $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z)|$ pour un point z donné de D; pour cela on forme d'abord la fonction harmonique $u(z)$, solution du problème de Dirichlet pour les valeurs aux limites 0, $M_2, \ldots, M_p$, qui se déduit des mesures harmoniques de $C_2, \ldots, C_p$:

$$u(z) = \sum_{k=2}^{p} M_k \, u(z, C_k),$$

puis la fonction harmonique $v(z)$ telle que $u + iv$ soit analytique, qui s'accroît de θ_k quand z décrit le chemin s_k défini au n° 19; les θ_k sont des formes linéaires par rapport aux M_j, dont les coefficients ont un déterminant non nul (1), donc peuvent prendre tout système de $p - 1$ valeurs données; ainsi

$$(8) \qquad F(Z) = f[\Phi(Z)] \equiv e^{(u+iv)[\Phi(Z)]} H(Z), \qquad H \in \mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p],$$

(1) G. Julia, *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes.*

ce qui ramène la recherche des extrémales H de la classe $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ au point Z_0 à celle des extrémales f de la classe $\mathcal{F}$ au point z_0. Or ces dernières (1) jouissent des deux propriétés suivantes : elles ont au plus $p-1$ zéros dans D et

$$\lim_{z=x_1\in C_1} |f(z)| = 1, \qquad \lim_{z=x_k\in C_k} |f(z)| = e^{M_k},$$

cette dernière propriété entraînant l'unicité de l'extrémale à un facteur de module 1 près, puisque la classe $\mathcal{F}$ est convexe, c'est-à-dire, avec $f_1(z)$ et $f_2(z)$, contient $tf_1(z)+(1-t)f_2(z)$ pour $0 \leq t \leq 1$; autre conséquence de la deuxième propriété des extrémales : si une extrémale $f(z)$ ne s'annule pas dans D, on a

$$\log|f(z)| = u(z), \qquad \text{donc} \quad \theta_k \equiv 0 \pmod{2\pi} \qquad \text{pour} \quad 2 \leq k \leq p.$$

25. Par suite, si les θ_k ne sont pas tous multiples de 2π, l'extrémale de la classe $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ au point Z_0, définie à un facteur de module 1 près, est de la forme

$$H(Z) \equiv B(Z_1, Z) \ldots B(Z_q, Z)\, K(Z),$$

où

$$1 \leq q \leq p-1 \qquad \text{et} \qquad K \in \mathcal{H}[\theta_2 + \varphi_2(z_1) + \ldots + \varphi_2(z_q), \ldots];$$

en outre K(Z) doit être une extrémale non nulle de cette dernière classe, donc les extrémales de $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$ sont données par

$$(9) \qquad \begin{cases} H(Z) \equiv e^{i\omega} B(Z_1, Z) \ldots B(Z_q, Z) & (1 \leq q \leq p-1), \\ \varphi_k(z_1) + \ldots + \varphi_k(z_q) = -\theta_k \pmod{2\pi} & \text{pour} \quad 2 \leq k \leq p. \end{cases}$$

Un problème connexe consiste à chercher $\sup|f(z)|$ pour les $f(z)$ holomorphes et de module inférieur à 1 sur D et qui s'annulent en un point donné z_0 de D : en posant

$$F(Z) \equiv f[\Phi(Z)] \equiv B(Z_0, Z)\, H(Z),$$

on doit prendre pour H(Z) une extrémale de $\mathcal{H}[\varphi_2(z_0), \ldots, \varphi_p(z_0)]$. En supposant que $C_1, \ldots, C_p$ soient des courbes simples analytiques, la fonction $f(z)$ correspondante est holomorphe sur D et $\arg f(z)$ croît quand z décrit $C_1^+, C_2^+, \ldots, C_p^+$, donc sa variation totale est au moins $2p\pi$, et $f(z)$ s'annule au moins $p-1$ fois en dehors de z_0. Ainsi, pour les extrémales de la classe $\mathcal{H}[\varphi_2(z_0), \ldots, \varphi_p(z_0)]$ on a certainement $q = p-1$ dans les formules (9).

On peut relier, d'une manière analogue, le problème étudié ici et ceux qui font l'objet des Mémoires de MM. Ahlfors, Garabedian et Nehari, cités dans l'Introduction; le Mémoire cité en dernier traite un problème que l'on peut aborder comme dans la quatrième application au n° 10.

---

(1) H. Grunsky, *Jahresbericht der D. M. V.*, t. 52, 1942, p. 118. Dans ce Mémoire, $C_1, \ldots, C_p$ sont des courbes de Jordan, ce que nous pouvons supposer ici.

26. Soit maintenant $\mathcal{J}$ la famille définie comme au n° 11 (Chap. II); elle est fermée dans la topologie de la convergence uniforme sur tout sous-ensemble compact de D, car la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{J}$ ne peut mettre D en correspondance biunivoque avec lui-même (1).

Si l'on associe à une $f \in \mathcal{J}$ l'une des fonctions $F(Z) \equiv \Phi^{-1}\{f[\Phi(Z)]\}$, de ce que $f(z)$ est uniforme résulte que, si $S \in \mathcal{G}$, $F(SZ)$ se déduit de $F(Z)$ par une substitution de $\mathcal{G}$ indépendante de Z, soit $U(S)$:

$$F(SZ) \equiv U(S)\,F(Z). \tag{10}$$

L'opérateur $U(S)$, qui vérifie

$$U(S_1 S_2) = U(S_1)\,U(S_2),$$

est un endomorphisme de $\mathcal{G}$ associé à la fonction $F(Z)$, et non pas à $f(z)$ car, si c'est $f(z)$ qui est donnée, on peut remplacer $F(Z)$ par $TF(Z)$ où $T \in \mathcal{G}$, et $U(S)$ est alors remplacé par $TU(S)T^{-1}$. Cependant, si $f(z) \equiv$ const., quel que soit le choix de la constante $F(Z)$, on a $U(S) \equiv E$, élément-unité de $\mathcal{G}$.

27. Si $f(z)$ est limite (uniforme sur tout sous-ensemble compact de D) d'une suite $f_n(z)$ de fonctions de $\mathcal{J}$, si à $f(z)$ sont associés $F(Z)$ et l'endomorphisme $U(S)$, et de même $F_n(Z)$ et $U_n(S)$ à $f_n(z)$, il existe un entier N tel que, pour $n > N$, $U(S)$ et $U_n(S)$ soient transmués l'un de l'autre : on peut en effet, $F(Z)$ étant choisie à l'avance, choisir ensuite les $F_n(Z)$ de manière que

$$F(Z) = \lim_{n=\infty} F_n(Z) \qquad \text{(uniformément sur tout compact)};$$

alors

$$U(S)\,F(Z) = \lim_{n=\infty} U_n(S)\,F_n(Z),$$

ce qui entraîne

$$U_n(S) = U(S) \qquad \text{pour} \quad n > N(S),$$

puisque $\mathcal{G}$ est proprement discontinu au point $F(Z)$ et que ce point n'est point double d'aucune substitution de $\mathcal{G}$; comme d'autre part $\mathcal{G}$ a un nombre fini de substitutions génératrices, on a bien

$$U_n(S) = U(S) \qquad \text{pour} \quad n > N.$$

Si donc on met dans une même classe toutes les fonctions de $\mathcal{J}$ auxquelles correspondent des endomorphismes $U(S)$ non pas identiques les uns aux autres (cela n'aurait pas de sens), mais transmués les uns des autres, chacune de ces classes est à la fois fermée et ouverte dans $\mathcal{J}$ (toujours dans la même topologie); ainsi, dès qu'il y a au moins deux classes, la famille $\mathcal{J}$ n'est plus connexe, contrairement à ce qui a lieu pour $p = 2$ (n° 12, Chap. II).

---

(1) H. Cartan, *Math. Z.*, t. 35, 1932, p. 760, et M. Heins, *Duke Math. J.*, t. 8, 1941, p. 312.

Un exemple simple montre que, dès que $p \geq 3$, il peut y avoir deux classes : tout d'abord la classe $\mathcal{J}_0$ à laquelle correspond $U(S) \equiv E$ existe toujours, puisqu'elle contient au moins les constantes appartenant à $\overline{D}$; soit alors le domaine

$$(D) \qquad 1 < |z| < 3, \qquad \left|z - \frac{8}{5}\right| > \frac{1}{5},$$

pour lequel $p = 3$; si C_2 et C_3 sont respectivement les circonférences $|z| = 1$ et $\left|z - \frac{8}{5}\right| = \frac{1}{5}$, la fonction $f(z) \equiv \frac{z+8}{5}$ peut être associée à l'endomorphisme $U(S)$ défini par

$$U(S_2) = S_3, \qquad U(S_3) = E.$$

D'autre part, la famille $\mathcal{J}$ étant normale et fermée, le nombre des classes est fini. Voici une conséquence de ce fait : si $F_n(Z)$ est la $n^{\text{ième}}$ itérée d'une fonction $F(Z)$ associée à une $f(z)$ de la famille $\mathcal{J}$, on a (1), pour $n > n_0$ (n_0 *a priori* dépendant de F) :

$$(11) \qquad F_n(SZ) \equiv F_n(Z) \qquad \text{quelle que soit } S \in \mathcal{G}.$$

Or il résulte de (10) que $F_n(SZ) \equiv U_n(S) F_n(Z)$, l'opérateur $U_n(S)$ étant le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur $U(S)$; l'identité (11) se traduit donc par $U_n(S) \equiv E$. D'autre part, si $U'(S)$ est transmué de $U(S)$, $U'_n(S)$ est aussi transmué de $U_n(S)$ (par une autre transformation de $\mathcal{G}$). L'identité (11) a donc lieu pour n supérieur à un entier ne dépendant que de la classe considérée, et par suite pour n supérieur à un nombre fixe ne dépendant que de D.

De ce que, pour n convenable, $U_n(S) \equiv E$, résulte que $U(S) = E$ pour des S du groupe $\mathcal{G}$ autres que E; ainsi, une fonction $F(Z)$ holomorphe et de module ≤ 1 pour $|Z| < 1$ et qui vérifie (10) définit (*cf.* n° 12) une fonction $f(z)$ et une seule de $\mathcal{J}$.

28. L'étude faite au Chapitre II ne s'applique pas à la famille $\mathcal{J}$, mais seulement à la classe $\mathcal{J}_0$ définie par $U(S) \equiv E$ [quelle que soit la fonction $F(Z)$ associée à une $f(z)$ de la classe $\mathcal{J}_0$] : ainsi le raisonnement du n° 12 montre que $\mathcal{J}_0$ est connexe, ainsi que la sous-classe $\mathcal{J}_0(z_0)$ qui laisse fixe un point donné z_0 de D; le calcul du n° 13 s'applique seulement à

$$\Omega_0(z_0, D) = \sup_{f \in \mathcal{J}_0(z_0)} |f'(z_0)|,$$

avec l'aide des résultats énoncés au n° 25. Ainsi :

Théorème. — *La constante de point fixe relative aux fonctions de la classe $\mathcal{J}_0$, c'est-à-dire aux seules transformations intérieures de* D *dans lesquelles l'image de*

(1) M. Heins, *Amer. J. Math.*, t. 63, 1941, p. 461.

toute courbe fermée tracée dans D *est réductible à zéro dans* D, *est donnée par la formule*

$$(12)\qquad \log\Omega_0(z_0, D) = \log \prod_{\substack{S\in\mathcal{G}\\ S\neq E}} \left|\frac{SZ_0 - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 SZ_0}\right| - G(z_0, z_1) - \ldots - G(z_0, z_{p-1}),$$

où les points $z_1, \ldots, z_{p-1}$ *de* D *ne dépendent que de* z_0, *et cela de façon continue* (1), *et sont tels que*

$$(13)\qquad \varphi_k(z_0) + \varphi_k(z_1) + \ldots + \varphi_k(z_{p-1}) = 0 \pmod{2\pi} \qquad \textit{pour} \quad 2 \leq k \leq p.$$

Les fonctions extrémales $\hat{f}(z)$ (*toujours de la classe* $\mathcal{J}_0$) *sont données par*

$$(14)\qquad \frac{\hat{F}(Z) - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 \hat{F}(Z)} \equiv e^{i\omega} B(Z_0, Z) B(Z_1, Z) \ldots B(Z_{p-1}, Z),$$

donc à chaque nombre $e^{i\psi}$ *de module* 1 *correspond une* $\hat{f}$ *et une seule telle que*

$$\hat{f}'(z_0) = e^{i\psi} \Omega_0(z_0, D).$$

L'étude de ces extrémales se fait comme aux nos 14 à 17 (Chap. II), mais avec des résultats plus compliqués : par exemple, en ce qui concerne la propriété 2 (n° 16), en supposant que $C_1, \ldots, C_p$ soient des courbes simples de Jordan, l'ensemble d'accumulation des antécédents d'un point z de D se compose de p ensembles parfaits totalement discontinus portés respectivement par $C_1, \ldots, C_p$: cela tient à ce que l'ensemble d'accumulation des $\dfrac{SZ - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 SZ}$ pour Z donné, S variable dans $\mathcal{G}$, est lui-même un ensemble parfait totalement discontinu porté par la circonférence $|Z| = 1$.

29. Considérons maintenant une classe $\mathcal{J}_1$ autre que $\mathcal{J}_0$ et l'un des endomorphismes U(S) correspondants; l'ensemble des valeurs de U(S) quand S décrit $\mathcal{G}$ est un sous-groupe $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{G}$ [un vrai sous-groupe puisque U(S) a des itérés réduits à la transformation identique (n° 27)]. A une classe donnée $\mathcal{J}_1$ sont associés, non pas un seul sous-groupe $\mathfrak{U}$, mais tous les sous-groupes conjugués $T\mathfrak{U}T^{-1}$ où $T \in \mathcal{G}$. Si l'un de ces sous-groupes est cyclique, il en est de même de tous les autres : ce fait est donc une propriété de la classe $\mathcal{J}_1$.

Supposons d'abord que les sous-groupes associés à la classe $\mathcal{J}_1$ soient cycliques; choisissons une fois pour toutes l'un des endomorphismes U(S) associés à $\mathcal{J}_1$, et représentons chaque $f(z)$ de $\mathcal{J}_1$ par une F(Z) vérifiant l'identité (10) avec cet endomorphisme U(S); par hypothèse les valeurs prises par U(S) sont de la forme $\Sigma^{n(S)}$, où Σ est une certaine substitution de $\mathcal{G}$. Il est alors commode de supposer faite sur Z une substitution homographique qui

(1) Cette continuité résulte de la continuité de la fonction A (n° 23) et de l'unicité, à un facteur de module 1 près, des extrémales de $\mathcal{H}[\theta_2, \ldots, \theta_p]$.

change le disque $|Z|<1$ en le demi-plan $\mathcal{I}Z>0$ et transmue Σ en l'homothétie $(0, \lambda)$; l'identité (10) prend alors la forme

$$F(SZ)\equiv\lambda^{n_S}F(Z). \tag{15}$$

Si $F_1(Z)$ et $F_2(Z)$ sont deux fonctions holomorphes pour $\mathcal{I}Z>0$ et vérifiant $\mathcal{I}F_1(Z)>0$, $\mathcal{I}F_2(Z)>0$ et l'identité (15), il en est de même de $t_1F_1(Z)+t_2F_2(Z)$ si $t_1>0$, $t_2>0$; le raisonnement du n° 12 s'applique encore et montre que la classe $\mathcal{J}_1$ est connexe. En outre, le point Z_0 étant donné, le lieu du point $F(Z_0)$, pour toutes les $F(Z)$ holomorphes sur $\mathcal{I}Z>0$ vérifiant $\mathcal{I}F(Z)>0$ et l'identité (15), comprend, avec deux points A et B, tous les points de l'angle $\widehat{AOB}$; d'autre part, ce lieu ne peut avoir, sur l'axe réel, d'autre point d'accumulation que zéro et l'infini, sinon il existerait une constante finie et non nulle vérifiant (15), ce qui est impossible; le lieu du point $F(Z_0)$ est donc un angle fermé (côtés compris) de sommet O, entièrement situé (sauf son sommet) dans le demi-plan $\mathcal{I}Z>0$.

30. Revenant au domaine D, cela veut dire que, le point z_0 étant donné dans D, le lieu du point $f(z_0)$ pour $f\in\mathcal{J}_1$ est un ensemble fermé connexe K_1 contenu dans D, et qu'en outre il existe un chemin fermé σ tracé dans K_1, non réductible à zéro dans D, et une fonction $f_t(z)$ de la classe $\mathcal{J}_1$, dépendant continûment (1) du paramètre réel t, tels que le point $f_t(z_0)$ décrive indéfiniment dans le même sens le chemin σ lorsque t croît.

Cette dernière propriété distingue une classe $\mathcal{J}_1$ associée à des sous-groupes $\mathfrak{U}$ cycliques d'une classe $\mathcal{J}_2$ associée à des sous-groupes non cycliques; pour le voir, il suffit de montrer que si $U(S)$ est l'un des endomorphismes associés à $\mathcal{J}_2$, le lieu du point $F(Z_0)$, pour Z_0 donné et pour toutes les fonctions $F(Z)$ holomorphes et de module inférieur à 1 sur $|Z|<1$ et vérifiant (10), est un ensemble fermé porté par $|Z|<1$: comme $\mathcal{G}$ est proprement discontinu, ce lieu ne pourra alors contenir une infinité de points équivalents entre eux par $\mathcal{G}$; en effet, si ce lieu a un point d'accumulation a sur la circonférence $|Z|=1$, la constante a vérifie (10), soit $a=U(S)a$ quelle que soit $S\in\mathcal{G}$, c'est-à-dire que a est point double de toutes les substitutions de $\mathfrak{U}$; alors, ou bien ces substitutions ont en commun leur point double autre que a, et $\mathfrak{U}$ est cyclique contrairement à l'hypothèse; ou bien il y a dans $\mathfrak{U}$ deux substitutions dont a est le seul point double commun, et $\mathfrak{U}$ admet une substitution infinitésimale (2), ce qui est absurde.

Le lieu du point $f(z_0)$ pour z_0 donné, $f\in\mathcal{J}_2$, est donc encore un ensemble fermé K_2 contenu dans D; comme le nombre des classes est fini, il en est de

(1) Toujours dans la topologie de la convergence uniforme sur tout ensemble compact de D.

(2) Fatou, *fonctions automorphes*, dans Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, t. 2.

même du lieu de $f(z_0)$ pour $f \in \mathcal{J} - \mathcal{J}_0$; ainsi z_0 et z'_0 peuvent être choisis tels que $f \in \mathcal{J}$ et $z'_0 = f(z_0)$ entrainent $f \in \mathcal{J}_0$.

31. La sous-classe $\mathcal{J}_0(z_0)$ qui laisse fixe le point z_0 est connexe comme la classe $\mathcal{J}_0$ (n° 28); si l'on considère une classe $\mathcal{J}_1$ autre que $\mathcal{J}_0$ et la sous-classe $\mathcal{J}_1(z_0)$ qui laisse fixe z_0, il peut au contraire arriver que $\mathcal{J}_1(z_0)$ ne soit pas connexe, même si la classe $\mathcal{J}_1$ est associée à des sous-groupes $\mathfrak{U}$ cycliques, donc elle-même connexe. En effet, le point Z_0 image de z_0 dans le cercle $|Z| < 1$ une fois choisi, on peut fixer la fonction $F(Z)$ associée à une $f(z)$ de la sous-classe $\mathcal{J}_1(z_0)$ en posant $F(Z_0) = Z_0$; avec cette convention, si f_n est une suite

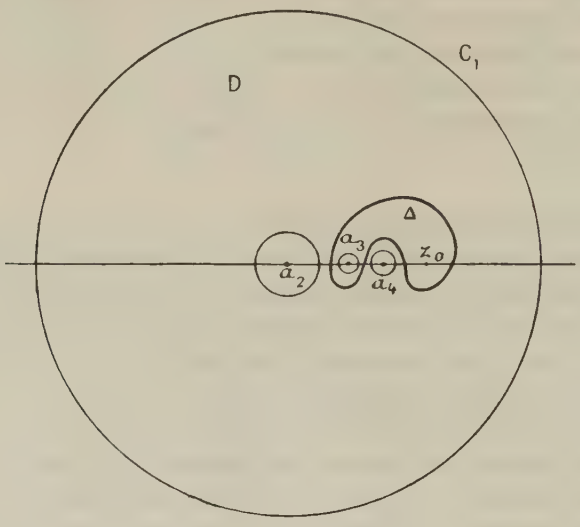


Fig. 2.

extraite de $\mathcal{J}_1(z_0)$ et $f(z) = \lim_{n=\infty} f_n(z)$, on a aussi $F(Z) = \lim_{n=\infty} F_n(Z)$, donc (n° 27) $U_n(S) \equiv U(S)$ pour $n > N$, si U et U_n sont les endomorphismes associés à F et F_n. Ainsi, $\mathcal{J}_1(z_0)$ ne peut être connexe que si $U(S)$ est le même pour toutes les fonctions $F(Z)$ associées aux $f(z)$ de $\mathcal{J}_1(z_0)$ avec la convention $F(Z_0) = Z_0$. Reste à montrer sur un exemple que le contraire peut se produire.

Pour cela, partons d'un domaine Δ simplement connexe et borné où l'on puisse trouver deux points a_3 et z_0 tels qu'il y ait, sur le segment qui les joint, un point a_4 n'appartenant pas à Δ (*fig.* 2); si l'on représente conformément Δ sur le cercle $|z - a_2| < R_1$ de manière que a_3 ait pour image le point a_2, z_0 a pour image un point situé à la distance αR_1 de a_2; comme α ne dépend pas de R_1, on peut choisir R_1 de manière que le maximum de la distance de z_0 à un point de Δ soit inférieur à la fois à αR_1 et à $(1 - \alpha)R_1$; si l'on place ensuite le point a_2 sur le prolongement du segment $z_0 a_3$ à la distance αR_1 de z_0, Δ est

intérieur à la circonférence C_1 de centre a_2, rayon R_1, $a_2 \notin \bar{\Delta}$, et l'on a une fonction $z' = f(z)$ qui représente conformément le cercle $|z - a_2| < R_1$ sur Δ de manière que

$$a_3 = f(a_2) \qquad \text{et} \qquad z_0 = f(z_0).$$

Si l'on prend pour axe réel la droite $a_2 a_3 a_4 z_0$, la fonction $g(z) = \overline{f}(\bar{z})$ représente conformément le cercle $|z - a_2| < R_1$ sur le domaine symétrique de Δ par rapport à l'axe réel, et l'on a encore

$$a_3 = g(a_2) \qquad \text{et} \qquad z_0 = g(z_0).$$

On peut enfin choisir les nombres R_2, R_4 au plus égaux respectivement aux distances de a_2, a_4 à Δ et le nombre R_3 tel que $|z - a_2| > R_2$ entraîne $|f(z) - a_3| > R_3$, et par suite aussi $|g(z) - a_3| > R_3$. Si D est le domaine défini par les inégalités

$$R_2 < |z - a_2| < R_1, \qquad z - a_3| > R_3, \qquad |z - a_4| > R_4,$$

$f(z)$ et $g(z)$ sont deux transformations intérieures de D qui laissent fixe z_0. Avec les notations utilisées dans ce Chapitre, on peut choisir les fonctions associées $F(Z)$ et $G(Z)$ de manière qu'elles vérifient (10) avec le même endomorphisme $U(S)$ défini par

$$U(S_2) = S_3, \qquad U(S_3) = U(S_4) = E,$$

mais alors $F(Z_0)$ et $G(Z_0)$ sont homologues dans S_4 (pour un choix convenable de S_4, que l'on peut supposer fait); si au contraire on adopte la convention $F(Z_0) = G(Z_0)$, on a deux fonctions $F(Z)$ et $G(Z)$ associées aux endomorphismes distincts $U(S)$ et $S_4 U(S) S_4^{-1}$. Et cependant $f(z)$ et $g(z)$ appartiennent à une même classe $\mathcal{J}_1$ associée à un sous-groupe $\mathfrak{U}$ cyclique (celui des puissances de S_3).

32. Soient z_0 un point de D, Z_0 une de ses images dans le cercle $|Z| < 1$, choisie une fois pour toutes; à chaque $f(z)$ appartenant à $\mathcal{J}$, mais non à $\mathcal{J}_0$, et pour laquelle $z_0 = f(z_0)$, nous associerons la fonction $F(Z)$ définie par la convention $Z_0 = F(Z_0)$, et par suite un sous-groupe $\mathfrak{U}$ bien déterminé. Ce qui précède conduit à rechercher une constante de point fixe relative, non pas à l'ensemble de ces fonctions $f(z)$, mais seulement à celles qui correspondent à un $\mathfrak{U}$ donné : soit $\Omega_{\mathfrak{U}}(z_0, D)$ cette constante. Nous poserons

$$B_{\mathfrak{U}}(Z_0, Z) \equiv \prod_{S \in \mathfrak{U}} \frac{\overline{SZ_0}}{|SZ_0|} \frac{SZ_0 - Z}{1 - \overline{SZ_0} Z}; \tag{16}$$

lorsque Z subit une substitution du groupe $\mathfrak{U}$, $B_{\mathfrak{U}}(Z_0, Z)$ est multiplié par une

constante de module 1 ; comme les $U(S_k)$ sont des substitutions génératrices de $\mathfrak{U}$, nous poserons

$$B_{\mathfrak{U}}[Z_0, U(S_k)Z] \equiv e^{i\theta_k} B_{\mathfrak{U}}(Z_0, Z) \qquad (2 \leq k \leq p). \tag{17}$$

Pour toute $S \in \mathcal{G}$, $F(SZ_0) = U(S)Z_0$ d'après (10) et notre convention $Z_0 = F(Z_0)$; d'autre part $U(S) \in \mathfrak{U}$, donc $B_{\mathfrak{U}}[Z_0, F(SZ_0)] = 0$; la fonction $B_{\mathfrak{U}}[Z_0, F(Z)]$, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|Z| < 1$, admet donc tous les points SZ_0 comme zéros et l'on a

$$B_{\mathfrak{U}}[Z_0, F(Z)] \equiv B(Z_0, Z)\, H(Z), \tag{18}$$

où

$$H \in \mathcal{H}[\varphi_2(z_0) - \theta_2, \ldots, \varphi_p(z_0) - \theta_p];$$

par suite

$$|f'(z_0)| \prod_{\substack{S \in \mathfrak{U} \\ S \neq E}} \left| \frac{SZ_0 - Z_0}{1 - Z_0 SZ_0} \right| = |H(Z_0)| \prod_{\substack{S \in \mathcal{G} \\ S \neq E}} \left| \frac{SZ_0 - Z_0}{1 - Z_0 SZ_0} \right| ;$$

si l'on introduit les points $z_1, \ldots, z_q$ de D ($0 \leq q \leq p-1$) (1) qui définissent (n° 25) les extrémales de $\mathcal{H}[\varphi_2(z_0) - \theta_2, \ldots, \varphi_p(z_0) - \theta_p]$, on a

$$\log \Omega_{\mathfrak{U}}(z_0, D) \leq \log \prod_{S \in \mathcal{G} - \mathfrak{U}} \left| \frac{SZ_0 - Z_0}{1 - Z_0 SZ_0} \right| - G(z_0, z_1) - \ldots - G(z_0, z_q), \tag{19}$$

inégalité analogue à l'égalité (12) relative à la classe $\mathcal{J}_0$. Mais ce n'est qu'une inégalité car si, inversement, l'on se donne une fonction H(Z) quelconque de $\mathcal{H}[\varphi_2(z_0) - \theta_2, \ldots, \varphi_p(z_0) - \theta_p]$, l'identité (18) ne définit pas en général une fonction F(Z) holomorphe.

On peut appliquer le même procédé au problème traité au n°18, relativement cette fois aux transformations $f(z)$ correspondant (au sens ci-dessus) à un $\mathfrak{U}$ donné : au lieu de la condition nécessaire et suffisante (14) du Chapitre II, on obtient une condition nécessaire, qui améliore l'inégalité $G(z'_1, z'_2) > G(z_1, z_2)$ fournie par le principe de Lindelöf.

CHAPITRE IV.

Sur les transformations intérieures d'un domaine a deux dimensions complexes.

33. Soit D un domaine borné, univalent, de l'espace rapporté à deux variables complexes x, y ; les lettres telles que z désigneront des points de D, c'est-à-dire des couples (x, y), la notation $z_1 = F(z)$ une transformation inté-

(1) $q = 0$ si $\theta_k = \varphi_k(z_0) \pmod{2\pi}$ quel que soit k ; il n'y a pas alors de fonction de Green au deuxième membre de (19).

rieure de D définie par deux fonctions $x_1 = f_1(x, y)$, $y_1 = f_2(x, y)$ holomorphes sur D et telles que $(x, y) \in D$ entraîne $(x_1, y_1) \in D$. On supposera que $z_1 = F(z)$ n'est pas une correspondance biunivoque de D avec lui-même.

Si $F(z)$ et $G(z)$ sont deux transformations intérieures de D, leur produit $G[F(z)]$ a un sens et est encore une transformation intérieure de D; ce produit sera noté $G \circ F(z)$; $F_n(z)$ désignera la $n^{\text{ième}}$ itérée de $F(z)$.

Par transformation limite de l'itération de $F(z)$ on entendra la limite (uniforme sur tout sous-ensemble compact de D) d'une suite d'itérées de $F(z)$ dont les rangs croissent indéfiniment : $\Phi(z) = \lim_{n_k = \infty} F_{n_k}(z)$; ce n'est pas toujours une transformation intérieure de D : on peut seulement écrire $\Phi(D) \subset \overline{D}$. Il en est déjà ainsi des transformations limites $\varphi(z)$ de l'itération d'une transformation intérieure $f(z)$ d'un domaine plan d, mais dans ce cas on a deux possibilités seulement : ou bien $\varphi(z)$ est une transformation intérieure de d, ou bien $\varphi(z) \equiv x$, x étant un point-frontière de d. Ici au contraire il peut arriver que le point $\Phi(z)$ appartienne à D pour certains z de D et à la frontière de D pour d'autres z de D, sauf toutefois pour les domaines les plus simples :

1° Prenons pour D un bicylindre $d_1 \times d_2$, d_1 et d_2 étant deux domaines plans : si, pour un z_0 de D, $\Phi(z_0) = (x_1, y_1)$ est point-frontière de D, c'est que par exemple x_1 est point-frontière de d_1; alors, si $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ sont les coordonnées de $\Phi(z)$, on a $\varphi_1(x, y) \equiv x_1$, donc $\Phi(D)$ est porté par la frontière de D.

2° Prenons maintenant pour D une boule, soit $|x|^2 + |y|^2 < 1$, et supposons encore que, pour un z_0 de D, $\Phi(z_0)$ soit un point-frontière de D; moyennant au besoin un changement de coordonnées, on peut supposer que ce point-frontière est $x = 1$, $y = 0$; alors

$$|\varphi_1(x, y)|^2 + |\varphi_2(x, y)|^2 \leq 1$$

entraîne

$$\varphi_1(x, y) \equiv 1, \qquad \varphi_2(x, y) \equiv 0.$$

Ainsi, dans ce deuxième cas, si l'ensemble $\Phi(D)$ a un point sur la frontière de D, il est réduit à ce point; on peut obtenir facilement (1) une extension de ce résultat.

Pour simplifier l'écriture, nous appellerons « domaine D_0 » un domaine D tel que, pour toute transformation limite $\Phi(z)$, l'ensemble $\Phi(D)$ soit tout entier porté, soit par D, soit par sa frontière.

Si

$$\Phi(z) = \lim_{n_k = \infty} F_{n_k}(z) \qquad \text{et} \qquad \Psi(z) = \lim_{p_k = \infty} F_{p_k}(z)$$

(1) On peut considérer un domaine D limité par une hypersurface régulière vérifiant l'inégalité (stricte) de E. Levi (*Annali di Mat.*, 3e série, t. 17, 1909, p. 61 et 18, 1911, p. 69).

sont deux transformations limites intérieures, il en est de même de

$$\Psi\circ\Phi(z)\equiv\Phi\circ\Psi(z)\equiv\lim_{k=\infty}F_{n_k+p_k}(z); \tag{1}$$

plus généralement

$$\Psi\circ\Phi(z_0)=\Phi\circ\Psi(z_0) \tag{2}$$

pourvu que

$$\Phi(z_0)\in D \qquad \text{et} \qquad \Psi(z_0)\in D.$$

34. Un ensemble E de points de D sera une variété analytique dans D si tout point z_0 de D possède un voisinage V tel que $E\cap V$ se compose des zéros communs à un nombre fini de fonctions $\not\equiv 0$, holomorphes sur V (1); dans le cas de deux variables qui nous occupe ici, l'ensemble $E\cap V$, ou bien est vide, ou bien est réduit au point z_0, ou bien se compose d'un nombre fini de composantes irréductibles au point z_0, définie chacune, soit par $x=x_0$, soit par $y-y_0=\mathcal{S}\left[(x-x_0)^{\frac{1}{n}}\right]$ ($\mathcal{S}$ étant une série entière sans terme constant), donc chacune homéomorphe à un voisinage de l'origine dans le plan de la variable complexe $t=y-y_0$ dans le premier cas, $t=(x-x_0)^{\frac{1}{n}}$ dans le deuxième; t sera appelé paramètre local attaché au point z_0 et à la composante considérée.

Soient un domaine Ω, une variété E et une transformation analytique $G(z)$ définie sur Ω, tels que $G(\Omega)\subset E$; si z_0 est un point de Ω, en écartant le cas $G(z)\equiv G(z_0)$, la relation $G(z)=G(z_0)$ définit une variété e et l'ensemble des points d'un voisinage V de z_0 qui n'appartiennent pas à e est connexe et partout dense sur V; comme les composantes irréductibles de E au point $G(z_0)$ n'ont que ce point en commun, l'ensemble $G(V-e)$ est porté par l'une d'elles, donc aussi $G(V)$; le paramètre local (attaché à cette composante) du point $G(z)$ est une fonction de z holomorphe et bornée sur $V-e$, donc holomorphe sur V; comme cette fonction n'est pas une constante, l'ensemble $G(V)$ couvre, au voisinage du point $G(z_0)$, la composante irréductible (de E en ce point) qui le porte.

Étant donné une transformation analytique $G(z)$ définie sur Ω, une variété E_1 dans Ω et une autre variété E telles que $G(E_1)\subset E$, on vérifie de même que les images par $G(z)$ des points voisins d'un point z_0 de E_1 sur une composante irréductible de E_1 en ce point, ou bien sont confondues au point $G(z_0)$, ou bien couvrent, au voisinage de ce point, une composante irréductible de E en ce point et que, dans ce cas, le paramètre local du point $G(z)$ est fonction holomorphe de celui du point z. Ce résultat s'applique en particulier à une variété E dans D invariante par la transformation $F(z)$, c'est-à-dire telle que $F(E)\subset E$.

(1) H. Cartan, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 61, 1944, p. 149, Appendice II.

35. Si $\mathcal{E}$ est l'espace topologique dans lequel un point ζ_0 se compose d'un point z_0 de E et d'une composante irréductible de E au point z_0, et un voisinage de ζ_0 de tous les points ζ de $\mathcal{E}$ associés à des points z de cette composante assez voisins de z_0, ce qui précède montre que la transformation $G(z)$ définit une application continue, dans le premier cas de Ω dans $\mathcal{E}$, dans le deuxième de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}$; comme les composantes connexes de $\mathcal{E}$ définissent les composantes irréductibles (1) de E (*cf.* Mémoire cité au n° 34), on peut ajouter à ce qui précède :

Si $G(\Omega) \subset E$, $G(\Omega)$ est tout entier porté par une même composante irréductible de E. Si $G(E_1) \subset E$, l'image par $G(z)$ de chaque composante irréductible de E_1 est tout entière portée par une même composante irréductible de E. Dans ce deuxième cas, si E_1 est irréductible et si $G(z) \equiv$ const. au voisinage d'un point z_0 de E_1 sur une composante irréductible de E_1 en ce point, $G(z) \equiv$ const. partout sur E_1 (Mémoire cité au n° 34, théorème γ).

Une variété irréductible E dans D peut se réduire à un point de D; sinon, et si, au voisinage d'un point $z_0 = (x_0, y_0)$ de D, elle est définie par $x = x_0$, E est la composante connexe du point y_0 dans la section $x = x_0$ de D; en dehors de ce cas, tous les paramètres locaux sur E sont de la forme $(x - x_0)^{\frac{1}{n}}$, la projection de E sur le plan des x est un domaine e_1; E a donc des points d'accumulation n'appartenant pas à E, donc situés sur la frontière de D puisque E est fermé dans D.

Dans le dernier cas, $\mathcal{E}$ est isomorphe (2) à un domaine plan, multivalent et ramifié, contenu dans e_1, autrement dit une surface de Riemann qui, d'après ce qui précède, ne peut être fermée.

36. La théorie (3) de l'itération d'une transformation intérieure $f(z)$ d'un domaine plan d repose principalement sur les deux énoncés suivants :

1° Si une transformation limite $\varphi(z) \equiv z_0 \in D$, z_0 est point double attractif pour la transformation $f(z)$:

$$f(z_0) = z_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(z_0)| < 1.$$

2° Si une tranformation limite $\varphi(z) \not\equiv$ const., $z_1 = f(z)$ met D en correspondance biunivoque avec lui-même.

---

(1) Au sens global du mot, où nous l'entendrons désormais chaque fois qu'il ne sera pas suivi de la mention « au point... ».

(2) Nous entendons par là qu'il y a entre $\mathcal{E}$ et la surface de Riemann, une correspondance biunivoque qui transforme le paramètre local sur $\mathcal{E}$ en uniformisante locale pour la surface.

(3) G. Valiron, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 55, 1931, p. 105 ou M. Heins, *Amer. J. Math.*, t. 63, 1941, p. 461.

Le premier énoncé s'étend au cas de plusieurs variables :

Théorème 1. — *Si une transformation limite* $\Phi(z) \equiv z_0 \in D$, z_0 *est point double attractif pour la transformation* $F(z)$: $F(z_0) = z_0$ *et les valeurs propres du déterminant fonctionnel de* $F(z)$ *au point* z_0 *sont de modules inférieurs à* 1.

On a

$$F(z_0) = F \circ \Phi(z_0) = \Phi \circ F(z_0) = z_0.$$

Si s est l'une des valeurs propres considérées, s^{n_k} est valeur propre du déterminant fonctionnel de $F_{n_k}(z)$ au point z_0 ; comme

$$\lim_{n_k = \infty} F_{n_k}(z) = \Phi(z) \equiv \text{const.}, \qquad \lim_{n_k = \infty} s^{n_k} = 0, \qquad |s| < 1.$$

Cet énoncé vaut aussi pour une variété invariante :

Théorème 2. — *Si une variété* E *dans* D *est invariante par* $F(z)$ *et si, pour une transformation limite* $\Phi(z)$, *l'ensemble* $\Phi(E)$ *se réduit à un point* z_0 *de* D, *alors* $z_0 \in E$, z_0 *est point double de la transformation* $F(z)$: $F(z_0) = z_0$, *et ce point double est attractif pour* E : $\lim_{n=\infty} F_n(z) = z_0$ *pour tout* z *de* E, *et cela uniformément sur* $E \cap K$ *pour tout compact* $K \subset D$.

Le premier point résulte de ce que E est fermé dans D ; le deuxième s'obtient comme au théorème 1 ; quant au troisième, ayant posé $\Phi(z) = \lim_{n_k = \infty} F_{n_k}(z)$, on peut extraire de toute autre suite convergente d'itérées de $F(z)$ une suite partielle $F_{m_j}(z)$ et associer à chaque m_j le plus grand des n_k inférieurs à m_j, soit p_j, de manière que la suite $F_{m_j - p_j}(z)$ converge ; comme $\lim_{p_j = \infty} F_{p_j}(z) = z_0$ uniformément sur $E \cap K$ et $F_{m_j - p_j}(z_0) = z_0$, on a aussi $\lim_{m_j = \infty} F_{m_j}(z) = z_0$ uniformément sur $E \cap K$.

37. Au contraire, le deuxième énoncé ne s'étend pas au cas de deux variables, car c'est seulement si $\Phi(z)$ a un déterminant fonctionnel non identiquement nul que $z_1 = F(z)$ met D en correspondance biunivoque avec lui-même ; mais on peut l'étendre à une variété *irréductible* invariante dans D :

Théorème 3. — *Si* E *est une variété irréductible, non ponctuelle, invariante par* $F(z)$ *et si, pour une transformation limite* $\Phi(z)$, *l'ensemble* $\Phi(E)$ *couvre, au voisinage d'un point* z_0 *de* E, *une composante irréductible de* E *en ce point, alors :*

1° *la transformation* $z_1 = F(z)$ *met en correspondanee biunivoque avec lui-même l'ensemble* E *ou l'espace* $\mathfrak{E}$ (n° 35) ;

2° *ou bien une itérée de* $F(z)$ *conserve* E *point par point, ou bien* $\mathfrak{E}$ *est isomorphe à un domaine plan, univalent, à connexion simple ou double :* $|Z| < R$ *ou* $R' < |Z| < R$ $(0 \leq R' < R < +\infty)$, *l'image dans le plan* Z *de la transformation* $z_1 = F(z)$ *étant une rotation d'angle incommensurable avec* π : $Z_1 = e^{i\alpha} Z$;

3° *toute transformation limite* $\Phi_1(z)$ *met aussi l'ensemble* E *en correspondance biunivoque avec lui-même; si en outre* $\Phi_1(z)$ *est intérieure,* $\Phi_1(D) = E$;

4° *s'il existe au moins une transformation limite intérieure, toutes les transformations limites sont intérieures;*

5° *si* D *est un domaine* D_0 (n° 33), *toute transformation limite est intérieure.*

Démonstration. — 1° Si $\Phi(z) = \lim_{n_k = \infty} F_{n_k}(z)$ et si $\Psi(z)$ est limite d'une suite $F_{m_j}(z)$ convergente extraite de la famille $F_{n_{k'}-n_k}(z)$ (1), $\Psi \circ \Phi(z) = \Phi(z)$ pourvu que $\Phi(z) \in D$; on a donc $\Psi(z) = z$ au voisinage de z_0 sur une composante irréductible de E en z_0, et par suite partout sur E puisque E est irréductible.

Les transformations $z_1 = F_{m_j}(z)$ définissent des transformations intérieures de $\mathcal{E}$, soit $\zeta_1 = \varphi_j(\zeta)$, où le paramètre local de ζ_1 est fonction holomorphe de celui de ζ, qui convergent (uniformément sur tout compact) vers la transformation identique; dans ces conditions $z_1 = F(z)$ définit une transformation biunivoque de $\mathcal{E}$ en lui-même (2), et aussi de E en lui-même.

2° Si aucune itérée de $F(z)$, en particulier $F_{m_{j'}-m_j}(z)(j' > j)$, ne conserve E point par point, les $\varphi_j(\zeta)$ sont des transformations biunivoques distinctes de $\mathcal{E}$ en lui-même qui convergent vers la transformation identique, autrement dit le groupe des représentations de la surface de Riemann $\mathcal{E}$ sur elle-même n'est pas discontinu; une telle surface (3), ou bien est une surface fermée de genre 0 ou 1 (ce qui est contraire à la remarque qui termine le n° 35), ou bien est isomorphe à l'un des domaines plans indiqués dans l'énoncé, c'est-à-dire est la surface de Riemann d'une fonction holomorphe sur ce domaine; $R < +\infty$ résulte de ce que $\mathcal{E}$ est contenu dans le domaine borné e_1 (n° 35).

La transformation $z_1 = F(z)$ a pour image dans le domaine $|Z| < R$ ou $R' < |Z| < R$ une transformation conforme biunivoque de ce domaine en lui-même dont, par hypothèse, aucune itérée n'est la transformation identique, mais dont une suite d'itérées converge vers celle-ci : $Z_1 = e^{i\alpha} Z$.

3° Si $F_n(z)$ conserve E point par point, toute transformation limite $\Phi_1(z)$ coïncide, pour $z \in E$, avec l'une des transformations $F(z), F_2(z), \ldots, F_n(z) = z$. Si aucune itérée de $F(z)$ ne conserve E point par point, on se reporte au plan Z et remarque que les transformations limites de l'itération de $Z_1 = e^{i\alpha} Z$ sont les transformations $Z_1 = e^{i\beta} Z$.

Si $\Phi_1(z)$ est une transformation limite intérieure, considérons l'ensemble ouvert Ω intérieur de l'ensemble des points z de D tels que $\Phi_1(z) \in E$, et montrons que Ω n'est pas vide et est fermé dans D : la connexion de D entraînera alors $\Omega = D$.

---

(1) Où $k' > k$; on suppose (*cf.* n° 33) que les m_j et les n_k correspondants croissent indéfiniment.

(2) H. CARTAN, *Math. Z.*, t. 35, 1932, p. 760.

(3) H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, § 21.

Ω n'est pas vide : soit $\Psi_1(z)$ la transformation limite associée à $\Phi_1(z)$, comme $\Psi(z)$ ci-dessus à $\Phi(z)$, de sorte que $\Psi_1 \circ \Phi_1(z) = \Phi_1(z)$ pourvu que $\Phi_1(z) \in D$; si E_1 est la variété dans D définie par $\Psi_1(z) = z$ [1], comme on vient de voir que $\Phi_1(E) = E$, on a $E \subset E_1$; comme les points de E_1 où E_1 a plusieurs composantes irréductibles sont isolés, on peut trouver $z_1 \in E$ tel qu'au point $\Phi_1(z_1)$ il n'y ait qu'une composante irréductible de E_1; alors, $E \subset E_1$ entraîne que E et E_1 coïncident au voisinage de $\Phi_1(z_1)$; l'image par $\Phi_1(z)$ d'un voisinage (dans D) du point z_1, portée par E_1, l'est aussi par E, et $z_1 \in \Omega$.

Ω est fermé dans D : soit z^* un point de D limite d'une suite de points z_n de Ω; comme $\Phi_1(z^*) \in D$ [2], $\Phi_1(z_n) \in E$ et que E est fermé dans D, $\Phi_1(z^*) \in E$; il existe un voisinage V du point $\Phi_1(z^*)$, une fonction $f_V(z)$ holomorphe sur V telle que les points de $E \cap V$ soient les points de V qui annulent $f_V(z)$, et une boule ouverte B de centre z^* telle que $\Phi_1(B) \subset V$; pour n assez grand, $z_n \in B$, au voisinage de z_n on a

$$\Phi_1(z) \in E \cap V, \qquad \text{donc} \quad f_V[\Phi_1(z)] \equiv 0;$$

cette identité a lieu partout sur B, $\Phi_1(B) \subset E$, $z^* \in \Omega$.

4° Soient

$$\Phi_1(z) = \lim_{p_k = \infty} F_{p_k}(z)$$

une transformation limite intérieure et

$$\Phi_2(z) = \lim_{q_k = \infty} F_{q_k}(z)$$

une autre transformation limite; on peut supposer, en remplaçant au besoin les suites p_k et q_k par des suites partielles [3], $q_k > p_k$ et la suite $F_{q_k - p_k}(z)$ convergente : soit $\Phi_3(z)$ sa limite; comme $\Phi_1(z)$ est intérieure, on a

$$\Phi_2(z) \equiv \Phi_3 \circ \Phi_1(z),$$

d'après la troisième partie du théorème.

$$\Phi_1(D) = E \qquad \text{et} \qquad \Phi_3(E) = E, \qquad \text{donc} \quad \Phi_2(D) = E,$$

$\Phi_2(z)$ est intérieure.

5° On sait déjà que toute transformation limite transforme un point de E en un point de E, donc de D.

38. *Remarques.* — 1° Une conséquence de la troisième partie du théorème est que, s'il y a au moins une transformation limite intérieure, une seule variété

---

(1) $\Psi_1(z) \not\equiv z$ puisque le déterminant fonctionnel de $\Psi_1(z)$ est identiquement nul.

(2) Ici seulement intervient l'hypothèse que $\Phi_1(z)$ est intérieure.

(3) Comme dans la démonstration du théorème 2 (n° 36).

irréductible E peut jouir des propriétés énoncées, mais il n'en est plus ainsi s'il n'y a pas de transformation limite intérieure. Exemple : la transformation $F(z)$ est définie par $x_1 = x$, $y_1 = ky$ $(0 < k < 1)$, D est le bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$ à l'exception des points $x \in K, y = 0$, K étant un ensemble fermé du plan des x contenu dans $|x| \leq 1$; chaque composante connexe E du complémentaire de K par rapport au cercle $|x| < 1$, $y = 0$ est une variété vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

2° Si une itérée de $F(z)$ conserve E point par point, $\mathcal{E}$ peut ne pas être isomorphe à un domaine plan, univalent, à connexion simple ou double. En effet, dans l'exemple ci-dessus, chaque E est un domaine d'ordre de connexion quelconque.

3° Si E vérifie les hypothèses du théorème, et si les transformations limites sont intérieures, le lieu des images d'un point z_0 de D par ces transformations [c'est-à-dire l'ensemble d'accumulation de la suite des $F_n(z_0)$] est un ensemble fermé $K(z_0) \subset D$; d'après le raisonnement fait pour la quatrième partie du théorème, ce lieu est aussi $K[\Phi_1(z_0)]$, $\Phi_1(z)$ étant l'une des transformations limites ; comme $\Phi_1(z_0) \in E$, d'après la deuxième partie, le lieu $K(z_0)$, ou bien comprend un nombre fini de points, ou bien est une courbe fermée analytique tracée sur E, image d'une circonférence $|Z| = r$.

4° Dans les mêmes hypothèses (E vérifiant le théorème 3, transformations limites intérieures), le raisonnement de la quatrième partie du théorème montre encore qu'il y a autant de transformations limites distinctes opérant sur D qu'il y en a de distinctes opérant sur E ; d'une façon précise, les deux ensembles ainsi définis ont même puissance, que la deuxième partie du théorème permet d'évaluer : si une itérée de $F(z)$ conserve E point par point, il y a un nombre fini de transformations limites ; sinon, leur ensemble a la puissance du continu. En particulier, pour qu'il y ait une seule transformation limite, c'est-à-dire pour que la suite $F_n(z)$ converge, il faut et il suffit que $F(z)$ conserve E, non seulement globalement, mais point par point.

39. Reste à montrer l'existence d'une variété E dans D vérifiant les hypothèses du théorème. Commençons par le cas où la transformation $F(z)$ présente dans D un point double que nous prenons pour origine ; si s_1 et s_2 sont les valeurs propres du déterminant fonctionnel de $F(z)$ en ce point, on a

$$|s_1| \leq 1, \qquad |s_2| \leq 1, \qquad |s_1 s_2| < 1 ;$$

le cas $|s_1| < 1$, $|s_2| < 1$ étant celui du point double attractif, reste à étudier le cas $s_1 = e^{i\alpha}$, $|s_2| < 1$; comme alors $s_1 \neq s_2$, on peut, moyennant un changement de coordonnées, supposer la transformation $F(z)$ définie au voisinage de l'origine par

$$x_1 = e^{i\alpha} x + \ldots, \qquad y_1 = s_2 y + \ldots, \tag{3}$$

en convenant de représenter par des points de suspension un développement de Taylor où ne figurent que des termes de degré au moins égal à 2.

THÉORÈME 4. — *Si l'origine est point double pour la transformation* $F(z)$ *et si les valeurs propres du déterminant fonctionnel de* $F(z)$ *en ce point sont* $e^{\alpha i}$ *et* $s_2(|s_2|<1)$, *il passe par l'origine une variété* E *dans* D *vérifiant les hypothèses du théorème* 3; *si* α *est commensurable avec* π, *elle est conservée point par point par une itérée de* $F(z)$; *sinon, &* E *est isomorphe à un disque plan.*

D'après (3), la $n^{\text{ième}}$ itérée de $F(z)$ est définie au voisinage de l'origine par

$$x_n = e^{in\alpha}x + \ldots \qquad y_n = s_2^n y + \ldots,$$

donc une transformation limite $\Phi(z)$ par

$$\varphi_1(x, y) = e^{i\beta}x + \ldots, \qquad \varphi_2(x, y) = \ldots. \tag{4}$$

Si à $\Phi(z)$ on associe la transformation limite $\Psi(z)$ comme au n° 37, on a $\Psi \circ \Phi(z) = \Phi(z)$ pourvu que $\Phi(z) \in D$, en particulier au voisinage de l'origine; $\psi_1(x, y)$ et $\psi_2(x, y)$ ont la forme (4), mais, comme

$$\psi_1[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)] \equiv \varphi_1(x, y),$$

on a

$$\psi_1(x, y) = x + \ldots, \qquad \psi_2(x, y) = \ldots. \tag{5}$$

Soit ε la variété dans D définie par $\Psi(z) = z$; elle est invariante par $F(z)$, car, si $z \in \varepsilon$, $F(z) \in D$ et $\Psi(z) \in D$, donc, d'après (2),

$$\Psi \circ F(z) = F \circ \Psi(z) = F(z),$$

c'est-à-dire $F(z) \in \varepsilon$; d'après (5), elle est définie au voisinage de l'origine par deux équations de la forme

$$y = g_1(x, y), \qquad g_2(x, y) = 0,$$

g_1 et g_2 ne comprenant que des termes de degré au moins égal à 2; de la première résulte

$$y = \mathcal{S}(x), \tag{6}$$

et la deuxième est alors vérifiée, sans quoi la variété ε serait, au voisinage de l'origine, réduite à ce point, on aurait $\Phi(z) \equiv 0$ contrairement à (4); ainsi ε admet à l'origine une seule composante irréductible définie par (6); la composante irréductible (au sens global) de ε qui la contient, soit E, est invariante par $F(z)$ (puisque l'origine est conservée, *cf.* n° 35) et, d'après (4), vérifie l'hypothèse du théorème 3.

Si α est incommensurable avec π, aucune itérée de $F(z)$ ne conserve E point par point; réciproquement, s'il en est ainsi, la transformation image de

$z_1 = F(z)$ dans le plan Z doit avoir un point double sans qu'aucune de ses itérées soit la transformation identique, ce qui exclut la couronne circulaire $R' < |Z| < R$ (théorème 3, 2e partie); on peut rendre homologues les origines de D et du plan Z; comme, au voisinage de ces origines, x [paramètre local sur E à l'origine d'après (6)] et Z sont fonctions holomorphes l'un de l'autre, l'image de $z_1 = F(z)$ dans le plan Z est $Z_1 = e^{i\alpha}Z$ (avec le même α) et α est incommensurable avec π.

Remarque. — Lattès a montré (1) qu'il existe une série entière $\mathcal{S}(x)$ et une seule telle que la formule (6) définisse, au voisinage de l'origine, une variété invariante par la transformation $F(z)$; sa méthode permet d'en calculer les coefficients de proche en proche.

40. Supposant désormais la transformation $F(z)$ sans point double, soit à chercher un critère d'existence d'une variété E dans D vérifiant les hypothèses du théorème 3; ces hypothèses impliquent que, pour une transformation limite $\Phi(z)$ et un point z_1 de D, $\Phi(z_1) \in D$; mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante : elle l'est seulement vis-à-vis d'une itérée de $F(z)$:

Théorème 5. — *Si la transformation* $F(z)$ *est sans point double et si, pour une transformation limite* $\Phi(z)$ *et un point* z_1 *de* D, $\Phi(z_1) \in D$, *alors il existe un nombre fini de variétés irréductibles non ponctuelles* $E_1, E_2, \ldots, E_N$ *telles que la transformation* $F(z)$ *mette en correspondance biunivoque* E_1 *avec* E_2, E_2 *avec* $E_3, \ldots, E_N$ *avec* E_1, *et dont chacune vérifie les hypothèses du théorème* 3 *vis-à-vis de la transformation* $F_N(z)$.

Soit encore (*cf.* nos 37 et 39) $\Psi(z)$ la transformation limite telle que $\Psi \circ \Phi(z) = \Phi(z)$ pourvu que $\Phi(z) \in D$, en particulier sur une boule B de centre z_1; la variété ε dans D définie par $\Psi(z) = z$ est invariante par $F(z)$; l'ensemble $\Phi(B)$ est porté par une composante irréductible ε_0 de ε (*cf.* n° 35) sans être réduit à un point (théorème 1), $F(\varepsilon_0)$ par une composante irréductible ε_1 de ε (n° 35) sans être réduit à un point, sans quoi $F \circ \Phi(B)$ le serait *a fortiori* (théorème 1), $F(\varepsilon_1)$ par une composante irréductible $\varepsilon_2, \ldots$.

Soit d'autre part

$$\Psi(z) = \lim_{m_k = \infty} F_{m_k}(z);$$

le point $F_{m_k} \circ \Phi(z_1)$ appartient à ε_{m_k} et a pour limite $\Phi(z_1)$; comme $\Phi(z_1) \in D$, au voisinage de ce point passent un nombre fini de composantes irréductibles de ε; on peut donc trouver deux entiers m_k et N tels que $\varepsilon_{m_k} = E_1$ et ε_{m_k+N} coïncident; chacune des variétés $\varepsilon_{m_k+n-1} = E_n$ $(1 \leq n \leq N)$ est invariante par $F_N(z)$;

(1) S. Lattès, *Thèse* (*Annali di Mat.*, 3e série, t. 13, 1907, p. 1).

comme elles font partie de ε, chacune est conservée point par point par $\Psi(z)$, *a fortiori* par la $N^{ième}$ itérée de celle-ci, soit $\Psi_N(z)$, qui est limite d'itérées de $F_N(z)$, donc vérifie les hypothèses du théorème 3 vis-à-vis de $F_N(z)$; par suite chacune est transformée biunivoquement en elle-même par $F_N(z)$ (première partie du théorème 3); comme

$$F(E_1)\subset E_2, \qquad F(E_2)\subset E_3, \qquad \ldots, \qquad F(E_N)\subset E_1,$$

il en résulte que $F(z)$ transforme biunivoquement E_1 en E_2, E_2 en E_3, ..., E_N en E_1.

41. *Remarques.* — 1° Pour s'assurer que les variétés $E_1, \ldots, E_N$ peuvent être distinctes, il suffit de reprendre l'exemple du n° 38 avec l'ensemble K formé de N rayons du cercle $|x|\leq 1$ faisant entre eux l'angle $\frac{2\pi}{N}$ et la transformation $F(z)$ définie par

$$x_1 = e^{\frac{2\pi}{N}} x, \qquad y_1 = ky.$$

2° Si $\Phi(z)$ est limite d'une suite d'itérées de $F(z)$ dont les indices sont tous multiples de N plus un même reste p ($0\leq p\leq N-1$), on a (troisième partie du théorème 3) :

$$\Phi(E_1) = E_{p-1}, \qquad \ldots, \qquad \Phi(E_N) = E_p;$$

si donc $E_1, \ldots, E_N$ sont distinctes, une suite d'itérées de $F(z)$ ne peut converger que si leurs indices sont tous, à partir d'un certain rang, multiples de N plus un même reste.

3° Les hypothèses du théorème 5 sont vérifiées en particulier si, la transformation $F(z)$ étant dépourvue de point double, une de ses itérées en a un, soit $z_1 = F_M(z_1)$; z_1 ne peut être point double attractif pour $F_M(z)$ sans quoi il le serait aussi pour $F(z)$ (théorème 1); le théorème 4 s'applique donc à $F_M(z)$ et au point double z_1, d'où résulte $N\leq M$.

4° S'il existe une transformation limite intérieure $\Phi(z)$, il en existe aussi une qui soit limite d'itérées de $F_N(z)$, à savoir $\Phi_N(z)$; la première remarque du n° 38, appliquée à $F_N(z)$, montre alors que $E_1, \ldots, E_N$ se confondent et, en réunissant les résultats des théorèmes 3 à 5, on peut énoncer :

Théorème 6. — *Si l'itération de* $F(z)$ *donne naissance à au moins une transformation limite intérieure non constante, il existe une variété* E *et une seule vérifiant les hypothèses du théorème* 3, *toutes les transformations limites sont intérieures et l'image de* D *par chacune d'elles est* E.

Comme on ne peut avoir $E\subset D$ (n° 35), en rapprochant les théorèmes 1 et 6,

on obtient le suivant, qui étend à deux variables le théorème de Ritt sur l'itération dans un domaine plan (¹) :

COROLLAIRE 1. — *Si, pour une valeur de n, on a* $\overline{F_n(D)} \subset D$, *la transformation* $F(z)$ *admet un point double attractif.*

42. THÉORÈME 7. — *Étant donné une transformation intérieure* $F(z)$ *d'un domaine* D, *ou bien* $\Phi(D)$ *est porté par la frontière de* D *quelle que soit la transformation limite* $\Phi(z)$, *ou bien une itérée* $F_M(z)$ *est transformation intérieure d'un sous-domaine* $D_1 \subset D$ *tel que* $\Phi(D_1) \subset D_1$ *pour toute* $\Phi(z)$ *limite d'itérées de* $F_M(z)$.

Si la première conclusion n'a pas lieu, il existe une $\Phi(z)$ et un point z_1 de D tels que $\Phi(z_1) \in D$; je dis qu'alors l'ensemble Ω, des points de D dont l'image par n'importe quelle transformation limite appartient à D, n'est pas vide : en effet, si $F(z)$ admet un point double, il fait partie de Ω; sinon, on est dans les hypothèses du théorème 5 et, d'après la deuxième remarque du n° 41, l'image d'un point de E_1 par n'importe quelle transformation limite appartient à l'une des variétés $E_1, \ldots, E_N$, donc à D, de sorte que $E_1, \ldots, E_N$ font partie de Ω.

Ω est ouvert : soit z^* un point de Ω limite d'une suite de points z_k n'appartenant pas à Ω; on peut trouver les entiers croissants n_k tels que la distance du point $F_{n_k}(z_k)$ à la frontière de D soit inférieure à $\frac{1}{k}$; si $\Phi(z)$ est limite d'une suite extraite de la suite $F_{n_k}(z)$, le point $\Phi(z^*)$, limite d'une suite extraite de $F_{n_k}(z_k)$, appartient à la frontière de D, contrairement à l'hypothèse $z^* \in \Omega$.

Si $z^* \in \Omega$, $F(z^*) \in \Omega$ et même l'image de z^* par n'importe quelle transformation limite appartient à Ω; si Δ_0 est la composante connexe de Ω qui contient z^*, $F(\Delta_0)$ est contenu dans une autre composante connexe Δ_1 de Ω, $F(\Delta_1)$ dans une autre, $\Delta_2, \ldots$; si $\Phi(z) = \lim_{n_k = \infty} F_{n_k}(z)$, comme $\Phi(z^*) \in \Omega$, on peut trouver deux entiers n_k et M tels que $\Delta_{n_k} = D_1$ et Δ_{n_k+M} coïncident; comme $F_M(z)$ est transformation intérieure de D_1, pour toute $\Phi(z)$ limite d'itérées de $F_M(z)$, $z \in D_1$ entraîne $\Phi(z) \in \overline{D}_1$; mais $\Phi(z) \in \Omega$, donc $\Phi(z) \in D_1$.

Si $z^* = F(z^*)$, $z^* \in \Omega$; dans le raisonnement ci-dessus, on a simplement $M = 1$, $D_1 = \Delta_0$; ainsi :

COROLLAIRE 2. — *Si* z_1 *est point double de* $F(z)$, *il existe un sous-domaine* D_1 *tel que* $z_1 \in D_1 \subset D$, $F(D_1) \subset D_1$ *et* $\Phi(D_1) \subset D_1$ *pour toute transformation limite* $\Phi(z)$.

43. Cherchons maintenant à quelle condition la suite $F_n(z)$ converge vers une transformation $\Phi(z)$ non constante telle que, pour un point z_1 de D,

(¹) J. F. RITT, *Ann. Math.*, 22, 1921, p. 157.

$\Phi(z_1) \in D$: s'il en est ainsi, le théorème 5 s'applique avec $N = 1$ d'après la deuxième remarque du n° 41; une variété E vérifie les hypothèses du théorème 3 et est conservée point par point par $F(z)$, car, par hypothèse, $F \circ \Phi(z) = \Phi(z)$ pourvu que $\Phi(z) \in D$, d'où $F(z_1) = z_1$ pour $z_1 \in E$ (troisième partie du théorème 3); ainsi la transformation $F(z)$ a une infinité de points doubles non isolés, en chacun desquels la transformation $F(z) - z$ a un déterminant fonctionnel nul, donc celui de $F(z)$ admet la valeur propre 1.

Réciproquement, si $F(z)$ a un point double dans D (pris comme origine) où son déterminant fonctionnel a les valeurs propres 1 et s_2 ($|s_2| < 1$), d'après le théorème 4, il passe par l'origine une variété E dans D vérifiant les hypothèses du théorème 3 et conservée point par point par une itérée de $F(z)$; je dis qu'elle l'est par $F(z)$ elle-même : l'élimination de y entre (3) et (6) donne en effet une relation de la forme $x_1 = x + \dots$ qui doit se réduire à $x_1 \equiv x$ puisque son $n^{\text{ième}}$ itérée est $x_n \equiv x$, car

$$x_1 \equiv x + ax^p + \dots \qquad \text{entraînerait} \qquad x_n \equiv x + nax^p + \dots .$$

D'autre part (corollaire 2, n° 42), il existe un sous-domaine D_1 tel que $o \in D_1 \subset D$, dans lequel on peut faire le même raisonnement; en outre, dans D_1, toutes les transformations limites sont intérieures et (quatrième remarque du n° 38) la suite $F_n(z)$ converge pour $z \in D_1$, donc aussi pour $z \in D$. Ainsi :

Théorème 8. — *Pour que la suite des itérées d'une transformation* $F(z)$ *converge vers une transformation limite non constante* $\Phi(z)$ *telle que* $\Phi(D)$ *ne soit pas porté par la frontière de* D, *il faut et il suffit que* $F(z)$ *ait, soit une infinité de points doubles dont un au moins non isolé, soit un point double où son déterminant fonctionnel ait la valeur propre* 1.

SUR LES

POINTS FIXES DES TRANSFORMATIONS CYCLIQUES DES DOMAINES PLANS

PAR M. N. PASTIDÈS.

1. *Introduction.* — Soit D un domaine simplement connexe du plan de la variable complexe z, dont la frontière comprend plus d'un point, et soit

$$Z = f(z) \tag{1}$$

une transformation continue et biunivoque du domaine D en lui-même. Nous supposons de plus qu'il existe un nombre entier n tel que la $n^{\text{ième}}$ itérée de la transformation soit la transformation identique. En désignant les itérées successives de la transformation (1) par

$$Z_1 = Z = f(z), \qquad Z_2 = f_2(z), \qquad \ldots, \qquad Z_{n-1} = f_{n-1}(z), \qquad Z_n = f_n(z),$$

on a donc

$$f_n(z) = z$$

pour tout point z de D. Nous appelons une pareille transformation, une transformation cyclique d'ordre n, et nous nous proposons dans ce travail de faire l'étude de l'ensemble de ses points fixes.

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction analytique de z, les résultats sont immédiats. En effet soit $u = F(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme du domaine D sur l'intérieur du cercle unité de centre l'origine. La transformation

$$U = \psi(u), \qquad \text{où} \quad \psi(u) = F\big[f[F_{-1}(u)]\big]$$

fait la représentation conforme du cercle unité sur lui-même; de plus elle est cyclique d'ordre n. Donc $[U, u]$ est une substitution linéaire elliptique, et par

conséquent elle a un point fixe, et un seul, à l'intérieur du cercle $|u|<1$. Il s'ensuit que la transformation

$$Z=f(z)$$

a un point fixe, et un seul, à l'intérieur de D.

Considérons encore le cas où, $F(z)$ ayant la même signification que plus haut, nous avons

$$f(z)=F_{-1}[\overline{F(z)}].$$

$\overline{F(z)}$ étant la conjuguée de $F(z)$. Alors la ligne décrite par

$$z=F_{-1}(u)$$

quand u décrit le segment de l'axe réel compris entre -1 et 1, est le lieu des points fixes de la transformation $Z=f(z)$. Remarquons que dans ce cas on a $f_2(z)=z$ pour tout $z\in D$.

Ce sont ces propriétés que nous étendons au cas général, où $f(z)$ n'est ni analytique, ni de la forme spéciale considérée plus haut.

Nous distinguons deux cas, suivant que la transformation considérée conserve le sens de parcours ou non. Voici ce que nous entendons par là. Nous disons que la transformation $Z=f(z)$ *conserve le sens de parcours*, si, z parcourant dans le sens positif une courbe γ simple fermée de Jordan, située dans D, Z parcourt la transformée Γ de γ dans le sens positif aussi. Le sens positif pour γ par exemple, c'est celui qui, quand z décrit toute la courbe γ une fois, fait augmenter de 2π l'argument de $z-z_0$, où z_0 est un point intérieur du domaine intérieur à D et de frontière γ. Remarquons que d'après les propriétés classiques des transformations continues et biunivoques des domaines plans, si la propriété expliquée ci-dessus a lieu pour une courbe γ particulière, elle a lieu aussi pour toute autre courbe γ du même genre. Si, z parcourant γ dans le sens positif, Z parcourt Γ dans le sens négatif, alors nous disons que la transformation $Z=f(z)$ change le sens de parcours.

Les résultats auxquels nous sommes arrivé dans ce travail sont les suivants :

1° Si la transformation (1) conserve le sens de parcours, elle a un point fixe dans D et un seul.

2° Si la transformation (1) change le sens de parcours, on a $f_2(z)=z$ quel que soit $z\in D$. Les points fixes de la transformation forment alors un continu linéaire de Jordan.

Pour simplifier le langage nous appellerons *contour de Jordan* toute courbe de Jordan simple et fermée, et *domaine de Jordan* tout domaine borné dont la frontière est un contour de Jordan.

Nous ferons usage des notations suivantes :

$f(\Gamma)$ et $f(\Delta)$ pour désigner les transformés du contour de Jordan Γ et du domaine Δ par la transformation $Z = f(z)$.

2. Théorème I. — *Soit* D_1 *et* D_2 *deux domaines de Jordan ayant des points communs, et soit* z_0 *un de ces points. Le plus grand domaine connexe contenu dans* D_1 *et dans* D_2, *et contenant* z_0 *est aussi un domaine de Jordan.*

Soit Δ le plus grand domaine connexe contenu dans D_1 et D_2 et contenant z_0. Δ est simplement connexe car tout contour de Jordan dont tous les points appartiennent à Δ, a tout son intérieur qui appartient à Δ.

Soient C_1, C_2 et Γ respectivement les frontières de D_1, D_2 et Δ. On sait que Γ est un continu et nous voulons prouver que c'est un contour de Jordan. Nous procédons par étapes.

A. Soient a et b deux points communs à C_1 et C_2. Ces points divisent C_1 en

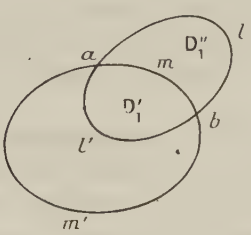


Fig. 1.

deux arcs distincts alb et $al'b$, et C_2 en deux arcs amb et $am'b$. Nous allons prouver que si tous les points de amb font partie de Γ, et que à part a et b aucun autre de ses points n'est sur C_1, alors l'un au moins des arcs alb et $al'b$ n'a, à part ses extrémités, aucun autre point sur Γ.

En effet d'après l'hypothèse, amb divise D_1 en deux domaines de Jordan D'_1 et D''_1 (*fig.* 1) et Δ est tout entier dans l'un de ces domaines, soit dans D'_1. Nous désignons par $al'b$ l'arc de C_1 qui avec amb constitue la frontière de D'_1 et par alb l'autre arc de C_1. Comme Δ est tout entier dans D'_1 et que alb n'a, à part a et b, aucun autre point sur la frontière de D'_1, il s'ensuit que alb n'a, à part a et b, aucun autre point sur Γ.

B. Nous allons prouver maintenant que l'ensemble des points de Γ qui n'appartiennent pas à C_1, forme un ensemble dénombrable d'arcs ouverts de C_2, les extrémités de chacun de ces arcs appartenant à C_1.

Remarquons d'abord que tout point de Γ appartient à l'un au moins des contours C_1 et C_2.

Soit m un point de Γ qui n'appartient pas à C_1 (*fig.* 1). Comme C_1 est fermé, m est intérieur à D_1. En laissant de côté le cas banal où C_2 serait entièrement

contenu dans D_1, soient a et b respectivement les premiers points de C_1 que l'on rencontre en partant de m et en parcourant C_2 d'abord dans le sens positif, ensuite dans le sens négatif. Montrons que l'arc amb de C_2 fait entièrement partie de Γ.

Soient en effet p et q deux points quelconques de l'arc ouvert amb situés de part et d'autre de m. On peut joindre p et q par un arc de Jordan pm_1q intérieur à D_2, et assez voisin de l'arc pmq pour que le domaine Δ_1 intérieur au contour pm_1qmp soit complètement intérieur à D_1. Comme dans ce domaine Δ_1 d'une part il y a des points de Δ étant donné que l'on a $m \in \Gamma$, et d'autre part il n'y a aucun point de Γ étant donné que tout point intérieur de Δ_1 est aussi point intérieur de D_1 et D_2, il s'ensuit que $\Delta_1 \subset \Delta$. Alors p étant sur la frontière de Δ_1 est point limite de points de Δ_1 donc de Δ. D'autre part, p étant sur la frontière de D_2 est point limite de points extérieurs à D_2, donc extérieurs à Δ. Ce qui prouve que p appartient à la frontière Γ de Δ. La même démonstration est valable pour q, ainsi que pour tout point de l'arc ouvert amb. Ceci nous prouve l'existence d'un ensemble d'arcs ouverts de C_2, l'ensemble des points situés sur ses éléments étant identique à l'ensemble des points de Γ qui ne sont pas situés sur C_1. Nous désignerons par J_2 ou $\{\beta_i\}$ cet ensemble d'arcs.

C. A tout arc β_i de l'ensemble J_2 correspond d'après la partie A un arc α_i de C_1 ayant les mêmes extrémités que β_i, et n'ayant à part ses extrémités aucun autre de ses points sur Γ. Soit J_1 l'ensemble $\{\alpha_i\}$ des arcs α_i. Considérons l'ensemble E des points que l'on obtient en enlevant de C_1 les arcs de l'ensemble J_1, et en ajoutant les arcs de l'ensemble J_2. Nous allons montrer dans cette partie, que *l'ensemble* E *forme un contour de Jordan.*

Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

les coordonnées d'un point courant $m(t)$ de C_1. Nous pouvons supposer que $m(t)$ décrit C_1 quand t varie de 0 à 1, et que $m(0) = m(1)$ est un point de Γ.

De même soient

$$x = u(\tau), \qquad y = v(\tau)$$

les coordonnées d'un point courant $\mu(\tau)$ de C_2. Nous supposons que $\mu(\tau)$ parcourt C_2 quand τ varie de 0 à 1.

Considérons le point variable $M(t)$ dont les coordonnées

$$x = F(t), \qquad y = \Phi(t)$$

sont définies de la façon suivante pour $0 \leq t \leq 1$.

a. Pour toute valeur de t pour laquelle le point $m(t)$ n'appartient pas à un arc de l'ensemble J_1, on prend $M(t) = m(t)$, soit

$$F(t) = f(t) \qquad \text{et} \qquad \Phi(t) = \varphi(t).$$

b. Soit t_l une valeur de t pour laquelle le point $l = m(t_l)$ est sur un arc *alb* de l'ensemble J_1. A cet arc correspond un arc *amb* de l'ensemble J_2 d'après la définition même de l'ensemble J_1. Soient t_a et t_b les valeurs de t pour lesquelles $m(t)$ coïncide respectivement avec a et b. t_l est compris entre t_a et t_b, car $m(o)$ n'est pas sur un arc de l'ensemble J_1. Soient τ_a et τ_b les valeurs de τ pour lesquelles $\mu(\tau)$ se confond avec a et b respectivement. Ces valeurs existent car a et b sont communs à C_1 et C_2.

Pour $t = t_l$ on prend

$$F(t) = u[\lambda(t)], \qquad \Phi(t) = v[\lambda(t)],$$

avec

$$\lambda(t) = \frac{\tau_b - \tau_a}{t_b - t_a}(t - t_a) + \tau_a.$$

Ces expressions sont valables pour toutes les valeurs de t comprises entre t_a et t_b, et quand t parcourt cet intervalle, $M(t)$ parcourt l'arc ab de J_2.

Les fonctions

$$x = F(t), \qquad y = \Phi(t)$$

sont ainsi définies pour tout t compris entre o et 1. L'ensemble des points $M(t)$ ainsi définis est identique à l'ensemble E. Pour prouver que l'ensemble E forme un contour de Jordan, il faut et il suffit de prouver que t_0 étant un nombre quelconque compris entre o et 1, quand t tend vers t_0, $M(t)$ tend vers $M(t_0)$.

Soit $\{t_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de valeurs de t qui converge vers t_0. Il s'agit de prouver que la suite $M(t_i)$ des points correspondants de E, converge vers le point $M(t_0)$. Le seul cas qu'il soit nécessaire d'examiner est le cas où une infinité de points de la suite $\{M(t_i)\}$ n'appartient pas aux arcs de l'ensemble J_2, alors qu'une autre infinité leur appartient. Soit $\{M(t_{\lambda_j})\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ la suite formée par les premiers, et $\{M(t_{\nu_j})\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ celle formée par les seconds.

Comme la suite $\{t_{\lambda_j}\}$ converge vers t_0 et que $M(t_{\lambda_j}) = m(t_{\lambda_j})$, il s'ensuit que la suite $\{M(t_{\lambda_j})\}$ converge vers $M(t_0) = m(t_0)$.

Examinons la suite $\{M(t_{\nu_j})\}$. Chaque point $M(t_{\nu_j})$ de cette suite est sur un arc β_{i_j} de l'ensemble J_2. Considérons d'abord le cas où *tous ces arcs sont distincts*. Soient a_j et b_j les extrémités de β_{i_j}, et soient t_{a_j}, t_{b_j}, τ_{a_j}, τ_{b_j} les valeurs de t et de τ, telles que

$$m(t_{a_j}) = \mu(\tau_{a_j}) = a_j, \qquad m(t_{b_j}) = \mu(\tau_{b_j}) = b_j.$$

On sait que t_{ν_j} est compris entre t_{a_j} et t_{b_j}, et que $|t_{a_j} - t_{b_j}|$ tend vers zéro quand $j \to \infty$. De même

$$\lim_{j \to \infty} |\tau_{a_j} - \tau_{b_j}| = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{j \to \infty} t_{a_j} = \lim_{j \to \infty} t_{b_j} = t_0,$$

donc

$$\lim_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} b_j = \mathrm{M}(t_0).$$

Comme $\mathrm{M}(t_{\nu_j})$ est sur l'arc β_{i_j} de C_2, que ces arcs β_{i_j} ne sont pas empiétants et que leurs extrémités tendent vers $\mathrm{M}(t_0)$, on a

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{M}(t_{\nu_j}) = \mathrm{M}(t_0).$$

Le cas où le nombre de fois qu'un même arc β_{i_j} se répète dans la suite $\{\beta_{i_j}\}$, ne dépasse pas un nombre fixe, se ramène facilement au précédent.

Supposons maintenant *qu'une infinité de points de la suite* $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$ *soient sur un même arc* β *de* J_2. Désignons cette infinité par la même notation $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$.

Soient a et b les extrémités de β, et t_a, t_b, τ_a, τ_b les valeurs de t et τ telles que

$$m(t_a) = \mu(\tau_a) = a, \qquad m(t_b) = \mu(\tau_b) = b.$$

On sait que t_{ν_j} est compris entre t_a et t_b. Alors comme $\lim_{j\to\infty} t_{\nu_j} = t_0$ et que $m(t_0)$ n'est point intérieur d'aucun arc de l'ensemble J_1, il s'ensuit que t_0 est égal soit à t_a, soit à t_b; supposons que $t_0 = t_a$.

A chaque point de $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$ correspond une valeur de τ donnée par

$$\mathrm{M}(t_{\nu_j}) = \mu(\tau_{\nu_j}), \qquad \text{soit} \quad \tau_{\nu_j} = \frac{\tau_b - \tau_a}{t_b - t_a}(t_{\nu_j} - t_a) + \tau_a.$$

Quand t_{ν_j} tend vers $t_0 = t_a$ alors τ_{ν_j} tend aussi vers τ_a et $\mathrm{M}(t_{\nu_j})$ tend vers

$$\mu(\tau_a) = a = \mathrm{M}(t_0).$$

Ce qui précède nous prouve aussi qu'il ne peut pas y avoir plus d'un arc β de J_2, sur lequel se trouvent une infinité de points de la suite $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$. En effet s'il y avait deux pareils arcs, ils devraient avoir $\mathrm{M}(t_0)$ comme extrémité commune, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathrm{M}(t_0)$ est limite de points de E qui n'appartiennent pas à des arcs de l'ensemble J_2.

Nous venons ainsi de prouver que l'ensemble E forme un contour de Jordan.

D. Nous allons finalement prouver que l'ensemble E est identique à Γ.

Tout point de Γ appartient à E. En effet si un point de Γ appartient à C_1, il appartient à E car pour former E on a enlevé de C_1 des arcs formés de points qui ne font pas partie de Γ, si un point de Γ n'appartient pas à C_1, alors il appartient à un arc de l'ensemble J_2, et les points de ces arcs font partie de E.

Si Γ n'était pas identique à E, comme il est fermé, il serait obtenu en enlevant de E un ensemble d'arcs ouverts. Mais alors Γ ne serait pas un continu, ce qui est en contradiction avec le fait que Γ est la frontière d'un domaine simplement connexe.

Le théorème énoncé est ainsi prouvé.

3. Soit D un domaine de Jordan, et

$$Z = f(z)$$

une transformation continue et biunivoque du domaine fermé $\overline{D}$ en lui-même. Nous supposons que cette transformation est cyclique d'ordre n, et qu'elle conserve le sens de parcours. Dans cette partie nous prouvons l'existence de certains domaines invariants pour la transformation, associés à ses points fixes.

3.1. Soit z_0 un point intérieur de D et fixe pour la transformation $Z = f(z)$, et D_0 un domaine quelconque de Jordan contenu dans $\overline{D}$ et contenant z_0. Considérons les domaines de Jordan $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ et D_n identique à D_0, qui sont les transformés du domaine D_0 par les itérées de la transformation $Z = f(z)$. Soit Δ le plus grand domaine connexe renfermant z_0 et contenu dans tous les domaines $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$. D'après le théorème I, Δ est un domaine de Jordan. Prouvons qu'il est invariant par la transformation $Z = f(z)$.

En effet, $f(\Delta)$ contient z_0 et est contenu dans $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n$ donc $f(\Delta) \subset \Delta$. Mais si $f(\Delta)$ était une partie propre de Δ, on aurait que $f_n(\Delta)$ serait aussi une partie propre de Δ, alors que l'on a $f_n(\Delta) = \Delta$.

Nous venons ainsi de donner un procédé, qui nous servira plus loin, qui nous permet d'associer à tout domaine de Jordan D_0 contenant un point fixe z_0, un autre domaine de Jordan Δ contenant z_0 et invariant par la transformation $Z = f(z)$.

3.2. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, complètement intérieur à D, et invariant par la transformation $Z = f(z)$; soit C sa frontière. Nous allons montrer qu'étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, il existe un domaine de Jordan Δ qui contient $\mathcal{D}$, qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$, et tel que la distance de tout point de sa frontière à C soit inférieure à ε.

En effet, à cause de l'uniformité de la continuité de $f(z)$ dans $\overline{D}$, il suffit de partir d'un domaine de Jordan D_0, contenant $\mathcal{D}$, et dont la frontière a chacun de ses points suffisamment voisin de C. En appliquant à D_0 le procédé expliqué au n° 3.1 le domaine Δ qui en résulte répond à la question.

3.3. Soit z_0 un point fixe de la transformation, situé sur la frontière de D. Prenons deux points a et b sur la frontière de D, et joignons-les par un arc simple de Jordan asb intérieur à D. D_0 étant le domaine de Jordan limité par le contour az_0bsa, considérons les transformés $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ de D_0 par les itérées de $f(z)$, et soit Δ le plus grand domaine connexe contenu dans D_0, $D_1, \ldots, D_{n-1}$ et ayant z_0 sur sa frontière. Δ est un domaine de Jordan, il est invariant par la transformation $Z = f(z)$, et sa frontière renferme tout un arc $a'z_0b'$ qui fait partie de la frontière de D, les autres points de la frontière de Δ étant intérieurs à D.

Remarquons que l'arc $a'z_0b'$ est invariant par la transformation $Z = f(z)$ et comme cette transformation conserve le sens de parcours sur la frontière de D, il s'ensuit que les points a' et b' sont des points fixes de la transformation. On en déduit que tout point z_0, qui est situé sur la frontière de D, et qui est point fixe de la transformation, est limite de points fixes de la transformation situés sur la frontière de D aussi bien d'un côté de z_0 que de l'autre.

Cette remarque nous conduit au théorème suivant :

4. Théorème II. — *Soit* D *un domaine de Jordan, et* $Z = f(z)$ *une transformation continue cyclique, qui conserve le sens de parcours, et qui transforme biuniquement* D *en lui-même. Si la transformation a un point fixe sur la frontière de* D, *alors tout point de cette frontière est aussi point fixe de la transformation.*

En effet désignons par Φ' l'ensemble des points fixes situés sur la frontière L de D. L'ensemble Φ' est fermé et par conséquent s'il ne comprenait pas tous les points de L, il existerait un arc de L dont aucun point, à part ses extrémités, ne ferait partie de Φ'. Ceci est en contradiction avec la remarque qui précède ce théorème.

5. Soit $Z = f(z)$ la même transformation qu'au n° 3; z_0 et z_1 deux points fixes de cette transformation, et D_0 et D_1 deux domaines de Jordan invariants par la transformation $Z = f(z)$, dont D_0 contient z_0, et D_1 contient z_1 sans contenir z_0. Nous supposons en plus que les frontières C_0 et C_1 de ces domaines ont au moins un point commun. *Nous allons prouver que dans ces conditions tous les points de* C_0 *et de* C_1 *sont des points fixes.*

Il suffit de prouver, d'après le théorème II, qu'un des points communs à C_0 et C_1 est un point fixe.

Soit Δ le plus grand domaine connexe qui contient z_0, qui est contenu dans D_0, et qui est extérieur à D_1. Ce domaine existe, et il est simplement connexe car tout domaine de Jordan dont le contour appartient à Δ a tout son intérieur qui appartient aussi à Δ; de plus sa frontière Γ est un contour de Jordan d'après le théorème I.

La courbe Γ a nécessairement des points qui ne sont pas sur C_1, et ces points forment un ensemble dénombrable d'arcs ouverts, les extrémités de chacun de ces arcs étant sur C_1. Nous désignons cet ensemble par E.

Soit *abc* un des arcs de l'ensemble E (*fig.* 2). Les points *a* et *c* divisent C_1 en deux arcs. Soit $ab'c$ l'un de ces arcs, choisi arbitrairement. Nous appelons le domaine de Jordan intérieur au contour $ab'cba$, domaine associé à l'arc *abc*. Les domaines associés aux éléments de E forment un ensemble dénombrable de domaines que nous désignons par $\{U_i\}$. Nous allons montrer qu'au moins un de ces domaines renferme z_0. Soit en effet $defe'd$ (*fig.* 2) un domaine de l'ensemble $\{U_i\}$ ne renfermant pas z_0. Ce domaine est alors extérieur à Δ, et si

nous considérons le domaine formé de Δ augmenté d'une part des points de l'arc ouvert *def* et d'autre part du domaine *defe'd*, la frontière de ce nouveau domaine s'obtient de la frontière de Δ à laquelle on supprime l'arc *fed* et l'on ajoute l'arc *de' f*. Si donc, aucun des domaines de l'ensemble $\{U_i\}$ ne renfermait z_0, on aurait pu procéder pour chacun de ces domaines comme on vient de faire pour *defe'd*. Le domaine finalement obtenu renfermerait Δ, donc z_0, et tous ses points frontières seraient des points de C_1, ce qui est impossible.

Soit $U_1 = abcb'a$ un domaine de l'ensemble $\{U_i\}$, qui renferme z_0. Le transformé $f(U_1)$ de U_1 par $f(z)$, renferme z_0 et sa frontière est formée de l'arc $f(abc)$ de C_0 et de l'arc $f(ab'c)$ de C_1. Comme $f(abc)$ ne peut pas traverser *abc*, il s'ensuit que l'on a

$$\text{ou bien } f(U_1) \subset U_1 \qquad \text{ou bien } f(U_1) \supset U_1,$$

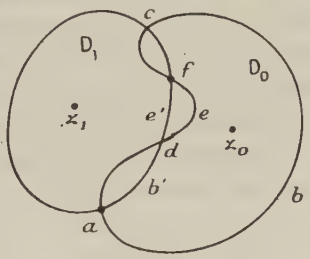


Fig. 2.

mais à moins d'avoir $f(U_1) = U_1$, ces relations sont incompatibles avec la condition $f_n(z) = z$.

On a donc

$$f(U_1) = U_1$$

et dans ces conditions, on a aussi

$$f(abc) = abc, \qquad f(ab'c) = ab'c,$$

ce qui entraine que *a* et *b* sont des points fixes de la transformation $Z = f(z)$.

6. Théorème III. — *Si l'ensemble* Φ *des points fixes de la transformation* $Z = f(z)$, *définie comme pour le théorème II, renferme un continu* C (1), *alors cette transformation devient la transformation identique.*

Considérons l'ensemble Φ_1 de points défini de la façon suivante : on considère un élément déterminé z_0 de C; un point z de D est un élément de Φ_1 si, et seulement si, z est un élément de Φ et Φ est bien enchaîné entre z_0 et z. On a

(1) Nous appelons continu un ensemble parfait, formé de plus d'un point, et bien enchaîné entre deux quelconques de ses points.

$C \subset \Phi_1 \subset \Phi$, et il est facile de montrer que Φ_1 est fermé. Nous allons prouver que Φ_1 est identique à $\overline{D}$.

Supposons le contraire et soit α un point de D qui ne soit pas élément de Φ_1. Comme Φ_1 est fermé, il renferme un point z_1 dont la distance r à α est en même temps la distance de α à Φ_1. Dans le cercle de centre α et de rayon r il n'y a alors aucun point de Φ_1. Soit z_2 un autre point de Φ_1. Nous distinguons deux cas :

Premier cas. — Le point z_1 n'est pas sur la frontière de D. Alors d'après le n° 3.1, on peut trouver un domaine de Jordan Δ contenant z_1 sans contenir z_2 ni α et qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$. Si nous montrons que sur la frontière Γ du domaine Δ se trouve un point de Φ_1, nous saurons, d'après le théorème II, que tout Γ appartient à Φ; et comme un point de Γ appartient à Φ_1, tout Γ doit appartenir à Φ_1, ce qui est en contradiction avec le fait qu'un arc de Γ est à l'intérieur du cercle de centre α passant par z_1.

Prouvons que sur Γ se trouve un point de Φ_1. L'ensemble Φ est bien enchaîné entre z_1 et z_2. Donc étant donné un nombre positif ε_m on peut trouver une ligne polygonale dont les sommets sont des points de Φ, qui joint z_1 à z_2, et dont les côtés sont inférieurs à ε_m. En parcourant cette ligne de z_1 à z_2, nous désignons par α_m le dernier de ses sommets qui soit dans Δ. Considérons alors une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_m\}$ qui converge vers zéro. A cette suite correspond comme il vient d'être dit, une suite de points $\{\alpha_m\}$, ces points appartenant à Φ et la distance de α_m à Γ tendant vers zéro quand $m \to \infty$. La suite $\{\alpha_m\}$ a donc au moins un point limite α' sur Γ, et ce point est un point de Φ_1. En effet, c'est un point de Φ car Φ est fermé; ensuite Φ est bien enchaîné d'une part entre z_1 et α', d'autre part entre z_0 et z_1 puisque $z_1 \in \Phi_1$, donc Φ est bien enchaîné entre z_0 et α'. Donc $\alpha' \in \Phi_1$. C'est ce que nous voulions démontrer.

Deuxième cas : Le point z_1 est sur la frontière de D. — La frontière de D fait alors entièrement partie de Φ_1, par conséquent le cercle de centre α et de rayon r est intérieur à D. On procède comme dans le premier cas, en se servant du n° 3.3 au lieu du n° 3.1. Le point z_1 se trouve alors sur la frontière Γ du domaine Δ, ce qui signifie la démonstration.

7. Théorème IV. — *Soit le cercle* C, $|z| < 1$, *une transformation cyclique d'ordre n,* $Z = f(z)$, *qui transforme biunivoquement le cercle en lui-même et ε un nombre positif arbitrairement petit. Il existe un domaine fermé de Jordan* $\overline{\Delta}$ (1) *ayant les propriétés suivantes :*

1° $\overline{\Delta}$ *est complètement intérieur à* C.

(1) Nous désignons par $\overline{\Delta}$ le domaine Δ augmenté de sa frontière.

2° *La distance de tout point de la frontière de* $\bar{\Delta}$ *à la frontière de* C *est inférieure à* ε.

3° $Z = f(z)$ *transforme biunivoquement* $\bar{\Delta}$ *en lui-même.*

Soit p un point intérieur à C et $p' = f(p)$ son transformé. Considérons le cercle A, $|z| \leq 1 - \varepsilon'$, avec $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et ε' assez petit pour que p et p' soient intérieurs à A. Soient A_{-1}, A_{-2}, ..., A_{-n+1} et $A_{-n} = A$ les transformés de A par les itérées de la fonction $z = f^{-1}(Z)$, inverse de $Z = f(z)$. Ces domaines sont des domaines de Jordan complètement intérieurs à C. On peut donc trouver un cercle B, $|z| \leq 1 - \varepsilon''$, qui comprenne tous ces domaines en son intérieur. Alors les domaines B_1, B_2, ..., B_{n-1} et $B_n = B$, transformés de B par $Z = f(z)$, renferment tous le cercle A. Si Δ est le plus grand domaine connexe contenu dans B, B_1, ..., B_{n-1} et contenant A, comme Δ contient p et $f(p)$, on a $f(\bar{\Delta}) = \Delta$ et ce domaine $\bar{\Delta}$ répond à l'énoncé.

8. Théorème V. — *Si* D *est un domaine simplement connexe dont la frontière comprend plus d'un point, et* $Z = f(z)$ *une transformation cyclique d'ordre* $n \neq 1$ *qui transforme biunivoquement* D *en lui-même, et qui conserve le sens de parcours, alors cette transformation a un point fixe intérieur à* D *et un seul.*

A. Montrons que le cas général se ramène au cas particulier où D est le cercle $|z| < 1$.

En effet, soit $u = F(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme de D sur le cercle $|u| < 1$.

Considérons la transformation

$$U = \psi(u), \qquad \text{où} \quad \psi(u) = F\big[f[F_{-1}(u)]\big], \tag{1}$$

$z = F_{-1}(u)$ étant la fonction inverse de $u = F(z)$.

La transformation (1) est définie et continue dans le cercle $u < 1$ et le transforme biunivoquement en lui-même. De plus, elle est cyclique d'ordre n, car d'une part on a

$$\psi_n(u) = F\big[f_n[F_{-1}(u)]\big] = F[F_{-1}(u)] = u,$$

et d'autre part pour $q < n$ on ne peut pas avoir $\psi_q(u) = u$, quel que soit u avec $|u| < 1$, car ceci entrainerait $f_q(u) = u$.

Aussi, si z_0 est un point fixe de la transformation $Z = f(z)$, $u_0 = F(z_0)$ est un point fixe de la transformation $U = \psi(u)$; réciproquement si u_0 est un point fixe de la transformation $U = \psi(u)$, $z_0 = F_{-1}(u_0)$ est un point fixe de la transformation $Z = f(z)$. Ce que nous nous sommes proposé de prouver dans cette partie se trouve ainsi prouvé.

B. Prouvons le théorème énoncé en supposant que D est le cercle $|z|<1$.

D'après le théorème IV, il existe un domaine fermé $\bar{\Delta}$, complètement intérieur à D, qui est transformé biunivoquement en lui-même par $Z=f(z)$. Donc d'après le théorème de Brouwer cette transformation a au moins un point fixe dans $\bar{\Delta}$, donc dans D.

Il reste à prouver que ce point fixe est unique. Nous procédons par l'absurde en prouvant que si la transformation $Z=f(z)$ a deux points fixes dans D, elle devient la transformation identique.

Nous supposons donc que la transformation $Z=f(z)$ a deux points fixes z_0 et z_1 dans le cercle $|z|<1$, et sans diminuer la généralité de la démonstration nous pouvons supposer que $z_0=0$.

Désignons par $\{S_r\}$ la famille de tous les cercles de centre l'origine et de rayon plus petit que 1, et par S_r celui de ces cercles qui a pour rayon r. A chaque cercle S_r faisons correspondre par le procédé du n° 3.1, un domaine de Jordan Δ_r de frontière Γ_r, qui soit invariant par la transformation $Z=f(z)$. Nous obtenons ainsi une famille de domaines $\{\Delta_r\}$ en correspondance biunivoque avec les nombres r de l'intervalle $\{0, 1\}$. Les domaines de cette famille ont les propriétés suivantes :

a. $r_1<r_2$ entraîne $\Delta_{r_1}\subset\Delta_{r_2}$.

b. Soit ρ une valeur fixe de r. Si r tend vers $\rho-0$, Δ_r tend vers Δ_ρ; si r tend vers $\rho+0$, Δ_r tend vers un ensemble de points qui contient le domaine Δ_ρ.

Considérons aussi un domaine de Jordan Δ_{z_1}, qui contient z_1 sans contenir l'origine et qui est invariant par la transformation $Z=f(z)$. Ce domaine existe d'après le n° 3.1. Désignons par Γ_{z_1} sa frontière.

Nous distinguons deux cas :

Premier cas : Un des contours Γ_r *rencontre le contour* Γ_{z_1}. — Alors en appliquant ce qui a été établi au n° 5, ainsi que les théorèmes II et III, on conclut que la transformation $Z=f(z)$ doit se réduire à la transformation identique.

Deuxième cas : Aucun des contours Γ_r *ne rencontre le contour* Γ_{z_1}. — Dans ce cas les domaines de la famille $\{\Delta_r\}$ se divisent en deux classes :

1° La classe A formée des domaines Δ_r qui ne contiennent pas Δ_{z_1}.

2° La classe B formée des domaines Δ_r qui contiennent Δ_{z_1}.

Aucune des deux classes n'est vide, l'existence d'éléments de la classe B étant une conséquence du théorème IV. Remarquons aussi que tout élément de la classe B contient tous les éléments de la classe A. Il s'ensuit qu'il existe un nombre ρ tel que

$$r<\rho \quad \text{entraîne} \quad \Delta_r\in A \qquad \text{et} \qquad r>\rho \quad \text{entraîne} \quad \Delta_r\in B,$$

Comme le domaine Δ_ρ est la limite de toute suite de domaines Δ_{r_n} où $\{r_n\}$ est une suite qui tend vers $\rho - 0$, on conclut que $\Delta_\rho \in A$.

Considérons la limite de Δ_r quand $r \to \rho + 0$. Cette limite existe car $r_1 < r_2$ entraîne $\Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2}$, et elle est un ensemble de points qui contient d'une part le domaine Δ_ρ et d'autre part le domaine Δ_{z_1}. Soit $\mathcal{D}$ le plus grand domaine connexe contenu dans $\lim_{r \to \rho+0} \Delta_r$ et contenant Δ_{z_1}; $\mathcal{D}$ est simplement connexe car tout contour de Jordan dont tous les points appartiennent à $\mathcal{D}$ a tout son intérieur qui appartient aussi à $\mathcal{D}$. Remarquons aussi que si α est un point quelconque de sa frontière de $\mathcal{D}$, la distance de α à Γ_r tend vers zéro quand r tend vers $\rho + 0$. De plus $\mathcal{D}$ est invariant par la transformation $Z = f(z)$ car chacun des domaines Δ_r ainsi que le domaine Δ_{z_1} le sont.

D'après le n° 3.2 il existe un domaine de Jordan Δ invariant par la transformation $Z = f(z)$, contenant le domaine $\mathcal{D}$, et tel que la distance de tout point de sa frontière à la frontière de $\mathcal{D}$ soit inférieure à un nombre positif donné ε arbitrairement petit. On choisit ε de façon que l'origine soit extérieure à Δ. Dans ces conditions pour r supérieur et assez voisin de ρ, la frontière Γ_r de Δ_r aura des points communs avec la frontière Γ de Δ. Par conséquent, en appliquant d'abord le n° 5 et ensuite les théorèmes II et III, on conclut que la transformation $Z = f(z)$ doit se réduire à la transformation identique.

Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré dans tous les cas.

9. Nous nous sommes occupé dans le théorème V de tranformations cycliques qui conservent le sens de parcours. Nous allons maintenant considérer des transformations cycliques qui changent le sens de parcours, cette phrase ayant la signification que nous lui avons attribuée dans l'Introduction (1).

Théorème VI. — *Si* D *est un domaine simplement connexe dont la frontière comprend plus d'un point, et* $Z = f(z)$ *une transformation cyclique d'ordre* n *qui transforme le domaine* D *en lui-même, et qui change le sens de parcours, alors* n *est nécessairement égal à* 2.

On peut comme pour le théorème V supposer que D est le cercle $|z| < 1$.

D'après le théorème IV, il existe un domaine fermé de Jordan Δ intérieur à D et qui est transformé biunivoquement en lui-même par $Z = f(z)$. Quand z parcourt la frontière de Δ dans un sens, Z parcourt la même frontière dans le sens opposé, ce qui nous prouve l'existence de deux points fixes z_1 et z_2 sur cette frontière. Or ces points sont aussi points fixes pour la transformation $Z_2 = \varphi(z)$, avec $\varphi(z) = f_2(z)$. Mais cette dernière transformation est cyclique,

(1) Remarquons que les procédés expliqués aux nos 3.1, 3.2 et au début du n° 3.3 s'appliquent aussi dans le cas où $Z = f(z)$, change le sens de parcours.

conserve le sens de parcours, et transforme biunivoquement D en lui-même; de plus elle a deux points fixes z_1 et z_2 dans D. Elle se réduit donc d'après le théorème V à la transformation identique, ce qui nous prouve le théorème énoncé.

Théorème VII. — *Dans les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, l'ensemble des point fixes de la transformation forme une ligne de Jordan.*

Le théorème sera vrai dans le cas général pourvu qu'il le soit dans le cas où D est un domaine de Jordan et $f(z)$ définie et a les propriétés de l'énoncé dans le domaine fermé $\overline{D}$. En effet nous pouvons d'abord supposer que D est le cercle ouvert $|z|<1$. Ensuite d'après le théorème IV il existe une suite de domaines fermés de Jordan $\{\overline{\Delta}_j\}$, tels que

$$\overline{\Delta}_j \subset \overline{\Delta}_{j-1}, \qquad \lim_{j\to\infty} \Delta_j = D.$$

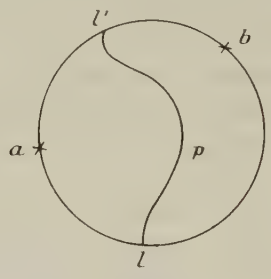


Fig. 3.

Le théorème énoncé sera évidemment vrai pourvu qu'il le soit pour chacun des domaines Δ_j. Il suffit donc de le démontrer pour un pareil domaine que nous représentons encore par $\overline{D}$.

La transformation $Z=f(z)$ a sur le contour de $\overline{D}$ deux points fixes et deux seulement (1), z_0 et z_1, qui divisent ce contour en deux arcs *alb* et *al'b*; ces arcs se permutent par la transformation (*fig.* 3).

A. Sur tout arc de Jordan *lpl'*, qui joint un point *l* de *alb* à un point *l'* de *al'b*, se trouve au moins un point fixe. En effet soit Δ^1 le domaine intérieur au contour *alpl'a* et Δ le domaine, invariant par la transformation $Z=f(z)$, qui lui correspond par le procédé du n° 3.3. Sur la frontière de Δ, qui est un contour de Jordan, se trouvent deux points fixes (1) dont l'un est le point *a* et l'autre est un point qui, étant fixe, se trouve nécessairement sur l'arc *lpl'* aussi.

(1) Parce que la transformation change le sens de parcours.

B. Considérons l'ensemble E formé des points de D qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Aucun point de E n'est fixe pour la transformation $Z = f(z)$.

2° Tout point de E peut être joint à un point au moins de l'arc ouvert *alb* par un arc de Jordan intérieur à D et sur lequel ne se trouve aucun point fixe.

Considérons aussi l'ensemble E_1 de points de D défini d'une façon analogue à l'ensemble E, mais relativement à l'arc $al'b$.

D'après la partie A aucun point ne peut faire partie en même temps de E et de E_1.

D'après leur définition les deux ensembles E et E_1 sont connexes; nous allons montrer qu'ils sont simplement connexes. En effet soit C un contour de Jordan dont tous les points font partie de E; montrons que tout l'intérieur de C fait partie de E. D'abord si à l'intérieur de C il y avait un point fixe z_0, le plus grand domaine connexe contenant z_0 et contenu dans les domaines intérieurs à C et à $f(C)$, serait invariant par la transformation $Z = f(z)$, et sa frontière serait une courbe de Jordan sur laquelle se trouveraient deux points fixes. Ces points fixes appartiendraient alors à C, donc aussi à E, ce qui est contraire à la définition de cet ensemble. Comme l'intérieur de C ne comprend aucun point fixe, il s'ensuit qu'il appartient à l'ensemble E. Donc E est simplement connexe et la même démonstration s'applique aussi à l'ensemble E_1.

Soit F la frontière de E. Cette frontière est formée de l'arc *alb* et d'un continu linéaire L comprenant a et b, et dont tous les autres points sont intérieurs au cercle D. D'après la définition de E il s'ensuit que L est formé de points fixes. Alors comme on a évidemment

$$f(E) = E_1, \qquad f(alb) = f(al'b)$$

on conclut que la frontière de E_1 est formée de l'arc $al'b$ plus le continu L. Le continu L forme donc l'ensemble des points fixes de la transformation $Z = f(z)$. Il nous reste à prouver que ce continu est une ligne de Jordan. Il suffit, d'après un théorème de Schœnflies (1) de prouver que tout point de L est accessible de l'intérieur de E et de l'intérieur de E_1.

Soit α un point de L. Considérons une suite $\{C_n\}$ de cercles de centre α et dont les rayons forment une suite décroissante qui tend vers zéro. A chaque cercle C_n de cette suite, nous faisons correspondre par le procédé du n° 3. 1, un domaine de Jordan Δ_n de frontière Γ_n, qui reste invariant par la transformation $Z = f(z)$. Sur Γ_n se trouvent alors deux points fixes a_n et b_n; ces points appartiennent à L, et divisent Γ_n en deux arcs, l'arc $a_n l_n b_n$ situé dans E et l'arc $a_n l'_n b_n$ situé dans E_1. Les points l_n et l'_n étant choisis arbitrairement sur ces arcs, on

(1) Schoenflies, *Die Lehre von den Punktmannigbaligkeiten*, § 11 et 12. Chap. V.

peut joindre l_n à l_{n+1} par un arc de Jordan $l_n l_{n+1}$, situé dans la partie de E qui est intérieure à Δ_n et extérieure à Δ_{n+1}. On obtient ainsi une suite d'arcs de Jordan

$$l_1 l_2, \quad l_2 l_3, \quad \ldots, \quad l_n l_{n+1}, \quad \ldots$$

qui forment une ligne de Jordan intérieure à E, et ayant α comme seul point limite situé sur la frontière de E. Donc α est accessible de l'intérieur de E, et en opérant d'une manière analogue avec les points l'_n, on obtient que α est aussi accessible de l'intérieur de E_1.

SUR LA

RÉDUCTION DES ANNEAUX D'OPÉRATEURS

PAR M. J. DIXMIER.

Dans un précédent article [1] (1), j'ai défini et étudié les anneaux d'opérateurs de classe finie. Le présent article est consacré aux anneaux d'opérateurs quelconques (2). J. von Neumann a montré [5] que ces anneaux étaient des *sommes directes généralisées* de facteurs (cette notion fait intervenir essentiellement la théorie de la mesure). En *regroupant* ceux de ces facteurs qui appartiennent à une même *classe* (la classification des facteurs a été faite par F. J. Murray et J. von Neumann dans [3]), on obtient une décomposition moins fine des anneaux d'opérateurs. Le but du présent travail est d'obtenir cette réduction indépendamment de [3], de [5], et de toute théorie de la mesure. Les démonstrations sont valables dans des espaces non séparables, alors que les démonstrations de [3] et [5] s'appliquent seulement aux espaces séparables. Les résultats contiennent donc la classification des facteurs dans les espaces hilbertiens quelconques.

Les théorèmes qui suivent seront utilisés dans un autre Mémoire, à paraître dans *Compositio Mathematica*, où l'on généralisera aux anneaux quelconques la théorie de l'application h, établie dans [1] pour les anneaux de classe finie.

Des résultats voisins ont été obtenus par I. Kaplansky [2].

Notations et remarques diverses.

On utilisera sans explications les notations de [1]. Cependant, quelques modifications ont paru préférables.

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

(2) Il sera toujours sous-entendu que ces anneaux contiennent 1. Cette restriction n'est d'ailleurs pas essentielle, d'après [4].

1. Soit $\mathbf{M}$ un anneau d'opérateurs. Le centre de $\mathbf{M}$ sera noté $\mathbf{M}^\natural$ (dans [1], il est noté $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$).

2. Si N est un ensemble quelconque d'opérateurs, on désignera par $\widetilde{\mathrm{N}}$ l'ensemble des variétés linéaires fermées $\mathfrak{M}$ telles que $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}} \in \mathrm{N}$. Ainsi, l'ancienne notation $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$ est remplacée par $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$.

3. Soit $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. On désignera par $\mathfrak{M}^\natural$ ce qui, dans [1], était noté $[\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}]$ (*cf.* définition 3.1 de [1]). Rappelons que $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}$ est la réunion des $\mathrm{U}(\mathfrak{M})$ où U parcourt $\mathbf{M}_l$. La variété $\mathfrak{M}^\natural$ est la plus petite variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ contenant $\mathfrak{M}$, ou encore la variété sous-tendue par les variétés équivalentes à $\mathfrak{M}$ ([1], lemme 3.1). Si $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i^\natural$ est la plus petite variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ contenant les $\mathfrak{M}_i^\natural$, donc les $\mathfrak{M}_i$, donc $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i$; d'où

$$\Big(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i\Big)^\natural = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i^\natural$$

4. On écrira $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ s'il existe une $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{N}$. La relation $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ est réflexive et transitive. Si $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ [resp. $(\mathfrak{N}_i)_{i \in \mathrm{I}}$] est une famille de variétés deux à deux orthogonales, et si $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{N}_i$ pour $i \in \mathrm{I}$, on a $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i \prec \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{N}_i$.

I. — Variétés finies et infinies.

Les propriétés des variétés finies s'obtiennent à peu près comme dans [3]. Par contre, pour les variétés infinies, le fait que $\mathbf{M}$ n'est pas un facteur et la non-séparabilité de l'espace entraînent des complications.

Définition 1.1. — *Une variété $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sera dite finie si toute variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenue dans $\mathfrak{M}$ et équivalente à $\mathfrak{M}$ est identique à $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ n'est pas finie, $\mathfrak{M}$ sera dite infinie*

Definition 1.2 — *Une variété $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sera dite proprement infinie si $\mathfrak{M} \neq 0$ et si, pour toute variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \neq 0$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ est infinie.*

Définition 1.3. — *Une variété $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sera dite purement infinie si $\mathfrak{M} \neq 0$ et si $\mathfrak{M}$ ne contient aucune variété finie $\neq 0$.*

On a immédiatement les implications suivantes :

$$\text{purement infinie} \rightarrow \text{proprement infinie} \rightarrow \text{infinie.}$$

Il est aussi évident que, si $\mathfrak{M}$ est infinie et si $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}})$, $\mathfrak{M}'$ est infinie. Car si $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}_1$ avec $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$, on a

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \oplus (\mathfrak{M}' \ominus \mathfrak{M}) \sim \mathfrak{M}_1 \oplus (\mathfrak{M}' \ominus \mathfrak{M}) \neq \mathfrak{M}.$$

LEMME 1.1. — *Soient* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ *des variétés finies telles que les* $\mathfrak{M}_i^{\natural}$ *soient deux à deux orthogonales.* $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ *est finie.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}^{\natural} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i^{\natural}$ une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Elle est compatible avec les $\mathfrak{M}_i^{\natural}$, donc, posant $\mathfrak{M}'_i = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_i^{\natural}$, on a $\mathfrak{M}' = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}'_i$. D'autre part, $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_i^{\natural}$ est évident. Si alors $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M}'_i \subset \mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}'_i \sim \mathfrak{M}_i$, donc, puisque $\mathfrak{M}_i$ est finie, $\mathfrak{M}'_i = \mathfrak{M}_i$; donc $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$.

LEMME 1.2. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$. *Il existe une variété* $\mathfrak{N}$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ *telle que* : 1° $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ *est finie*; 2° $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) = 0$ *ou* $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ *est proprement infinie.*

Démonstration. — Considérons, grâce au théorème de Zorn, une famille $(\mathfrak{N}_i)_{i\in I}$ maximale de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ deux à deux orthogonales telles que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i$ soit finie pour tout $i \in I$. Soit $\mathfrak{N} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i$. On a $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_i$, donc $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i)^{\natural} \subset \mathfrak{N}_i$, donc les $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i)^{\natural}$ sont deux à deux orthogonales. D'après le lemme 1.1, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i$ est finie. Montrons par l'absurde que, si $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$, $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ est proprement infinie. S'il existait une variété $\mathfrak{N}' \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ telle que $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ soit $\neq 0$ et finie on pourrait ajouter $\mathfrak{N}' \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$ à la famille $(\mathfrak{N}_i)_{i\in I}$, ce qui contredit le fait que cette famille est maximale.

LEMME 1.3. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété proprement infinie. Pour tout entier* $n > 0$, *il existe une partition* $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2, \ldots, \mathfrak{M}^n$ *de* $\mathfrak{M}$ *telle que* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}^1 \sim \mathfrak{M}^2 \sim \ldots \sim \mathfrak{M}^n$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$, avec $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$. Si $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{PI}}$ applique isométriquement $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$, posons $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{U}^i(\mathfrak{M}_1)$. On a $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{U}(\mathfrak{M}_i)$, ce qui prouve, par récurrence, que $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_3 \supset \ldots$. Soit $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_{i+1}$. On a $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{U}^i(\mathfrak{N}_1)$, donc $0 \neq \mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_3 \sim \ldots$. Ainsi $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots)$ est une partition homogène infinie majorée par $\mathfrak{M}_1$.

Considérons les partitions homogènes majorées par $\mathfrak{M}_1$ qui contiennent $\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{N}_2$, ... comme éléments. Soit (théorème de Zorn) $\Phi = (\mathfrak{N}_i)_{i\in I}$ une telle partition maximale. Soit $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M}_1 \ominus \left(\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i\right)$. Appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathfrak{N}_0$ et $\mathfrak{N}_1$ qui sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, avec $\mathfrak{N}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}$;

trois variétés orthogonales n_1, $\bar{n}_1$, n_0 contenues dans $\mathfrak{N}$;

trois variétés orthogonales n'_1, n'_0, $\bar{n}'_0$ contenues dans $\mathfrak{N}'$;

avec

$$n_1 \sim n_0, \qquad n'_1 \sim n'_0, \qquad \mathfrak{N}_1 = n_1 \oplus \bar{n}_1 \oplus n'_1, \qquad \mathfrak{N}_0 = n_0 \oplus n'_0 \oplus \bar{n}'_0$$

On a $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \neq 0$, sinon $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{N}'$, donc $\mathfrak{N}_1 = n_1' \sim n_0' \subset \mathfrak{N}_0$, de sorte que Φ ne serait pas maximale (on pourrait lui ajouter n_0').

Puisque $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}_1$ pour $i \in \mathrm{I}$, il existe dans $\mathfrak{N}_i$ des variétés orthogonales n_i, n_i', $\bar{n}_i$ avec

$$n_i \sim n_1, \qquad n_i' \sim n_1', \qquad \bar{n}_i \sim \bar{n}_1, \qquad \mathfrak{N}_i = n_i \oplus \bar{n}_i \oplus n_i'.$$

Puisque $\mathfrak{N}_0$ et les $\mathfrak{N}_i$ sous-tendent $\mathfrak{M}_1$, et puisque toutes ces variétés sont compatibles avec $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$, on voit que n_0, les n_i et les $\bar{n}_i$ sous-tendent $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$. Soit $\mathfrak{N}^*$ la variété sous-tendue par les n_i et les $\bar{n}_i$. Comme I et $\mathrm{I} \cup \{0\}$ sont équipotents, on a $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} n_i \sim n_0 \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} n_i\right)$, donc $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}^*$. Or $\mathfrak{N}^*$ est sous-tendue par la partition homogène $(n_i \oplus \bar{n}_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Donc :

Il existe une partition homogène infinie $(\overline{\mathfrak{N}_i})_{i \in \mathrm{I}}$ *de* $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \neq 0$.

Nous allons alors démontrer le lemme pour $n = 2$, afin de simplifier les notations. Mais il sera évident que la démonstration est générale. Partageons I en deux sous-ensembles I_1, I_2, équipotents à I, et posons $\overline{\mathfrak{M}^1} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}_1} \overline{\mathfrak{N}_i}$, $\overline{\mathfrak{M}^2} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}_2} \overline{\mathfrak{N}_i}$. $\overline{\mathfrak{M}^1}$ et $\overline{\mathfrak{M}^2}$ sont orthogonales, sous-tendent $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$, et $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \overline{\mathfrak{M}^1} \sim \overline{\mathfrak{M}^2}$.

Ceci posé, considérons les familles $(\mathfrak{N}^j)_{j \in \mathrm{J}}$ de variétés deux à deux orthogonales de $\widetilde{\mathbf{M}}^2$ possédant la propriété suivante : pour tout $j \in \mathrm{J}$, il existe des variétés $\overline{\mathfrak{M}_j^1}$, $\overline{\mathfrak{M}_j^2}$ orthogonales, sous-tendant $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}^j \neq 0$, et telles que $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}^j \sim \overline{\mathfrak{M}_j^1} \sim \overline{\mathfrak{M}_j^2}$. Grâce au théorème de Zorn, considérons une telle famille maximale, que nous notons encore $(\mathfrak{N}^j)_{j \in \mathrm{J}}$ pour simplifier. Soit $\widetilde{\mathfrak{N}} = \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{N}^j$. On a $\mathfrak{M}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M}_1$, sinon $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \widetilde{\mathfrak{N}}) \neq 0$ serait infinie, et, appliquant dans l'espace $\mathrm{H} \ominus \widetilde{\mathfrak{N}}$ le raisonnement du début à $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \widetilde{\mathfrak{N}})$, on pourrait ajouter une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^2$ à la famille $(\mathfrak{N}^j)_{j \in \mathrm{J}}$ qui est pourtant maximale. Alors, les variétés $\mathfrak{M}^i = \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \overline{\mathfrak{M}_j^i}$ $(i = 1, 2)$ sont les variétés du lemme.

Lemme 1.4. — *Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{1'}$ (*resp.* $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_{2'}$) *deux variétés de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *orthogonales, complémentaires dans une variété* $\mathfrak{M}$. *Il existe deux variétés* $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^2$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}^2$ *avec* $\mathfrak{N}^2 = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}^1$ *telles que, en posant* $\mathfrak{M}_i^j = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}^j$ $(i = 1, 2, 1', 2'; j = 1, 2)$ *on ait* $\mathfrak{M}_1^1 \prec \mathfrak{M}_2^1$, $\mathfrak{M}_{1'}^2 \prec \mathfrak{M}_{2'}^2$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j$ $(i, j = 1, 2, 1', 2')$. Appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathfrak{M}_{21'}$ et $\mathfrak{M}_{2'1}$. Il existe deux variétés $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^2$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^2$, avec $\mathfrak{N}^2 = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}^1$ telles que $\mathfrak{M}_{2'1} \cap \mathfrak{N}^1 \prec \mathfrak{M}_{21'} \cap \mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{M}_{21'} \cap \mathfrak{N}^2 \prec \mathfrak{M}_{2'1} \cap \mathfrak{N}^2$. On va voir que $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^2$ ont les propriétés du lemme. Par exemple, prouvons que $\mathfrak{M}_1^1 \prec \mathfrak{M}_2^1$.

$\mathfrak{M}_{2'1}$ et $\mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_{2'1}$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_1$; $\mathfrak{M}_{21'}$ et $\mathfrak{M}_2 \ominus \mathfrak{M}_{21'}$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_2$. Or $\mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_{2'1}$ et $\mathfrak{M}_2 \ominus \mathfrak{M}_{21'}$ sont en position p' donc équivalentes, donc leurs intersections avec $\mathfrak{N}^1$ sont équivalentes. Ceci, combiné avec $\mathfrak{M}_{2'1} \cap \mathfrak{N}^1 \prec \mathfrak{M}_{21'} \cap \mathfrak{N}^1$, donne $\mathfrak{M}_1^1 \prec \mathfrak{M}_2^1$.

Lemme 1.5. — *Si* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ *sont des variétés finies,* $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$ *est finie.*

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de prouver le lemme pour deux variétés $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{1'}$. Soient $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_{1'}$ et $\overline{\mathfrak{M}_1} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1$. $\overline{\mathfrak{M}_1}$ est en position p' avec $\mathfrak{M}_{1'} \ominus (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_{1'}) \subset \mathfrak{M}_{1'}$ donc est finie. Et $\overline{\mathfrak{M}_1}$, $\mathfrak{M}_1$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}$. Bref, il suffit de prouver le lemme pour deux variétés $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{1'}$ finies orthogonales. Supposons $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_{1'}$ infinie. Alors (lemmes 1.2 et 1.3) il existe une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ et une partition $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_{2'}$ de $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ telle que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_{2'} \neq 0$.

Raisonnant dans $\mathfrak{N}$ et changeant de notations, on a la situation suivante : $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_{1'}$ sont des variétés finies orthogonales, et $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_{2'}$ forment une partition de $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_{1'}$ telle que $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_{2'}$. Donc $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_{2'}$ sont infinies.

Appliquons le lemme 1.4 en changeant le rôle des indices. Il existe deux variétés $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^2$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ avec les propriétés suivantes : $\mathfrak{N}^2 = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}^1$; $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}^1 \prec \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}^1$, donc $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}^1$ est finie; alors $\mathfrak{M}_{2'} \cap \mathfrak{N}^1 \sim \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}^1$ est aussi finie; $\mathfrak{M}_{2'} \cap \mathfrak{N}^2 \prec \mathfrak{M}_{1'} \cap \mathfrak{N}^2$, donc $\mathfrak{M}_{2'} \cap \mathfrak{N}^2$ et $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}^2$ sont finies. Alors (lemme 1.1) $\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}^1) \oplus (\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}^2)$ est finie, d'où contradiction.

Les lemmes 1.6 à 1.9 ne seront pas utilisés dans ce qui suit. Mais ils seront nécessaires pour la théorie des applications $^{\natural}$ annoncée dans l'Introduction. Comme ce sont des conséquences directes des lemmes précédents, nous les démontrons ici.

Lemme 1.6. — *Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *deux variétés de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *finies et équivalentes, et* $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *une variété contenant* $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$. *Il existe un* $\mathrm{U} \in \mathbf{M}_{\mathrm{U}}$ *conservant* $\mathfrak{M}$ *et tel que* $\mathrm{U}(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}'$ est finie (lemme 1.5). Donc les opérateurs de $\mathbf{M}$ réduits par $\mathfrak{M}'$ induisent dans $\mathfrak{M}'$ un anneau de classe finie. Alors (d'après [1], lemme 4.12) il existe dans l'espace $\mathfrak{M}'$ un opérateur unitaire de cet anneau qui transforme $\mathfrak{M}_1$ en $\mathfrak{M}_2$. Prolongeons cet opérateur à H par linéarité en un opérateur U en posant $\mathrm{U}x = x$ pour $x \in \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}'$. U est invariant par tout unitaire de $\mathbf{M}'$, donc $\mathrm{U} \in \mathbf{M}$, et U transforme $\mathfrak{M}_1$ en $\mathfrak{M}_2$.

LEMME 1.7. — *Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ deux variétés équivalentes de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Il existe deux variétés $\mathfrak{M}'_1$, $\mathfrak{M}''_1$ (resp. $\mathfrak{M}'_2$, $\mathfrak{M}''_2$) de $\widetilde{\mathbf{M}}$, orthogonales, sous-tendant $\mathfrak{M}_1$ (resp. $\mathfrak{M}_2$) telles que $\mathfrak{M}'_2 = \mathrm{U}'(\mathfrak{M}'_1)$ et $\mathfrak{M}''_2 = \mathrm{U}''(\mathfrak{M}''_1)$ pour un $\mathrm{U}' \in \mathbf{M}_\mathfrak{U}$ et un $\mathrm{U}'' \in \mathbf{M}_\mathfrak{U}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.2, il existe une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$ soit finie et $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ proprement infinie [ou $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) = 0$]. On a

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \sim \mathfrak{M}_2 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}),$$

de sorte qu'il suffit de démontrer le lemme en supposant successivement $\mathfrak{M}_1$ finie et $\mathfrak{M}_1$ proprement infinie. Si $\mathfrak{M}_1$ est finie, il suffit d'appliquer le lemme 1.6 (en prenant $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}''_1 = 0$). Supposons désormais $\mathfrak{M}_1$ (et $\mathfrak{M}_2$) proprement infinies. Alors (lemme 1.3) il existe une partition $(\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}''_1)$ de $\mathfrak{M}_1$, une partition $(\mathfrak{M}'_2, \mathfrak{M}''_2)$ de $\mathfrak{M}_2$, avec $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}'_1 \sim \mathfrak{M}''_1 \sim \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}'_2 \sim \mathfrak{M}''_2$. Montrons par exemple qu'il existe un $\mathrm{U}' \in \mathbf{M}_\mathfrak{U}$ tel que $\mathfrak{M}'_2 = \mathrm{U}'(\mathfrak{M}'_1)$. Il suffit visiblement de prouver que $\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}'_2 \sim \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}'_1$. Or

$$\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}'_i = (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_i) \oplus \mathfrak{M}''_i \sim (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_i) \oplus \mathfrak{M}_i = \mathrm{H} \qquad (i = 1, 2)$$

et le lemme est démontré.

LEMME 1.8. — *Supposons* H *proprement infinie. Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ des variétés finies. Il existe une variété équivalente à $\mathfrak{M}_2$ et orthogonale à $\mathfrak{M}_1$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_0 = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_1$. D'après le théorème 6 de [1] appliqué à $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_2$, il existe deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, avec

$$\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}' \prec \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'.$$

Alors $\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}$ est finie. $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}$ est aussi finie. Puisque $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_0$ sous-tendent H, $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}$ sous-tendent $\mathfrak{M}$, qui est donc finie (lemme 1.5). Comme H est proprement infinie, $\mathfrak{M} = 0$. Alors

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}' \prec \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_0,$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 1.9. — *Supposons* H *proprement infinie. Si $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ avec une variété $\mathfrak{M}$ finie, il existe des $\mathfrak{M}'_i \sim \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, deux à deux orthogonales, telles que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}'_i$.*

Démonstration. — Par récurrence sur n, on est ramené à prouver ceci : soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$ des variétés deux à deux orthogonales équivalentes à $\mathfrak{M}$; soit $\mathfrak{M}_n \prec \mathfrak{M}$; alors, il existe une variété $\mathfrak{M}'_n \sim \mathfrak{M}$, orthogonale à $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$, avec $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \subset \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i\right) \oplus \mathfrak{M}'_n$.

Or, soit $\mathfrak{M}''_n = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i\right) \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i\right)$. $\mathfrak{M}''_n$ est en position p' avec une variété contenue dans $\mathfrak{M}_n$, donc $\mathfrak{M}''_n \prec \mathfrak{M}_n \prec \mathfrak{M}$. $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i$ est finie (lemme 1.5), donc (lemme 1.8) il existe une $\overline{\mathfrak{M}} \sim \mathfrak{M}$ avec $\overline{\mathfrak{M}}$ orthogonale à $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i$. $\mathfrak{M}''_n$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ sont contenues dans $\mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i\right)$ donc (lemme 1.6) il existe un $\mathrm{U} \in \mathbf{M}_L$ conservant $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i$ et tel que $\mathrm{U}(\mathfrak{M}''_n) \subset \overline{\mathfrak{M}}$. $\mathrm{U}^{-1}(\overline{\mathfrak{M}})$ est la variété $\mathfrak{M}'_n$ cherchée.

II. — Première réduction des anneaux d'opérateurs.

Définition 2.1. — **M** *sera dit de classe finie* (*resp. purement infinie*) *si la variété* H *est finie* (*resp. purement infinie*).

C'est bien là la définition des anneaux de classe finie donnée dans [1].

Lemme 2.1. — *Soit* $\mathfrak{M}_1$ *une variété finie,* $\mathfrak{M}_2$ *une variété purement infinie.* $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *sont orthogonales.*

Démonstration. — Il existe ([1], théorème 6) des variétés m_1, m'_1, (resp. m_2, m'_2) orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_1$ (resp. $\mathfrak{M}_2$) avec $m_1 \prec m_2$, $m'_2 \prec m'_1$, $m_2^{\natural}$ orthogonale à $m_1'^{\natural}$. Comme $m_1 \subset \mathfrak{M}_1$, m_1 est finie, et, comme $m_1 \prec m_2 \subset \mathfrak{M}_2$, $m_1 = 0$. Comme $m'_2 \prec m'_1 \subset \mathfrak{M}_1$, m'_2 est finie, et, comme $m'_2 \subset \mathfrak{M}_2$, $m'_2 = 0$. Alors, $\mathfrak{M}_1^{\natural} = m_1'^{\natural}$ est orthogonale à $\mathfrak{M}_2^{\natural} = m_2^{\natural}$. D'où le lemme.

Lemme 2.2. — *Soit* H^{pi} *la variété sous-tendue par l'ensemble des variétés purement infinies* (3) :

a. $\mathrm{H}^{pi} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$;

b. H^{pi} *est purement infinie*;

c. les variétés purement infinies ne sont autres que les variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$. $\neq 0$, *contenues dans* H^{pi}.

Démonstration. — $\mathrm{H}^{pi} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ est évident; H^{pi} est aussi invariante par tout $\mathrm{U} \in \mathbf{M}_L$, d'où *a*. Toute variété finie est orthogonale à H^{pi}, d'après le lemme 2.1, d'où *b*. Par définition de H^{pi}, toute variété purement infinie est contenue dans H^{pi}; et toute variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\neq 0$, contenue dans H^{pi}, est purement infinie puisque H^{pi} est purement infinie, d'où *c*.

Lemme 2.3. — *Soit* H^{f} *la variété sous-tendue par l'ensemble des variétés finies de* $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ (3) :

(3) Si cet ensemble est vide, la variété sous-tendue est 0 conformément aux conventions usuelles.

a. $H^f \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$;

b. H^f *est finie*;

c. les variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *ne sont autres que les variétés de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *contenues dans* H^f.

Démonstration. — *a* est immédiat, *c* résulte aussitôt de la définition de H^f et de *b*. Prouvons *b*. Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ la famille des variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. Soit $\mathfrak{N} \subset H^f$, avec $\mathfrak{N} \sim H^f$. Pour tout $i \in I$, on a

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i \subset H^f \cap \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}_i,$$

d'où, comme $\mathfrak{M}_i$ est finie, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i$. Donc $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}_i$, et par suite $\mathfrak{N} \supset H^f$. D'où $\mathfrak{N} = H^f$, ce qui prouve *b*.

Lemme 2.4. — *Il existe une variété finie* $\mathfrak{M}$ *telle que* $\mathfrak{M}^\natural = H \ominus H^{pi}$.

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une famille maximale (théorème de Zorn) de variétés finies telles que les $\mathfrak{M}_i^\natural$ soient deux à deux orthogonales. Soit $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$, qui est finie (lemme 1.1). On a $\mathfrak{M} \subset H \ominus H^{pi}$ (lemme 2.1), donc $\mathfrak{M}^\natural \subset H \ominus H^{pi}$ (lemme 2.2*a*). Si $\mathfrak{M}' = (H \ominus H^{pi}) \ominus \mathfrak{M}^\natural \neq 0$, $\mathfrak{M}'$, n'étant pas purement infinie, contient une variété finie $\widehat{\mathfrak{M}} \neq 0$; comme $\mathfrak{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, on a $\widehat{\mathfrak{M}}^\natural \subset \mathfrak{M}'$, de sorte qu'on pourrait ajouter $\widehat{\mathfrak{M}}$ à la famille $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ qui ne serait pas maximale. Donc $\mathfrak{M}^\natural = H \ominus H^{pi}$.

Lemme 2.5. — *a. Toute variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *contenue dans* H^f *est finie.*

b. L'ensemble des variétés finies sous-tend $H \ominus H^{pi}$ ([3]).

Démonstration. — *a* est immédiat. Prouvons *b*. Toute variété finie est contenue dans $H \ominus H^{pi}$ (lemme 2.1). D'autre part, les variétés équivalentes à une variété $\mathfrak{N}$ sous-tendent $\mathfrak{N}^\natural$ ([1], lemme 3.1), donc $H \ominus H^{pi}$ si l'on prend pour $\mathfrak{N}$ la variété $\mathfrak{M}$ du lemme 2.4.

Posons $H^i = H \ominus (H^f \oplus H^{pi})$. On peut grouper les principaux résultats qui précèdent de la manière suivante :

Théorème 1. — *Il existe trois variétés* H^{pi}, H^f, H^i, *appartenant à* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, *deux à deux orthogonales, sous-tendant* H, *avec les propriétés que voici :*

a. $\mathbf{M}$ *induit dans* H^{pi} *un anneau de classe purement infinie. Toute variété* $\neq 0$ *d'un tel anneau est purement infinie.*

b. $\mathbf{M}$ *induit dans* H^f *un anneau de classe finie. Toute variété d'un tel anneau est finie.*

c. $\mathbf{M}$ *induit dans* H^i *un anneau pour lequel* : 1° *aucune variété n'est purement infinie;* 2° *aucune variété du centre n'est finie.*

d. H^{pi}, H^f, H^i *sont déterminées univoquement par les propriétés précédentes.*

III. — Deuxième réduction des anneaux d'opérateurs.

Elle va être basée sur les notions suivantes :

DÉFINITION 3.1. — *Une variété* $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *est dite irréductible si* $\mathfrak{M} \neq 0$ *et s'il n'existe aucune partition homogène d'ordre* 2 *majorée par* $\mathfrak{M}$.

DÉFINITION 3.2. — *Une variété* $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *est dite simple si* $\mathfrak{M} \neq 0$ *et s'il existe une partition homogène* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$, *avec* $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}$ *pour* $i \in I$, *et* $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$.

DÉFINITION 3.3. — *Une variété* $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *est dite homogène si* $\mathfrak{M} \neq 0$, *et s'il existe une partition homogène* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ *de* $\mathfrak{M}$, *les* $\mathfrak{M}_i$ *étant irréductibles* (et simples d'après la définition 3.2).

Quand $\mathbf{M}$ est de classe finie, les définitions 3.2 et 3.3 coïncident avec les définitions 4.2 et 4.6 de [1] (car alors toute partition homogène est finie : [1], lemme 4.2). La définition 3.1 n'est autre que la définition 4.5 de [1].

LEMME 3.1. — *Toute variété irréductible est finie.*

Démonstration. — Elle résulte aussitôt des lemmes 1.2 et 1.3.

LEMME 3.2. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété irréductible.*

a. Soient A *et* B *des opérateurs de* $\mathbf{M}$ *réduits par* $\mathfrak{M}$. *Les parties induites par* A *et* B *dans* $\mathfrak{M}$ *sont permutables.*

b. Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *des variétés orthogonales contenues dans* $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}_1^\natural$ *et* $\mathfrak{M}_2^\natural$ *sont orthogonales.*

Démonstration. — Ce lemme est démontré dans [1] (lemmes 4.7 et 4.8). Les démonstrations de [1] ne font nul usage du fait que $\mathbf{M}$ est de classe finie.

LEMME 3.3. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété irréductible et* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *une variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$. *On a* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^\natural$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$. On a $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}^\natural$, donc $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^\natural$. De même $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}'^\natural$. $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ sont orthogonales, donc aussi (lemme 3.2*b*) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^\natural \subset \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}'^\natural \subset \mathfrak{M}$. Comme $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ sont complémentaires dans $\mathfrak{M}$, on a nécessairement

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^\natural = \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}'^\natural = \mathfrak{N}'.$$

LEMME 3.4 — *Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *deux variétés irréductibles. Pour que* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{M}_1^\natural = \mathfrak{M}_2^\natural$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le lemme 3.1 de [1]. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons $\mathfrak{M}_1^\natural = \mathfrak{M}_2^\natural$, et appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Il existe des variétés m_1, m'_1 (resp. m_2, m'_2) orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_1$ (resp. $\mathfrak{M}_2$), avec $m_1 \prec m_2$, $m'_2 \prec m'_1$, $m_2^\natural$ orthogonale à $m_1'^\natural$. On a

$$\mathfrak{M}_1^\natural = m_1^\natural \oplus m_1'^\natural, \qquad \mathfrak{M}_2^\natural = m_2^\natural \oplus m_2'^\natural;$$

$m_2^\natural$ est orthogonale à $m_1'^\natural$, $m_1^\natural \subset m_2^\natural$, $m_2'^\natural \subset m_1'^\natural$, donc l'hypothèse $\mathfrak{M}_1^\natural = \mathfrak{M}_2^\natural$ entraîne $m_1^\natural = m_2^\natural$, $m_1'^\natural = m_2'^\natural$. On a $m_1 \sim \overline{m}_1$, avec $\overline{m}_1 \subset m_2$, donc $\overline{m}_1^\natural = m_1^\natural = m_2^\natural$, et, comme $(m_2 \ominus \overline{m}_1)^\natural$ est orthogonale à $\overline{m}_1^\natural$ (lemme 3.2 *b*), $(m_2 \ominus \overline{m}_1)^\natural = 0$, $\overline{m}_1 = m_2$, $m_1 \sim m_2$. De même $m'_1 \sim m'_2$. D'où le lemme.

Lemme 3.5. — *Soit $\mathfrak{M}$ une variété homogène, et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$, $(\mathfrak{M}'_j)_{j\in J}$ deux partitions homogènes de $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{M}_i$ et les $\mathfrak{M}'$ étant irréductibles. I et J sont équipotents.*

Démonstration. — Si I par exemple est fini, $\mathfrak{M}$ est finie (lemmes 3.1 et 1.5). Alors J est fini ([1], lemme 4.2). D'ailleurs le lemme 3.4 prouve que $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}'_j$. Si I et J n'avaient pas le même nombre d'éléments, on voit aussitôt que $\mathfrak{M}$ serait équivalente à une variété strictement contenue dans $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde. Donc I et J sont équipotents. Supposons maintenant I et J infinis. Considérons un indice particulier $i \in I$. Soit $f_i \in \mathfrak{M}_i$, avec $f_i \neq 0$, et soit $\mathfrak{N}_i$ la plus petite variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenant f_i. On a $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}_i$, donc, posant $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_i^\natural$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}$ (lemme 3.3). D'autre part, f_i est orthogonal à toutes les $\mathfrak{M}'_j$ sauf au plus à une infinité dénombrable d'entre elles, soit $(\mathfrak{M}'_j)_{j\in K}$. Donc $f_i \in \bigoplus_{j\in K} \mathfrak{M}'_j$, et par suite $\mathfrak{N}_i \subset \bigoplus_{j\in K} \mathfrak{M}'_j$. Ceci posé, comme $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}_{i'}$ pour $i' \in I$, il existe une $\mathfrak{N}_{i'} \subset \mathfrak{M}_{i'}$ avec les propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}_{i'}$, et par suite $\mathfrak{N}_{i'}^\natural = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{i'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_{i'}$;

2° $\mathfrak{N}_{i'}$ est orthogonale aux $\mathfrak{M}'$ sauf au plus à une infinité dénombrable d'entre elles.

Comme les $\mathfrak{M}_{i'}$ sous-tendent $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{N}_{i'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_{i'}$ sous-tendent $\mathfrak{N}$. Alors, pour toute $\mathfrak{M}'_j$ existe une $\mathfrak{N}_{i_j}$ non orthogonale à $\mathfrak{M}'_j$ (sinon $\mathfrak{M}'_j$ serait orthogonale à $\mathfrak{N}$; donc toute $\mathfrak{M}'_j$, équivalente à $\mathfrak{M}'_j$, serait orthogonale à $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ donc $\mathfrak{M}$ serait orthogonale à $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{N}_i = 0$ contrairement à $f_i \neq 0$). D'après ce qui précède, i_j ne peut être le même que pour une infinité dénombrable au plus d'indices j. On en déduit aussitôt :

$$\text{puissance de J} \leq \text{puissance de I} \times \aleph_0 = \text{puissance de I},$$

et, par symétrie entre I et J, le lemme est démontré.

Nous pouvons alors poser la définition suivante :

Définition 3.4. — *Soit $\mathfrak{M}$ une variété homogène. On appellera degré de $\mathfrak{M}$ la puissance de toute partition homogène de $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont irréductibles.*

Les lemmes 1.5 et 3.1 prouvent aussitôt que $\mathfrak{M}$, homogène, est finie si et seulement si son degré est fini.

Lemme 3.6. — *Si $\mathfrak{M}$ est une variété homogène de degré α, toute variété $\mathfrak{N}$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\alpha}$ contenue dans $\mathfrak{M}$ et $\neq 0$ est homogène de degré α.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition homogène de $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{M}_i$ étant irréductibles et I ayant pour puissance α. Les $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}_i$ forment une partition homogène de $\mathfrak{N}$ et sont irréductibles, ce qui prouve le lemme.

Lemme 3.7. — *Soit α un nombre cardinal. S'il existe des variétés homogènes de degré α, il en existe une, soit H^{α}, plus grande que toutes les autres. Alors, les variétés homogènes de degré α ne sont autres que les variétés $\neq 0$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\alpha}$ contenues dans H^{α}.*

Démonstration. — Considérons, parmi les partitions dont les éléments sont des variétés homogènes de degré α, une partition maximale (théorème de Zorn), soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$. Soit $\mathrm{H}^{\alpha}=\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i$. Soit, pour $i\in I$, $(\mathfrak{N}_i^j)_{j\in J}$ une partition de $\mathfrak{M}_i$ dont les éléments sont irréductibles; on peut supposer l'ensemble d'indices J indépendant de i et de puissance α. Soit $\mathfrak{N}^j=\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{N}_i^j$. Les $\mathfrak{N}^j$, où $j\in J$, forment une partition homogène d'ordre α de H^{α}. De plus, $\mathfrak{N}^j$ est irréductible; car, soit (m, m') une partition homogène majorée par $\mathfrak{N}^j$; soient $m_i=m\cap\mathfrak{N}_i^j$, $m_i'=m'\cap\mathfrak{N}_i^j$; comme $m\sim m'\neq 0$, on a $m_i\sim m_i'\neq 0$ pour un $i\in I$, de sorte que (m_i, m_i') est une partition homogène majorée par $\mathfrak{N}_i^j$, ce qui est absurde. Donc H^{α} est homogène de degré α.

Maintenant, soit $\mathfrak{M}$ une variété homogène de degré α. Si

$$\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}\ominus(\mathfrak{M}\cap\mathrm{H}^{\alpha})=0,$$

$\overline{\mathfrak{M}}$ est homogène de degré α d'après le lemme 3.6, donc on peut ajouter $\overline{\mathfrak{M}}$ à la partition $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$, ce qui est absurde. Donc $\overline{\mathfrak{M}}=0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{M}\subset\mathrm{H}^{\alpha}$. H^{α} est donc bien la plus grande des variétés homogènes de degré α. La fin du lemme résulte aussitôt du lemme 3.6.

Lemme 3.8. — *Si α et β sont deux nombres cardinaux différents pour lesquels H^{α} et H^{β} existent, H^{α} et H^{β} sont orthogonales.*

Démonstration. — Si $\mathrm{H}^{\alpha}\cap\mathrm{H}^{\beta}\neq 0$, $\mathrm{H}^{\alpha}\cap\mathrm{H}^{\beta}$ est homogène de degré α et de

degré β (lemme 3.6), ce qui est absurde. Donc $H^\alpha \cap H^\beta = 0$, et le lemme en résulte puisque $H^\alpha \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ et $H^\beta \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$.

LEMME 3.9. — *Toute variété irréductible $\mathfrak{M}_1$ contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Considérons les partitions homogènes qui contiennent $\mathfrak{M}_1$ comme élément, et soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une telle partition maximale (théorème de Zorn). Soit $\mathfrak{M}_0 = H \ominus \left(\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i\right)$. Raisonnant exactement comme dans [1] (lemme 4.9), on détermine, pour $i \in I$ ou $i = 0$, des variétés $m_i \subset \mathfrak{M}_i$, équivalentes, $\neq 0$, sous-tendant une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. Alors m_1 est la variété du lemme.

THÉORÈME 2. — *Soit* A *l'ensemble des nombres cardinaux inférieurs ou égaux à la dimension de* H. *Il existe une famille* $(H^\alpha)_{\alpha\in A}$ *avec les propriétés suivantes :*

a. $H^\alpha = 0$ *ou* H^α *est homogène de degré* α; *l'ensemble des variétés homogènes de degré* α *est l'ensemble des variétés* $\neq 0$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *contenues dans* H^α; *cette propriété détermine univoquement* H^α;

b. H^α *et* H^β *sont orthogonales si* $\alpha \neq \beta$;

c. $H^0 = H \ominus \left(\bigoplus_{\alpha\in A} H^\alpha\right)$ *ne contient aucune variété irréductible*;

d. $H^\alpha \subset H^f$ *si* α *est fini,* $H^\alpha \subset H^i$ *si* α *est infini.*

Démonstration. — *a* et *b* sont déjà prouvés, prouvons *c*. Si H^0 contient une variété irréductible, H^0 contient (lemme 3.9) une variété irréductible simple m, et, comme $H^0 \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, H^0 contient la variété homogène $m^\natural$. Le degré de cette variété homogène est évidemment un nombre de A, soit α, de sorte que $m^\natural \subset H^\alpha$, d'où absurdité. Donc H^0 ne contient aucune variété irréductible.

Prouvons *d*. On a déjà observé que, si α est fini, H^α est finie, donc $H^\alpha \subset H^f$. Soit maintenant $\alpha \in A$ un nombre cardinal infini tel que $H^\alpha \neq 0$. Il existe une variété irréductible $\mathfrak{N}$ telle que $H^\alpha = \mathfrak{N}^\natural$. $\mathfrak{N}$ est finie (lemme 3.1), donc $\mathfrak{N}$ et par suite $\mathfrak{N}^\natural$ sont orthogonales à H^{pi} (lemme 2.1). D'autre part, si $H^\alpha \cap H^f \neq 0$, $H^\alpha \cap H^f$ est homogène de degré α (lemme 3.6), et finie, ce qui est absurde; donc H^α est orthogonale à H^f. Donc $H^\alpha \subset H^i$.

Nous allons voir maintenant que $\mathbf{M}$ induit dans chaque H^α, $(\alpha \in A)$, un anneau de structure simple. Pour mieux comprendre l'intérêt du théorème suivant, rappelons que (indépendamment de tout anneau $\mathbf{M}$), si $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ est une famille de variétés deux à deux orthogonales sous-tendant H, un opérateur A est parfaitement déterminé par le tableau à double entrée des opérateurs $P_{\mathfrak{M}_i} A P_{\mathfrak{M}_j}$. Si de plus les $\mathfrak{M}_i$ ont même dimension, et si U_{ij} est un opérateur partiellement isométrique admettant $\mathfrak{M}_i$ pour variété initiale et $\mathfrak{M}_j$ pour

variété finale, on peut aussi bien définir A par les $U_{i_0}(P_{\mathfrak{M}_i} A P_{\mathfrak{M}_j}) U_{i_0 j} = U_{i_0} A U_{i_0 j}$, i_0 étant un indice particulier de I. Ces opérateurs appliquent $\mathfrak{M}_{i_0}$ dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ et s'annulent dans $H \ominus \mathfrak{M}_{i_0}$, de sorte qu'on peut se contenter de considérer leurs restrictions A_{ij} à $\mathfrak{M}_{i_0}$. La représentation matricielle correspond au cas où les $\mathfrak{M}_i$ sont de dimension 1, et le calcul sur les A s'effectue d'ailleurs à l'aide des A_{ij} par les règles habituelles du calcul matriciel.

Si **M** est abélien, H est, on le voit aussitôt, irréductible, de sorte que, avec les notations précédentes $H' = H^1$. On va voir que l'étude de **M** dans une H^α se ramène à l'étude des anneaux abéliens.

THÉORÈME 3. — *Supposons* H *homogène de degré* α. *Soit* $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ *une partition homogène de* H, *les* $\mathfrak{M}_i$ *étant irréductibles,* I *étant de puissance* α. *Soit* $U_{ij} \in \mathbf{M}_{PI}$, *admettant* $\mathfrak{M}_i$ *pour variété initiale,* $\mathfrak{M}_j$ *pour variété finale. Soit* i_0 *un indice particulier de* I. *Il existe dans l'espace* $\mathfrak{M}_{i_0}$ *un anneau abélien d'opérateurs, soit* **N**, *avec la propriété suivante : l'opérateur borné* A *de* H *est dans* **M** *si et seulement si les restrictions* A_{ij} *à* $\mathfrak{M}_{i_0}$ *des* $U_{i_0} A U_{i_0 j}$ *sont dans* **N**. **N** *n'est autre que l'anneau induit par* **M** *dans* $\mathfrak{M}_{i_0}$.

Démonstration. — Les opérateurs de **M** réduits par $\mathfrak{M}_{i_0}$ induisent dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ un anneau d'opérateurs **N** qui est abélien (lemme 3.2 *a*). Si $A \in \mathbf{M}$, $U_{i_0} A U_{i_0 j} \in \mathbf{M}$ applique $\mathfrak{M}_{i_0}$ dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ et s'annule dans $H \ominus \mathfrak{M}_{i_0}$, donc est réduit par $\mathfrak{M}_{i_0}$, et sa partie induite A_{ij} dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ est dans **N**. Réciproquement, si $A_{ij} \in \mathbf{N}$, les A_{ij}, donc A, sont invariants par tout opérateur unitaire de **M'**, de sorte que $A \in \mathbf{M}$.

IV. — Relations avec la réduction de J. von Neumann.

Nous allons, dans toute la fin de cet article supposer H séparable, et utiliser sans explications les notations de [5] en même temps que les notations précédentes.

$\mathbf{M}^\lambda$ est engendré par une résolution de l'unité $E(\lambda)$. Soit $\sigma(\lambda)$ une N-fonction équivalente à $E(\lambda)$. Il existe une représentation de H comme somme directe généralisée d'espaces $H(\lambda)$ avec la N-fonction $\sigma(\lambda)$, à laquelle appartiennent la décomposition de l'unité $E(\lambda)$ et l'anneau $\mathbf{M}^\lambda$ ([5], théorèmes III et IV). Soit $\mathbf{M} \approx \Sigma \mathbf{M}(\lambda)$ la décomposition de **M** en facteurs ([5], théorème VII), bien déterminée si l'on néglige les ensembles de σ-mesure o. Il s'agit d'étudier la classe de ces facteurs suivant la valeur de λ. Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 4.1. — *Soit* $E \in \mathbf{M}$ *un projecteur proprement infini* (*), $E \sim \Sigma E(\lambda)$ *sa décomposition. Les* $E(\lambda)$ *sont nuls ou infinis* σ*-presque-partout.*

(*) Ce qui signifie que la variété correspondant à E est proprement infinie. De même plus loin pour les projecteurs finis, irréductibles, etc. Nous employons l'expression σ-presque-partout pour dire : sauf sur un ensemble de σ-mesure nulle.

Démonstration. — Il existe (lemme 1.3) des projecteurs E_1, E_2 de $\mathbf{M}$ avec

$$E_1E_2=0, \qquad E_1+E_2=E, \qquad E\sim E_1\sim E_2.$$

Soient $E_1\sim\Sigma E_1(\lambda)$, $E_2\sim\Sigma E_2(\lambda)$ les décompositions de E_1, E_2. $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$ sont des projecteurs,

$$E(\lambda)=E_1(\lambda)+E_2(\lambda), \qquad E_1(\lambda)E_2(\lambda)=0,$$

tout ceci σ-presque-partout. $E\sim E_1$ signifie qu'il existe un $U\in\mathbf{M}$ avec $U^*U=E$, $UU^*=E_1$, d'où, si $U\sim\Sigma U(\lambda)$,

$$\big(U(\lambda)\big)^*U(\lambda)=E(\lambda), \qquad U(\lambda)\big(U(\lambda)\big)^*=E_1(\lambda),$$

c'est-à-dire $E(\lambda)\sim E_1(\lambda)$; de même $E(\lambda)\sim E_2(\lambda)$ (σ-presque-partout). Si $E(\lambda)\neq 0$, ceci prouve que $E(\lambda)$ est infini.

Lemme 4.2. — *Soit $E\in\mathbf{M}$ un projecteur fini, $E\sim\Sigma E(\lambda)$ sa décomposition. Les $E(\lambda)$ sont finis σ-presque-partout.*

Démonstration. — Utilisons plus spécialement les notations du lemme 17 de [5]. Les couples $(\lambda, \overline{V})$ dans l'espace $r\times\mathcal{S}_\rho$, vérifiant $\lambda\in\Delta'_\rho$ et (21.2) de [5] forment un ensemble D_ρ qui est borélien. Comme dans la démonstration du lemme 7 de [5], il en résulte l'existence d'un $V(\lambda)\in\mathbf{M}(\lambda)$, dépendant mesurablement de λ, avec, pour $\lambda\in M_\infty$,

$$V(\lambda)^*V(\lambda)=E(\lambda), \qquad V(\lambda)V(\lambda)^*=V(\lambda)V(\lambda)^*E(\lambda)=E(\lambda),$$

et, pour $\lambda\notin M_\infty$, $V(\lambda)=0$. Soit $V\sim\Sigma V(\lambda)$ [les $V(\lambda)$ sont partiellement isométriques, donc $\|V(\lambda)\|\leq 1$]. Soit $F(\lambda)$ l'opérateur égal à $1(\lambda)$ pour $\lambda\in M_\infty$, à $0(\lambda)$ pour $\lambda\notin M_\infty$ [$F(\lambda)$ est mesurable puisque M_∞ l'est], et $F\sim\Sigma F(\lambda)$ qui est un projecteur de $\mathbf{M}^{\mathfrak{z}}$. On a $V^*V=EF$, $VV^*=VV^*EF$; comme E est fini, EF est fini, donc $VV^*EF=EF$; pour $\lambda\in M_\infty$ on a donc $V(\lambda)V(\lambda)^*E(\lambda)=E(\lambda)$ σ-presque-partout. Donc M_∞ est de σ-mesure nulle.

Lemme 4.3. — *Soit E un projecteur irréductible, $E\sim\Sigma E(\lambda)$ sa décomposition. Les $E(\lambda)$ sont nuls ou minimaux σ-presque-partout.*

Démonstration. — Utilisons encore les notations du lemme 17 de [5]. Considérons les couples $(\lambda, \overline{E})$ dans $r\times\mathcal{S}_\rho$ tels que $\lambda\in\Delta'_\rho$ et tels que

$$E\mathcal{J}^{\lambda-1}A_\eta(\lambda)\mathcal{J}^\lambda=\mathcal{J}^{\lambda-1}A_\eta(\lambda)\mathcal{J}^\lambda E, \qquad E\mathcal{J}^{\lambda-1}A_\eta(\lambda)^*\mathcal{J}^\lambda=\mathcal{J}^{\lambda-1}A_\eta(\lambda)^*\mathcal{J}^\lambda E,$$
$$E=E^*, E^2=E\neq 0, \qquad E\mathcal{J}^{\lambda-1}E(\lambda)\mathcal{J}^\lambda=E\neq\mathcal{J}^{\lambda-1}E(\lambda)\mathcal{J}^\lambda.$$

A la manière habituelle, on prouve que ces couples forment un ensemble

borélien D_p dans $r \times \mathfrak{S}_p$. D'où l'existence d'un $E'(\lambda) \in \mathbf{M}(\lambda)$, dépendant mesurablement de λ, projecteur pour tout λ, avec

$$E'(\lambda)\,E(\lambda) = E'(\lambda) \neq E(\lambda), \qquad E'(\lambda) \neq 0(\lambda),$$

lorsque λ appartient à la projection M de $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_\varkappa$ sur r, et $E'(\lambda) = 0(\lambda)$ pour les autres valeurs de λ. M est l'ensemble des points pour lesquels $E(\lambda)$ n'est ni nul ni minimal. Soit $E' \sim \Sigma E'(\lambda)$. E' est un projecteur de $\mathbf{M}$ avec $E' \leq E$. Puisque E est irréductible, on a (lemme 3.3) $E' = EF$ avec $F \in \mathbf{M}'$. Soit $F \sim \Sigma F(\lambda)$, avec $F(\lambda) = 1(\lambda)$ ou $0(\lambda)$ pour tout λ. On a alors $E'(\lambda) = E(\lambda)$ ou $0(\lambda)$ σ-presque-partout. Donc M est de σ-mesure nulle.

Lemme 4.4. — *Si* C_{I_m} *n'est pas de* σ*-mesure nulle, il existe un projecteur irréductible* $E \in \mathbf{M}$, *de décomposition* $E \sim \Sigma E(\lambda)$, *tel que* $E(\lambda) \neq 0$ *pour* $\lambda \in C_{I_m}$, $E(\lambda) = 0$ *pour* $\lambda \notin C_{I_m}$.

Démonstration. — Soit H^* un espace de Hilbert de dimension mn ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) et $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}^{*\prime}$ une factorisation couplée de classe (I_m, I_n) dans H^*. $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe (I_m, I_n) si et seulement si il existe un isomorphisme de H^* sur $H(\lambda)$ qui transforme $\mathbf{M}^*$ en $\mathbf{M}(\lambda)$. Comme dans le lemme 20 de [5], les paires (λ, U) dans $r \times \mathfrak{S}_{mn}$ pour lesquelles : 1° $\lambda \in \Delta'_{mn}$; 2° U est unitaire dans H^*; 3° $\mathfrak{J}^{(\lambda)} U$ transforme $\mathbf{M}^*$ en $\mathbf{M}(\lambda)$ forment un ensemble borélien. D'où l'existence pour $\lambda \in C_{I_m I_n}$ d'un $U(\lambda) \in \mathfrak{S}_{mn}$ tel que l'image inverse, dans l'application $\lambda \to U(\lambda)$, de tout ouvert de $\mathfrak{S}_{mn}$ soit σ-mesurable. Soit d'autre part $E \in \mathfrak{S}_{mn}$ un projecteur minimal de $\mathbf{M}^*$. On prouve à la manière habituelle que $\mathfrak{J}^{(\lambda)} U(\lambda) E U(\lambda)^{-1} \mathfrak{J}^{(\lambda)-1} = E_n(\lambda)$ est un projecteur de $\mathbf{M}(\lambda)$ dépendant σ-mesurablement de λ pour $\lambda \in C_{I_m I_n}$. Posons $E(\lambda) = E_n(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \in C_{I_m I_n}$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$), $E(\lambda) = 0$ pour $\lambda \notin C_{I_m}$. $E(\lambda)$ dépend σ-mesurablement de λ; $E \sim \Sigma E(\lambda)$ est un projecteur de $\mathbf{M}$. On va prouver que E est irréductible, et le lemme sera établi.

D'abord $E \neq 0$ puisque $E(\lambda) \neq 0$ sur l'ensemble C_{I_m} de σ-mesure non nulle. Ensuite, supposons des projecteurs E_1, E_2 de $\mathbf{M}$ avec

$$E_1 E_2 = 0, \qquad E_1 \leq E, \qquad E_2 \leq E, \qquad E_1 \sim E_2.$$

Soient $E_1 \sim \Sigma E_1(\lambda)$, $E_2 \sim \Sigma E_2(\lambda)$ leurs décompositions. On a

$$E_1(\lambda)\,E_2(\lambda) = 0, \qquad E_1(\lambda) \leq E(\lambda), \qquad E_2(\lambda) \leq E(\lambda), \qquad E_1(\lambda) \sim E_2(\lambda)$$

σ-presque-partout. Comme $E(\lambda)$ est nul ou minimal pour tout λ, il en résulte $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 0$ σ-presque-partout, donc $E_1 = E_2 = 0$, de sorte que E_1, E_2 ne forment pas une partition : E est irréductible.

Lemme 4.5. — *Si* H *est homogène de degré* α ($\alpha = 1, 2, \ldots, \aleph_0$), $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* I_α σ*-presque-partout.*

Démonstration. — Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition homogène de 1, les E_i étant irréductibles et I de puissance α. On a $1=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i$ au sens de la convergence forte des suites d'opérateurs (si α est fini il n'y a même pas de question de convergence). Soit $E_i \sim \Sigma E_i(\lambda)$ la décomposition de E_i. Les $E_i(\lambda)$ sont des projecteurs nuls ou minimaux σ-presque-partout d'après le lemme 4.3, et $E_i(\lambda)E_j(\lambda)=0$ pour $i\neq j$ σ-presque-partout. D'après [5] (p. 444), $1=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i$ entraîne $1(\lambda)=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i(\lambda)$ σ-presque-partout, à condition de grouper éventuellement certains termes dans la série. Comme les $E_i(\lambda)$ sont des projecteurs orthogonaux, on a $1(\lambda)=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i(\lambda)$ au sens usuel σ-presque-partout. Pour achever de prouver le lemme, il suffit donc de prouver que $E_i(\lambda)\neq 0$ σ-presque-partout. Or, si l'on avait $E_i(\lambda)=0$ sur un ensemble M de σ-mesure non nulle pour un $i\in I$, on aurait $E_i(\lambda)=0$ pour $\lambda\in M$ et pour tout $i\in I$ puisque $E_i\sim E_j$ entraîne $E_i(\lambda)\sim E_j(\lambda)$, d'où $1(\lambda)=0$ σ-presque-partout sur M, ce qui est absurde.

Lemme 4.6. — *Si* $H=H^f\cap H^0$, *c'est-à-dire si* H *est finie et ne contient aucune variété irréductible,* $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* II_1 *σ-presque-partout.*

Démonstration. — $1(\lambda)$ est fini σ-presque-partout d'après le lemme 4.2. C_{1_m} est de σ-mesure-nulle pour $m=1, 2, \ldots, \infty$ d'après le lemme 4.4. Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe II_1 σ-presque-partout.

Lemme 4.7. — *Si* $H=H^f\cap H^0$, $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* II_∞ *σ-presque-partout.*

Démonstration. — Par définition de H^f, H^i est proprement infinie, donc $1(\lambda)$ est infini σ-presque-partout d'après le lemme 4.1. C_{1_m} est de σ-mesure-nulle pour $m=1, 2, \ldots, \infty$ d'après le lemme 4.4. Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe II_∞ ou III σ-presque-partout. Soit $\mathfrak{M}$ une variété finie telle que $\mathfrak{M}^{\natural}=H$ (lemme 2.4), et soit $P_{\mathfrak{M}}\sim\Sigma E(\lambda)$. $E(\lambda)$ est fini σ-presque-partout (lemme 4.2), et un raisonnement déjà fait prouve que $E(\lambda)\neq 0$ σ-presque-partout (à cause de $\mathfrak{M}^{\natural}=H$). Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est σ-presque-partout de classe II_∞.

Lemme 4.8 — *Si* $H=H^{pi}$, $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* II_∞ *ou* III *σ-presque-partout.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le raisonnement de la démonstration précédente.

Nous pouvons maintenant aborder le cas général. H est sous-tendue par les variétés suivantes de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, deux à deux orthogonales (nous écrivons ∞ au lieu de $\aleph_0$) :

$$H^1,\quad H^2,\quad \ldots,\ H^\infty;\quad H^0\cap H^f;\quad H^0\cap H^i;\quad H^{pf}.$$

Reprenant la résolution de l'identité $E(\lambda)$ qui engendre $\mathbf{M}^{\natural}$, on peut supposer, au besoin en remplaçant la représentation de H avec les $H(\lambda)$ par une représentation équivalente ([5], définition 3) :

$$E(-3)-E(-4)=P_{H^{pf}};\qquad E(-2)-E(-3)=P_{H^0\cap H^i};$$
$$E(-1)-E(-2)=P_{H^0\cap H^f};\qquad E(0)-E(-1)=P_{H^\infty};$$
$$E(n)-E(n-1)=P_{H^n}\qquad \text{pour}\quad n=1,2,\ldots.$$

Soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'opérateurs engendrant $\mathbf{M}$. Soit $A_i\sim\Sigma A_i(\lambda)$ la décomposition de A_i. On peut supposer que $\mathbf{M}(\lambda)$ est l'anneau engendré par les $A_i(\lambda)$.

On a, d'après les définitions (*cf.* notamment [5], p. 422, ligne 8), $E(1)-E(0)\sim\Sigma F(\lambda)$, où $F(\lambda)=1$ pour $0<\lambda\leq 1$, $F(\lambda)=0$ pour $\lambda\leq 0$, $\lambda>1$. Donc $A_i\big(E(1)-E(0)\big)\sim\Sigma A_i(\lambda)F(\lambda)$. Si $0<\lambda\leq 1$, $A_i(\lambda)F(\lambda)=A_i(\lambda)$, de sorte que $\mathbf{M}(\lambda)$ ne change pas si l'on remplace les A_i par les $A_i\big(E(1)-E(0)\big)$. Or les $A_i\big(E(1)-E(0)\big)=A_iP_{H^1}$ engendrent $\mathbf{M}P_{H^1}$. Ainsi le facteur $\mathbf{M}(\lambda)$, pour $0<\lambda\leq 1$, ne change pas si l'on remplace $\mathbf{M}$ par $\mathbf{M}P_{H^1}$. Par suite, pour étudier la nature des $\mathbf{M}(\lambda)$ quand $0<\lambda\leq 1$, on peut supposer $H=H^1$. Un raisonnement analogue vaut pour les autres valeurs de λ, et les lemmes précédents prouvent alors que :

Si $n-1<\lambda\leq n$ $(n=1,2,\ldots)$,	$\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe	I_n.
Si $-1<\lambda\leq 0$,	$\mathbf{M}(\lambda)$ »	I_∞.
Si $-2<\lambda\leq -1$,	$\mathbf{M}(\lambda)$ »	II_1.
Si $-3<\lambda\leq -2$,	$\mathbf{M}(\lambda)$ »	II_∞.
Si $-4<\lambda\leq -3$,	$\mathbf{M}(\lambda)$ »	II_∞ ou III.

Pour résoudre le problème de mesurabilité de von Neumann ([5], p. 471), il suffit donc de se placer dans le cas où $\mathbf{M}$ est de classe purement infinie. Ceci, d'ailleurs, ne simplifie nullement la solution. Notons seulement qu'une manière plus précise, et assez naturelle, de poser le problème est la suivante : si $\mathbf{M}$ est de classe purement infinie, les $\mathbf{M}(\lambda)$ sont-ils de classe III σ-presque-partout ? Jusqu'à nouvel ordre, il pourrait arriver que tous les $\mathbf{M}(\lambda)$ soient de classe II_∞ !!

Bibliographie.

[1] J. DIXMIER, *Les anneaux d'opérateurs de classe finie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).

[2] I. KAPLANSKY, *Projections in Banach algebras* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 235-249).

[3] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).

[4] J. VON NEUMANN, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren* (*Math. Ann.*, t. 102, 1929, p. 370-427).

[5] J. VON NEUMANN, *On rings of operators. Reduction theory* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 401-485).

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DES

TREILLIS SEMI-MODULAIRES

DE LONGUEUR INFINIE

PAR M. ROBERT CROISOT.

INTRODUCTION.

On sait qu'un treillis est dit *modulaire* s'il vérifie la condition

$$x \geqq y \quad \text{entraîne} \quad (x \cap z) \cup y = x \cap (z \cup y).$$

Il est bien connu que, *dans les treillis de longueur finie*, la modularité peut être caractérisée autrement : soit par l'ensemble des deux conditions :

(2) x couvre $x \cap y$ implique $x \cup y$ couvre y

et (2'), duale de (2), soit par l'ensemble des deux conditions :

(1) x et y couvrent $x \cap y$ implique $x \cup y$ couvre x et y

et (1'), duale de (1).

La notion de treillis *semi-modulaire* de longueur finie a son origine dans l'idée d'imposer seulement la condition (2) ou la condition (1). Que l'on se place à l'un ou à l'autre point de vue, on aboutit à la même notion, les conditions (1) et (2) étant équivalentes *dans les treillis de longueur finie*. Cette notion est digne d'intérêt, car il existe des exemples importants de treillis de longueur finie semi-modulaires et non modulaires : treillis des variétés linéaires d'une géométrie affine, treillis des partitions d'un ensemble fini, treillis des sur-corps algébriquement fermés d'un corps K contenus dans un sur-corps de K de dimension finie. G. Birkhoff (*Lattice Theory*, Colloquium, 1949) a donné deux autres caractérisations des treillis semi-modulaires. En fait, *il existe*

une foule de conditions équivalentes à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie, conditions que j'introduis ici (Chap. I) et qui constituent autant de propriétés caractéristiques utiles de ces treillis. G. Birkhoff a remarqué la non-équivalence des caractérisations qu'il indique lorsqu'on les étend à des treillis qui ne sont plus de longueur finie et il demande en particulier dans son problème 44 de comparer les deux dernières caractérisations dans les treillis quelconques et dans les treillis satisfaisant à une condition de chaîne. Je résouds ce problème dans le Chapitre II en recherchant plus généralement toutes les implications binaires existant parmi les conditions introduites précédemment, successivement dans les treillis quelconques, dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante. Cette étude montre que *la notion de semi-modularité se morcelle à l'extrême dans les treillis quelconques*. Un regroupement partiel des conditions apparaît lorsqu'on se borne aux treillis satisfaisant à une condition de chaîne, regroupement différent suivant qu'il s'agit de la condition de chaîne ascendante ou de la condition de chaîne descendante.

Cette divergence considérable des divers aspects de la semi-modularité dans les treillis quelconques soulève le problème de la définition générale d'un treillis semi-modulaire. Ce problème sera repris à l'occasion d'une autre publication (¹). Son étude conduit à adopter comme *définition générale de la semi-modularité* la condition suivante, due à S. Mac Lane :

$$(5) \qquad x \cap z < y < x < x \cup z$$

entraîne l'existence de t tel que l'on ait

$$x \cap z < t \leq z \qquad \text{et} \qquad (t \cup y) \cap x = y.$$

Le Chapitre IV s'occupe de la validité des conditions examinées dans un exemple concret intervenant en Physique mathématique, celui des variétés linéaires fermées d'un espace de Hilbert.

Ce travail donne, en particulier, la solution des problèmes 44 et 47 de G. Birkhoff qu'il replace dans le cadre d'une étude beaucoup plus générale. D'autre part, il pourra être utile dans un certain nombre de questions, notamment dans la caractérisation axiomatique des exemples concrets importants de treillis semi-modulaires de longueur infinie et dans la recherche de tous les treillis vérifiant de théorème de Schreier (V. Korinek ayant montré que les seuls treillis de longueur finie vérifiant le théorème à un certain point de vue sont les treillis semi-modulaires).

La publication ci-dessus mentionnée sera consacrée à quelques applications et propriétés des notions étudiées ici.

(¹) R. Croisot [3]. (Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin du Mémoire.)

Je tiens à remercier M. Dubreil, qui m'a constamment encouragé avant et pendant l'élaboration de ce travail, et à qui je dois de précieuses suggestions. J'exprime également ma très vive reconnaissance à M. Julia et à M. Châtelet, qui ont suivi mes travaux avec une grande bienveillance.

CHAPITRE I.

Introduction d'un certain nombre de conditions équivalentes a la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

1. Conditions portant sur des chaînes extraites des treillis. — *a*. Soient x et y deux éléments d'un treillis. Envisageons $x \cap y$ et $x \cup y$.

Théorème 1. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Si une chaîne* $\{x_\iota\}$ *telle que* $x \cap y \leq x_\iota \leq x$ *est sans répétition, la chaîne* $\{x_\iota \cup y\}$ (*telle que* $y \leq x_\iota \cup y \leq x \cup y$) *est aussi sans répétition;*

2° *L'application* $x' \to x' \cup y$ *du sous-treillis* $[x \cap y, x]$ (1) *dans le sous-treillis* $[y, x \cup y]$ *est biunivoque* ($x'_1 \neq x'_2$ *entraîne* $x'_1 \cup y \neq x'_2 \cup y$);

3° *L'application* $y' \to y' \cap x$ *du second de ces sous-treillis dans le premier est une application sur;*

4° *Toute chaîne maximale* $\{x_\iota\}$ *entre* $x \cap y$ *et* x *peut être obtenue sous la forme* $x_\iota = y_\iota \cap x$ *à partir d'une chaîne* $\{y_\iota\}$ *entre* y *et* $x \cup y$;

5° *Pour tout élément* z *tel que* $x \cap y \leq z \leq x$, *on a* $(z \cup y) \cap x = z$;

6° *Le couple* (x, y) *est modulaire* (2), *ce qui signifie que, pour tout élément* z *tel que* $z \leq x$, *on a* $z \cup (y \cap x) = (z \cup y) \cap x$.

Démonstration. — Il est manifeste que 2° *entraîne* 1°.

3° *entraîne* 2° : si 2° est en défaut, il existe x'_1 et x'_2 tels que $x'_1 \cup y = x'_2 \cup y$; on a $(x'_1 \cup y) \cap x \geq x'_1$ et $(x'_2 \cup y) \cap x \geq x'_2$; x'_1 et x'_2 étant distincts, il y a au moins une de ces inégalités qui est stricte, soit par exemple $(x'_1 \cup y) \cap x > x'_1$; x'_1 ne s'écrit certainement pas sous la forme $y'_1 \cap x$ avec $y \leq y'_1 \leq x \cup y$, car on devrait avoir $y'_1 \geq x'_1$ et $y'_1 \geq y$, donc $y'_1 \geq x'_1 \cup y$ et $y'_1 \cap x \geq (x'_1 \cup y) \cap x > x'_1$; 3° est aussi en défaut.

4° *entraîne* 3° : si 3° n'est pas satisfaite, il existe un élément x' tel que $x \cap y \leq x' \leq x$ qui ne s'écrit pas sous la forme $y' \cap x$; il suffit alors de faire passer une chaîne maximale entre $x \cap y$ et x par x' pour mettre 4° en défaut.

---

(1) La notation $[a, b]$, où a et b désignent deux éléments d'un treillis tels que $a \leq b$, représente le sous-treillis convexe, ensemble des éléments u tels que $a \leq u \leq b$.

(2) Notion due à L. R. Wilcox [1].

5° *entraîne* 4° : la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ répond à la question, car $x \cap y \leq x_\iota \leq x$ implique, en vertu de 5°, $(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota$.

6° *entraîne* 5° trivialement.

1° *entraîne* 6° : supposons qu'il existe un élément z tel que 6° soit en défaut; on a $x \cap y \leq z \cup (y \cap x) < (z \cup y) \cap x \leq x$; la chaîne sans répétition $\{z \cup (y \cap x) < (z \cup y) \cap x\}$ est telle que la chaîne

$$\{[z \cup (y \cap x)] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup y\}$$

présente une répétition; 1° est en défaut.

Définition. — Lorsque ces propriétés ont lieu, pour un couple (x, y), je dis que ce couple vérifie *la propriété a*.

b. J'introduis les propriétés suivantes, analogues à 1° et 4° :

Définitions. — (x, y) vérifie *la propriété b* si, pour toute chaîne *maximale* $\{x_\iota\}$ (telle que $x \cap y \leq x_\iota \leq x$), la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ (telle que $y \leq x_\iota \cup y \leq x \cup y$) est aussi *maximale*.

(x, y) vérifie *la propriété c* si, pour toute chaîne *maximale sans répétition* $\{x_\iota\}$, la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ est aussi *maximale sans répétition*.

(x, y) vérifie *la propriété l* si, pour toute chaîne *maximale* $\{x_\iota\}$ obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \cup y$, la chaîne $\{y_\iota\}$ est *nécessairement maximale*.

(x, y) vérifie *la propriété m* si, pour toute chaîne *maximale* $\{x_\iota\}$ obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \cup y$, la chaîne $\{y_\iota\}$ *peut être choisie maximale*.

c. En analogie avec le théorème 1, on a le théorème 2 :

Théorème 2. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Si une chaîne* $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ *du produit cardinal* $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ (3) *est sans répétition, la chaîne* $\{x_\iota \cup y_\iota\}$ (*du treillis* $[x \cap y, x \cup y]$) *est aussi sans répétition;*

2° *L'application* $(x', y') \to x' \cup y'$ *de* $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ *dans* $[x \cap y, x \cup y]$ *est biunivoque;*

3° *L'application* $z' \to (z' \cap x, z' \cap y)$ *de* $[x \cap y, x \cup y]$ *dans* $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ *est une application sur;*

4° *Toute chaîne maximale* $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ *de* $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ *peut être obtenue sous la forme* $x_\iota = z_\iota \cap x$, $y_\iota = z_\iota \cap y$ *à partir d'une chaîne* $\{z_\iota\}$ *de* $[x \cap y, x \cup y]$;

---

(3) Le produit cardinal $T_1 \times T_2$ de deux treillis T_1 et T_2 est le treillis, ensemble des couples (x_1, x_2) où $x_1 \in T_1$, $x_2 \in T_2$, dans lequel on a $(x_1, x_2) \leq (x'_1, x'_2) \rightleftarrows x_1 \leq x'_1$ et $x_2 \leq x'_2$ (G. Birkhoff [1], p. 7).

5° *Pour tout élément* u *tel que* $x \cap y \leq u \leq x$ *et pour tout élément* v *tel que* $x \cap y \leq v \leq y$, *les couples* (x, v) *et* (y, u) *sont modulaires.*

Démonstration. — On voit, comme dans le théorème 1, que 2° *entraîne* 1°, 4° *entraîne* 3°, 5° *entraîne* 4° (ici, c'est la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$ qui répond à la question).

3° *entraîne* 2° : si 2° est en défaut, il existe x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 tels que $x'_1 \cup y'_1 = x'_2 \cup y'_2$ avec $(x'_1, y'_1) \neq (x'_2, y'_2)$; on a $(x'_1 \cup y'_1) \cap x \geq x'_1$, $(x'_2 \cup y'_2) \cap x \geq x'_2$, $(x'_1 \cup y'_1) \cap y \geq y'_1$, $(x'_2 \cup y'_2) \cap y \geq y'_2$; il y a donc une au moins des inégalités qui est stricte, soit par exemple $(x'_1 \cup y'_1) \cap x > x'_1$; (x'_1, y'_1) ne s'écrit certainement pas sous la forme $(z'_1 \cap x, z'_1 \cap y)$, car on devrait avoir $z'_1 \geq x'_1 \cup y'_1$, d'où $z'_1 \cap x \geq (x'_1 \cup y'_1) \cap x > x'_1$; 3° est alors en défaut.

1° *entraîne* 5° : supposons qu'il existe, par exemple, un élément v tel que 5° soit en défaut; il existe donc $w \leq x$ tel que $w \cup (v \cap x) \neq (w \cup v) \cap x$; on a alors $x \cap y \leq w \cup (v \cap x) < (w \cup v) \cap x \leq x$ et la chaîne sans répétition $\{(w \cup (v \cap x), v) < ((w \cup v) \cap x, v)\}$ est telle que la chaîne

$$\{w \cup (v \cap x) \cup v = [(w \cup v) \cap x] \cup v\}$$

présente une répétition; 1° est en défaut.

Définition. — Lorsque ces propriétés ont lieu pour un couple (x, y), je dis que ce couple vérifie *la propriété d.*

d. J'introduis les propriétés suivantes, analogues aux propriétés 1° et 4° du théorème 2 :

Définitions. — (x, y) vérifie *la propriété f* si, pour toute chaîne *maximale* $\{(x_i, y_i)\}$ du treillis $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$, la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$ est aussi *maximale.*

(x, y) vérifie *la propriété g* si, pour toute chaîne *maximale sans répétition* du treillis $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$, la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$ est aussi *maximale sans répétition.*

(x, y) vérifie *la propriété i* si, pour toute chaîne *maximale* $\{(x_i, y_i)\}$ du treillis $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ obtenue sous la forme $x_i = z_i \cap x$, $y_i = z_i \cap y$ à partir d'une chaîne $\{z_i\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, la chaîne $\{z_i\}$ est *nécessairement maximale.*

(x, y) vérifie *la propriété j* si, dans les mêmes conditions, la chaîne $\{z_i\}$ *peut être choisie maximale.*

e. En analogie avec les théorèmes 1 et 2, on a le théorème 3 :

THÉORÈME 3. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Si une chaîne* $\{z_\iota\}$ *du treillis* $[x \cap y,\ x \cup y]$ *est sans répétition, la chaîne* $\{(z_\iota \cup x,\ z_\iota \cup y)\}$ *du treillis* $[x,\ x \cup y] \times [y,\ x \cup y]$ *est aussi sans répétition;*

2° *L'application* $z' \to (z' \cup x,\ z' \cup y)$ *du premier treillis dans le second est biunivoque;*

3° *L'application* $(x',\ y') \to x' \cap y'$ *du second treillis dans le premier est une application sur;*

4° *Toute chaîne maximale* $\{z_\iota\}$ *du premier treillis peut être obtenue sous la forme* $z_\iota = x_\iota \cap y_\iota$ *à partir d'une chaîne* $\{(x_\iota,\ y_\iota)\}$ *du second treillis;*

5° *Le couple* $(x,\ y)$ *est* $\cap$*-distributif, ce qui signifie que, pour tout élément* z *tel que* $z \leq x \cup y$, *on a* $z \cup (x \cap y) = (z \cup x) \cap (z \cup y)$.

Démonstration. — On voit, comme dans le théorème 1, que 2° *entraîne* 1°, 4° *entraîne* 3°, 5° *entraîne* 4° (ici, c'est la chaîne $\{(z_\iota \cup x,\ z_\iota \cup y)\}$ qui convient).

3° *entraîne* 2° : si 2° est en défaut, il existe z'_1 et z'_2 tels que $z'_1 \cup x = z'_2 \cup x$ et $z'_1 \cup y = z'_2 \cup y$; on a $(z'_1 \cup x) \cap (z'_1 \cup y) \geq z'_1$ et $(z'_2 \cup x) \cap (z'_2 \cup y) \geq z'_2$; l'une au moins de ces inégalités est stricte, soit par exemple $(z'_1 \cup x) \cap (z'_1 \cup y) > z'_1$; z'_1 ne s'écrit certainement pas sous la forme $x'_1 \cap y'_1$, car on devrait avoir $x'_1 \geq z'_1$, $y'_1 \geq z'_1$, d'où $x'_1 \geq z'_1 \cup x$, $y'_1 \geq z'_1 \cup y$ et $x'_1 \cap y'_1 \geq (z'_1 \cup x) \cap (z'_1 \cup y) > z'_1$; 3° est donc en défaut.

1° *entraîne* 5° : supposons qu'il existe un élément z tel que 5° soit en défaut; on a $x \cap y \leq z \cup (x \cap y) \neq (z \cup x) \cap (z \cup y) \leq x \cup y$; la chaîne sans répétition $\{z \cup (x \cap y) < (z \cup x) \cap (z \cup y)\}$ est telle que la chaîne

$$\{[z \cup (x \cap y) \cup x,\ z \cup (x \cap y) \cup y] = ([(z \cup x) \cap (z \cup y)] \cup x,\ [(z \cup x) \cap (z \cup y)] \cup y)\}$$

présente une répétition; 1° est en défaut.

Définition. — Lorsque ces propriétés ont lieu pour un couple $(x,\ y)$, je dis que ce couple vérifie *la propriété e.*

f. J'introduis les propriétés suivantes analogues aux propriétés 1° et 4° du théorème 3 :

Définitions. — $(x,\ y)$ vérifie *la propriété p* si, pour toute chaîne *maximale* $\{z_\iota\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, la chaîne $\{(z_\iota \cup x,\ z_\iota \cup y)\}$ du produit cardinal $[x,\ x \cup y] \times [y,\ x \cup y]$ est aussi *maximale.*

$(x,\ y)$ vérifie *la propriété q* si, pour toute chaîne *maximale sans répétition* $\{z_\iota\}$, la chaîne $\{(z_\iota \cup x,\ z_\iota \cup y)\}$ est aussi *maximale sans répétition.*

$(x,\ y)$ vérifie *la propriété r* si, pour toute chaîne *maximale* $\{z_\iota\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$ obtenue sous la forme $z_\iota = x_\iota \cap y_\iota$ à partir d'une chaîne $\{(x_\iota,\ y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x,\ x \cup y] \times [y,\ x \cup y]$, la chaîne $\{(x_\iota,\ y_\iota)\}$ est *nécessairement maximale.*

$(x,\ y)$ vérifie *la propriété s* si, dans les mêmes conditions, la chaîne $\{(x_\iota,\ y_\iota)\}$ *peut être choisie maximale.*

g. Une grande partie des conditions examinées par la suite sont alors formées de la manière suivante : .

Par exemple, je dirai qu'un treillis vérifie la condition (A) si chaque couple d'éléments (x, y) vérifie la propriété *a*.

On obtient ainsi les conditions (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (I), (J), (L), (M), (P), (Q), (R), (S) ([4]).

Je dirai aussi, par exemple, qu'un treillis vérifie la condition (α) si le couple d'éléments (x, y) vérifie la propriété *a* dès qu'il en est ainsi du couple d'éléments (y, x).

On obtient ainsi les conditions (α), (β), (γ), (λ), (μ) ([5]).

Ces conditions complètent d'une façon assez naturelle la condition (F) et la condition (α) ([6]).

h. Les théorèmes suivants permettent d'exprimer les conditions (M) et (S) sous une forme en apparence plus forte.

THÉORÈME 4. — *La condition* (M) *équivaut à la condition suivante :*

(M_1) *Pour tout couple d'éléments* (x, y), *si une chaîne* $\{x_\iota\}$ *maximale entre* $x \cap y$ *et* x *est telle que l'on ait* $(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota$ *pour tout* ι, *la chaîne* $\{x_\iota \cup y\}$ *est maximale entre* y *et* $x \cup y$.

Démonstration. — D'abord, (M_1) entraîne (M). En effet, si, pour un couple (x, y), une chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \cap y$ et x est obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \cup y$, on a $x_\iota \leqq y_\iota$, d'où $x_\iota \cup y \leqq y_\iota$ et $(x_\iota \cup y) \cap x \leqq y_\iota \cap x = x_\iota$; puisqu'on a évidemment $x_\iota \leqq (x_\iota \cup y) \cap x$, on en déduit $(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota$, pour tout ι. La chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ étant maximale d'après (M_1), la chaîne $\{y_\iota\}$ peut être choisie maximale et (M) est vérifiée.

On a également : (M) entraîne (M_1). En effet, supposons que (M_1) soit en défaut. Il existe un couple (x, y) et une chaîne $\{x_\iota\}$ qu'on peut supposer sans répétition, maximale entre $x \cap y$ et x, telle que l'on ait $(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota$ pour tout ι et telle que la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ ne soit pas maximale entre y et $x \cup y$. Soit u un élément qu'on puisse intercaler dans la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$. La chaîne

([4]) Les conditions (A), (C), (D), (E), (G), (P), (Q) ne caractérisent pas la semi-modularité dans les treillis de longueur finie. Elles sont introduites ici en raison de leur analogie avec les autres conditions. D'ailleurs, les conditions (A), (C), (D), (E), (G), (Q) seront exploitées dans R. CROISOT [3], Chap. I.

([5]) De même, les conditions (λ) et (μ) ne répondent pas à la question posée ici.

([6]) La condition (F) est la condition (γ) de G. BIRKHOFF [1], p. 101. La condition (α) est la condition (α), p. 101.

$\{x_i\}$ étant maximale, l'élément $u \cap x$ en fait partie. Posons $u \cap x = a$, $a \cup y = b$ et envisageons le couple (x, b). On a $x \cap b = a$ et $x \cup b = x \cup y$. La chaîne $\{x_i\}$, où l'on n'accepte que les éléments x_i tels que $x_i \geq a$ est maximale entre a et x. Elle est obtenue à partir de la chaîne $\{x_i \cup b = x_i \cup y\}$ entre b et $x \cup y$. Mais, elle ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale $\{y_i\}$ car, pour toute chaîne réalisant cette obtention, on a $y_i \geq x_i \cup b = x_i \cup y > u$ pour tout i tel que $x_i > a$ et l'élément u peut être intercalé dans la chaîne $\{y_i\}$ au-dessus du premier élément. Le couple (x, b) ne possède donc pas la propriété m et la condition (M) est en défaut.

Théorème 5. — *La condition* (S) *équivaut à la condition suivante :*

(S_1) *Pour tout couple d'éléments* (x, y), *si une chaîne* $\{z_i\}$ *maximale entre* $x \cap y$ *et* $x \cup y$ *est telle que* $z_i = (z_i \cup x) \cap (z_i \cup y)$ *pour tout* i, *la chaîne* $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$ *est maximale dans le produit cardinal* $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$.

Démonstration. — On voit d'abord, comme dans la démonstration du théorème 4, que (S_1) entraîne (S).

De même, (S) entraîne (S_1). En effet, si (S_1) est en défaut, il existe un couple (x, y) et une chaîne $\{z_i\}$ qu'on peut supposer sans répétition, maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$, telle que l'on ait $z_i = (z_i \cup x) \cap (z_i \cup y)$ pour tout i et telle que la chaîne $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$ ne soit pas maximale dans le produit cardinal $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$. Soit (u, v) un élément qu'on puisse intercaler dans la chaîne $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$. La chaîne $\{z_i\}$ étant maximale, l'élément $u \cap v$ en fait partie. Posons $u \cap v = c$, $c \cup x = a$, $c \cup y = b$ et envisageons le couple (a, b). On a $a \cap b = c$ et $a \cup b = x \cup y$. La chaîne $\{z_i\}$, où l'on n'accepte que les éléments z_i tels que $z_i \geq c$ est maximale entre c et $x \cup y$, elle est obtenue à partir de la chaîne $\{(z_i \cup a, z_i \cup b)\}$. Mais elle ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale $\{(x_i, y_i)\}$ car, pour toute chaîne réalisant cette obtention, on a $x_i \geq z_i \cup a = z_i \cup x \geq u$ pour tout i tel que $z_i > c$, et de même $y_i \geq z_i \cup b = z_i \cup y \geq v$, avec, de plus $(z_i \cup x, z_i \cup y) \neq (u, v)$, d'où $(x_i, y_i) > (u, v)$; l'élément (u, v) peut être intercalé dans la chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ au-dessus du premier élément. Le couple (a, b) ne possède donc pas la propriété s et la condition (S) est en défaut.

i. A la condition (J), on peut de même associer la condition suivante :

(J_1) *Pour tout couple d'éléments* (x, y), *si une chaîne* $\{(x_i, y_i)\}$ *maximale dans le produit cardinal* $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ *est telle que l'on ait* $x_i = (x_i \cup y_i) \cap x$ *et* $y_i = (x_i \cup y_i) \cap y$ *pour tout* i, *la chaîne* $\{x_i \cup y_i\}$ *est maximale entre* $x \cap y$ *et* $x \cup y$ (7).

(7) Notons, dès maintenant, que la condition (J) est strictement plus faible que la condition (J_1). On voit aisément que (J_1) entraîne (J) et le treillis B2 du Chapitre II montre que (J) n'entraîne pas (J_1) [prendre le couple (c, a_1) et la chaîne $\{(a, a) < \ldots < (a, a_i) < \ldots < (c, a_1)\}$].

2. Conditions portant sur des propriétés de couverture et des propriétés algébriques. — *a*. J'examinerai aussi les conditions suivantes :

(1) x et y couvrent $x \cap y \Rightarrow x \cup y$ couvre x et y ([8]).

(2) x couvre $x \cap y \Rightarrow x \cup y$ couvre y ([9]).

(3) x couvre y, et z couvre $t \Rightarrow [(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$.

(5) $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$ il existe t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $(x \cup t) \cap z = x$ ([10]).

(6) $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$ il existe t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $(x \cup t) \cap z < z$ ([11]).

b. Le théorème suivant permet d'exprimer la condition (2) sous deux autres formes équivalentes :

Théorème 6. — *La condition* (2) *équivaut à l'une ou l'autre des conditions :*

(2*b*) *x couvre $x \cap y$ et $z \geq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$* ([12]).

(2*c*) *x couvre $x \cap z$ et $z \geq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$.*

Démonstration. — On a d'abord (2) $\Rightarrow$ (2*c*); supposons que la condition (2) soit

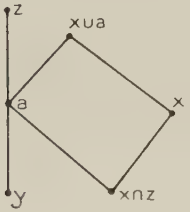


Fig. 1.

([8]) Condition (ξ'), G. Birkhoff [1], p. 66.

([9]) Condition (2), G. Birkhoff [1], p. 100, ou condition E_3, S. Mac Lane [1].

([10]) C'est la condition E_5 de S. Mac Lane [1].

([11]) C'est la condition E_6 de S. Mac Lane [1].

([12]) Cette condition m'a été inspirée par une remarque de L. Lesieur, selon laquelle, dans une géométrie affine, l'égalité modulaire a lieu dès que x est un point. Il est facile de voir que (2*b*)

Fig. 2.

renforce cette condition (qui ne suffit pas comme le montre le diagramme ci-contre à caractériser la semi-modularité dans un treillis de longueur finie quelconque).

satisfaite et que x couvre $x \cap z$ avec $z \geqq y$; on a toujours $z \cap (x \cup y) \geqq (z \cap x) \cup y$; posons $a = (z \cap x) \cup y$; on a $x \cap a \leqq x \cap z$ et $x \cap a \geqq x \cap z$; d'où $x \cap a = x \cap z$; donc, d'après (2) et l'hypothèse, $x \cup a$ couvre a; de $a \leqq x \cup y \leqq x \cup a$ et de $a \neq x$, on déduit $x \cup y = x \cup a$; enfin, de $x \neq x \cap z$, on déduit $z \neq x \cup a$ et $z \cap (x \cup y) = z \cap (x \cup a) = a$.

On a $(2c) \Rightarrow (2b)$; en effet, si x couvre $x \cap y$ et si l'on a $z \geqq y$, du fait que l'on a $x \geqq x \cap z \geqq x \cap y$, on déduit ou bien $x = x \cap z$, c'est-à-dire $z \geqq x$, auquel cas l'égalité à établir est évidente, ou bien x couvre $x \cap z$, auquel cas l'égalité à établir résulte de $(2c)$.

Enfin, on a $(2b) \Rightarrow (2)$; en effet, si (2) est en défaut, il existe deux éléments x et y tels que x couvre $x \cap y$ et $x \cup y$ ne couvre pas y; choisissons un élément z tel que $y < z < x \cup y$; on a alors $z \cap (x \cup y) = z$ et $(z \cap x) \cup y = (x \cap y) \cup y = y$; $(2b)$ est aussi en défaut.

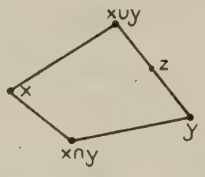


Fig. 3.

De là, résulte l'équivalence de la propriété (2) et de l'une ou l'autre des conditions de modularité affaiblie $(2b)$ et $(2c)$.

c. On sait que la condition (6) peut s'exprimer sous la forme équivalente :

$(6a)$ $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$ il existe t tel que

$$y \cap z < t \leqq y \quad \text{et} \quad (x \cup t) \cap z < z \quad (^{13}).$$

De la même façon, le théorème suivant donne une forme équivalente à la condition (5) :

Théorème 7. — *La condition* (5) *équivaut à la condition :*

$(5a)$ $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$ *il existe t tel que* $y \cap z < t \leqq y$ *et* $(x \cup t) \cap z = x$.

Démonstration. — On a $(5) \Rightarrow (5a)$; en effet, si l'hypothèse de $(5a)$ est vérifiée, celle de (5) l'est également et la conclusion commune est vraie.

On a $(5a) \Rightarrow (5)$; supposons vérifiée l'hypothèse de (5); si $y \cup x = y \cup z$, celle de $(5a)$ est aussi vérifiée et la propriété a lieu; sinon, on a $y \cup x \neq z$

---

(13) C'est la condition E_7 de S. Mac Lane [1]. L'équivalence est établiep. 465.

et $(y \cup x) \cap z = z_1 < z$; si l'on a $z_1 = x$, la propriété a lieu en prenant $t = y$; sinon, les trois éléments x, y, z_1 satisfont à l'hypothèse de $(5a)$; il existe donc t_1 tel que $y \cap z = y \cap z_1 < t_1 \leq y$ et $(x \cup t_1) \cap z_1 = x$; or, on a

$(x \cup t_1) \cap z < (x \cup y) \cap z = z_1$, d'où $(x \cup t_1) \cap z = (x \cup t_1) \cap z \cap z_1 = (x \cup t_1) \cap z_1 = x$;

la propriété a lieu en prenant $t = t_1$.

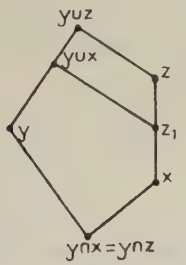


Fig. 4.

3. Conditions portant sur les treillis d'idéaux. — Un treillis de longueur finie est isomorphe à la fois au treillis de ses idéaux et au treillis de ses idéaux duaux (14). Il en résulte que, si (X) représente une des conditions précédentes équivalente à la semi-modularité dans un treillis de longueur finie, la condition (X_i), condition (X) imposée au treillis des idéaux et la condition (X^i), condition (X) imposée au treillis des idéaux duaux, possèdent la même propriété. Le procédé peut évidemment être itéré.

Je n'étudie pas ici toutes les conditions (X^i), mais seulement les conditions (α^i), (2^i), (1^i) choisies parmi celles qui renforcent la condition (X) correspondante (15).

De même, je me limite aux conditions (α_i), (2_i), (1_i).

4. Autres conditions. — Il existe encore un grand nombre de conditions caractérisant la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

a. Citons, par exemple, les conditions suivantes, entraînées par la condition (B) et entraînant la condition (2) :

(B_1) Pour tout couple (x, y) et pour toute chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \cap y$ et x, il existe une chaîne $\{y_\iota\}$ maximale entre y et $x \cup y$ telle que l'on ait $y_\iota \geq x_\iota$ pour tout ι.

(B_2) Pour tout couple (x, y), il existe une chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \cap y$ et x telle que la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ soit maximale entre y et $x \cup y$.

---

(14) Pour les définitions, voir G. Birkhoff [1], p. 21.

(15) En fait, la plupart des autres conditions (X^i) ne renforcent pas la condition (X) correspondante : le treillis B11 du Chapitre II satisfait, en effet, à toutes les conditions (X^i) et seulement aux conditions (α), (2), (1), (5), (6), (3), parmi les conditions (X).

(B_3) Pour tout couple (x, y), il existe une chaine $\{x_i\}$ maximale sans répétition entre $x \cap y$ et x et une chaine $\{y_i\}$ maximale ([16]) entre y et $x \cup y$ telles que l'on ait $y_i \geqq x_i$ pour tout i.

(B_4) Pour tout couple (x, y) et pour toute chaine $\{x_i\}$ maximale entre $x \cap y$ et x, il existe une chaine $\{y_i\}$ maximale entre y et $x \cup y$ telle que l'on ait $y_i \leqq x_i \cup y$ pour tout i.

(B_5) Pour tout couple (x, y), il existe une chaine $\{x_i\}$ maximale sans répétition entre $x \cap y$ et x et une chaine $\{y_i\}$ maximale ([16]) entre y et $x \cup y$ telles que l'on ait $y_i \leqq x_i \cup y$ pour tout i.

(B_6) Pour tout couple (x, y) et pour toute chaine $\{x_i\}$ maximale entre $x \cap y$ et x, il existe une chaine $\{y_i\}$ maximale entre y et $x \cup y$ (isomorphe à la chaine $\{x_i\}$).

(B_7) Pout tout couple (x, y), il existe une chaine $\{x_i\}$ maximale sans répétition entre $x \cap y$ et x et une chaine $\{y_i\}$ maximale ([16]) entre y et $x \cup y$.

Ces conditions ne sont pas étudiées ici.

b. Notons aussi la condition (B) (que nous n'étudierons pas non plus en détail) qui renforce également la condition (B) à un autre point de vue et qui est remarquable par le fait suivant : Bien que caractérisant la semi-modularité dans les treillis de longueur finie, elle n'est pas conséquence, dans les treillis quelconques, d'une propriété considérablement plus forte, la distributivité ([17]).

Cette condition est la suivante :

(B) Soient trois éléments a, b, c tels que l'on ait $a \leqq b$. Pour toute chaine $\{x_i\}$ maximale entre a et b, la chaine $\{x_i \cup c\}$ est maximale entre $a \cup c$ et $b \cup c$.

Un treillis semi-modulaire de longueur finie satisfait à cette condition. Il suffit de le montrer pour des éléments tels que l'on ait $a \leqq c$ (dans le cas général, on peut remplacer c par $a \cup c$). Si l'on a $b \cup c = a$, le résultat traduit directement la condition (B). Sinon, il sera conséquence de la condition (B) et du fait suivant : la chaine $\{(b \cap c) \cup x_i\}$ est maximale entre $b \cap c$ et b. Pour établir ce fait, appelons $x_1 = a$, x_2, x_3, ..., $x_n = b$ les éléments de la chaine $\{x_i\}$. Si l'on a $x_2 \leqq b \cap c$, on a $(b \cap c) \cup x_2 = b \cap c$; sinon, on a $(b \cap c) \cap x_2 = x_1$ et, puisque x_2 couvre x_1, $(b \cap c) \cup x_2$ couvre $b \cap c$, d'après la condition (2). D'une façon générale, si l'on a $x_i \leqq (b \cap c) \cup x_{i-1}$, on a $(b \cap c) \cup x_i = (b \cap c) \cup x_{i-1}$; sinon on a $[(b \cap c) \cup x_{i-1}] \cap x_i = x_{i-1}$ et,

([16]) Pouvant présenter des répétitions.

([17]) Parmi les conditions étudiées, la condition (I) présente une singularité du même ordre, quoique moins forte : elle n'est pas conséquence de la modularité dans les treillis quelconques (*voir* R. CROISOT [3], Chap. I).

puisque x_i couvre x_{i-1}, $(b \cap c) \cup x_i$ couvre $(b \cap c) \cup x_{i-1}$. La chaîne $\{(b \cap c) \cup x_i\}$ est donc bien maximale et le résultat est démontré.

Un treillis distributif ne satisfait pas nécessairement à la condition $(\overline{B})$ comme le montre le diagramme ci-dessous.

Il représente manifestement un treillis (complet) satisfaisant à la condition de chaîne ascendante. Ce treillis est distributif et ne satisfait pas à la condition (B) (il suffit de prendre a, b, c comme indiqué sur le diagramme).

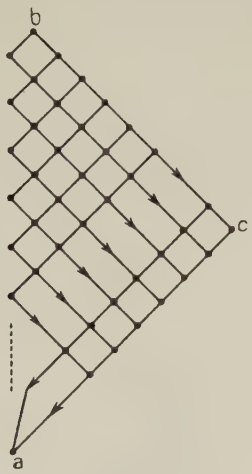


Fig. 5.

CHAPITRE II.

Implications binaires reliant ces conditions dans les treillis quelconques et dans les treillis satisfaisant a une condition de chaine.

1. Treillis quelconques ([18]).

Theorème 1. — *Dans les treillis quelconques, les conditions étudiées sont liées par les implications binaires indiquées dans le tableau suivant (fig. 6) et par leurs conséquences logiques, à l'exclusion de toute autre.*

a. Démonstration de ces implications. — 1° $(R) \Rightarrow (S)$: Supposons qu'un couple (x, y) d'éléments d'un treillis vérifie la propriété r, c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale $\{z_i\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$ obtenue sous la forme $z_i = x_i \cap y_i$ à partir d'une chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ du produit cardinal $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$, la chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ *soit nécessairement maximale.*

([18]) Il sera montré plus loin, au Chapitre III, que ces conditions caractérisent la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

Il est alors évident que ce couple (x, y) vérifie aussi la propriété s, c'est-à-dire que, dans les mêmes conditions, la chaine $\{(x_i, y_i)\}$ *peut être choisie maximale*. Il en résulte immédiatement que (R) entraîne (S).

2° (R)$\Rightarrow$(L) : On sait que, par définition, un couple (x, y) d'éléments d'un treillis vérifie la propriété l si, pour toute chaîne maximale $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x obtenue sous la forme $x_i = y_i \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$, la chaîne $\{y_i\}$ *est nécessairement maximale*. Supposons alors qu'un couple (x, y) vérifie la propriété r et montrons qu'il vérifie aussi la propriété l. Soit $\{x_i\}$ une chaîne maximale entre $x \cap y$ et x obtenue à partir

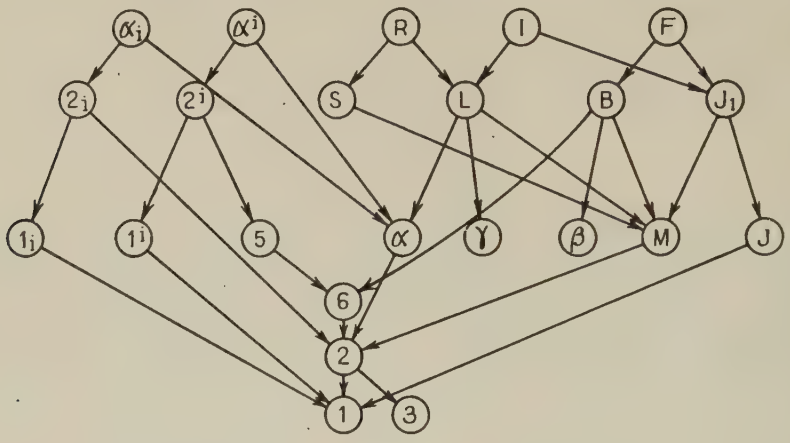


Fig. 6.

d'une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$. Envisageons une chaîne maximale quelconque $\{u_\alpha\}$ entre x exclus et $x \cup y$. La chaîne $\{z_\beta\} : \{x_i < u_\alpha\}$ [19] est maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$ et elle est obtenue sous la forme $z_\beta = x_\beta \cap y_\beta$ à partir de la chaîne $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x, y_i) < (u_\alpha, x \cup y)\}$ du produit cardinal $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$. Le couple (x, y) vérifiant la propriété r, cette chaîne est maximale et, en particulier, la chaîne $\{y_i\}$ est maximale entre y et $x \cup y$. On déduit immédiatement de là (R)$\Rightarrow$(L).

3° (I) $\Rightarrow$(L) : Soit un couple (x, y) vérifiant la propriété i, c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale $\{(x_i, y_i)\}$ du produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ obtenue sous la forme $x_i = z_i \cap x$, $y_i = z_i \cap y$ à partir d'une chaîne $\{z_i\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, la chaîne $\{z_i\}$ *est nécessairement maximale*. Montrons que ce couple (x, y) vérifie aussi la propriété l. Soit $\{x_i\}$ une chaîne maximale entre $x \cap y$ et x obtenue sous la forme $x_i = y_i \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$. Envisageons une chaîne maximale quelconque $\{u_\alpha\}$ entre $x \cap y$

[19] $\{x_i < u_\alpha\}$ désigne la chaîne obtenue en juxtaposant les chaînes $\{x_i\}$ et $\{u_\alpha\}$.

et y exclus. La chaîne $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x \cap y, u_\alpha) < (x_\iota, y)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ et elle est obtenue sous la forme $x_\beta = z_\beta \cap x$, $y_\beta = z_\beta \cap y$ à partir de la chaîne $\{z_\beta\} : \{u_\alpha < y_\iota\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$. Le couple (x, y) vérifiant la propriété i, cette chaîne est maximale et, en particulier, la chaîne $\{y_\iota\}$ est maximale entre y et $x \cup y$. On voit donc que (I) entraîne (L).

4° (I) $\Rightarrow$ (J_1) : Un treillis satisfait à la condition (J_1) si, pour tout couple (x, y) et pour toute chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal

$$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y],$$

obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \cap x$, $y_\iota = z_\iota \cap y$ à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, la chaîne $\{x_\iota \cup y_\iota\}$ est maximale. Cette dernière chaîne pouvant être prise comme chaîne $\{z_\iota\}$, ceci a lieu dès que le couple (x, y) vérifie la propriété i et, par conséquent, on a (I) $\Rightarrow$ (J_1).

5° (F) $\Rightarrow$ (B) : Supposons qu'un couple (x, y) vérifie la propriété f, c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal

$$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y],$$

la chaîne $\{x_\iota \cup y_\iota\}$ soit maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$. Montrons qu'il vérifie aussi la propriété b, c'est-à-dire que, pour toute chaîne maximale $\{x_\iota\}$ entre $x \cap y$ et x, la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ est maximale. En effet, soit une chaîne maximale $\{x_\iota\}$ entre $x \cap y$ et x et soit une chaîne maximale quelconque $\{u_\alpha\}$ entre $x \cap y$ et y. La chaîne $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x \cap y, u_\alpha) \leq (x_\iota, y)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$, La propriété f étant vérifiée, la chaîne $\{x_\beta \cup y_\beta\}$ est maximale et, en particulier, la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ est maximale entre y et $x \cup y$. On a donc (F) $\Rightarrow$ (B).

6° (F) $\Rightarrow$ (J_1) : Cette implication est triviale.

7° (S) $\Rightarrow$ (M) : Un couple (x, y) vérifie la propriété m si, pour toute chaîne maximale $\{x_\iota\}$ entre $x \cap y$ et x obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \cup y$, la chaîne $\{y_\iota\}$ *peut être choisie maximale*. Si un couple (x, y) vérifie la propriété s, il vérifie la propriété m. En effet, soit $\{x_\iota\}$ une chaîne maximale (sans répétition) entre $x \cap y$ et x obtenue à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \cup y$ et soit une chaîne maximale quelconque $\{u_\alpha\}$ entre x et $x \cup y$. La chaîne $\{z_\beta\} : \{x_\iota < u_\alpha\}$ est maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$ et est obtenue sous la forme $z_\beta = x_\beta \cap y_\beta$ à partir de la chaîne $\{(x_\beta, y_\beta)\} : \{(x, y_\iota) \leq (u_\alpha, x \cup y)\}$ du produit cardinal

$$[x, x \cup y] \times [y, x \cup y].$$

Le couple vérifiant la propriété s, on peut choisir la chaîne $\{(x_\beta, y_\beta)\}$ pour qu'elle soit maximale entre (x, y) et $(x \cup y, x \cup y)$. Faisons ce choix.

L'élément x appartient à la chaîne $\{z_3\}$: c'est le dernier élément de la chaîne $\{x_i\}$; il ne peut être obtenu sous la forme $x_3 \cap y_3$ qu'en prenant $y_3 = x \cup y$ et $x_3 = x$. Les éléments précédents de la chaîne $\{z_3\}$, c'est-à-dire les éléments précédant x dans la chaîne $\{x_i\}$ sont donc obtenus en prenant $x_3 \leqq x$, donc $x_3 = x$ et la chaîne $\{(x_3, y_3) = (x, y_3)\}$ relative à ces éléments est maximale entre (x, y) et $(x, x \cup y)$; autrement dit, la chaîne $\{y_3\}$ relative à ces éléments est maximale entre y et $x \cup y$ et peut être prise comme chaîne $\{y_i\}$; le couple (x, y) vérifie la propriété m et l'on a $(S) \Rightarrow (M)$. [On peut aussi établir un peu plus rapidement que (S_1) implique (M_1)].

8° $(L) \Rightarrow (\alpha)$: Plaçons-nous dans un treillis qui satisfait à la condition (L) et envisageons un couple (x, y) d'éléments du treillis vérifiant la propriété a, c'est-à-dire que tout élément x' tel que $x \cap y \leqq x' \leqq x$ s'écrit sous la forme $x' = y' \cap x$, où y' est tel que $y \leqq y' \leqq x \cup y$. Il faut montrer que le couple (y, x) vérifie

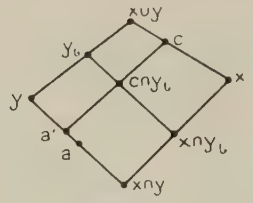


Fig. 7.

aussi la propriété a. Pour l'établir, nous utiliserons seulement le fait [qui a lieu puisque le couple (x, y) vérifie a] qu'il existe une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$ telle que la chaîne $\{x \cap y_i\}$ soit maximale entre $x \cap y$ et x [20]. Supposons, avec cette hypothèse, qu'il existe un élément a tel que $x \cap y \leqq a \leqq x$ ne se mettant pas sous la forme $a = b \cap y$ avec $x \leqq b \leqq x \cup y$. Posons $a \cup x = c$. On a $c \cap y \geqq a$ et $c \cap y \neq a$. Posons $c \cap y = a'$. Montrons que, moyennant cette supposition, le couple (x, a) ne peut vérifier la propriété l. On a d'abord $a \cup x = c$, $a \cap x = x \cap y$. D'autre part, la chaîne $\{c \cap y_i\}$ est une chaîne entre a' et c; c'est donc aussi une chaîne entre a et c et certainement non maximale entre a et c. Pourtant, elle donne une chaîne maximale $\{x \cap c \cap y_i = x \cap y_i\}$ entre $x \cap y$ et x. Il en résulte que la supposition faite n'est pas légitime; donc, le couple (y, x) vérifie a et l'on a $(L) \Rightarrow (\alpha)$.

9° $(L) \Rightarrow (\gamma)$: Montrons d'abord que, dans un treillis satisfaisant à la condition (L), un couple d'éléments (x, y) qui vérifie la propriété a, vérifie également la propriété b, c'est-à-dire que toute chaîne maximale $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x

---

[20] Cette démonstration établit que la condition (L) entraîne la condition suivante [qui entraîne manifestement la condition (α)] : Si, pour un couple (x, y), il existe une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$ telle que la chaîne $\{x \cap y_i\}$ soit maximale entre $x \cap y$ et x, le couple (y, x) est modulaire.

donne une chaîne maximale $\{y \cup x_i\}$ entre y et $x \cup y$. Pour établir ce point, supposons que le couple (x, y) d'éléments d'un treillis satisfasse à la propriété a et non à la propriété b. Il existe donc une chaîne maximale $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x telle que la chaîne $\{x_i \cup y\}$ ne soit pas maximale. Or, la propriété a ayant lieu, on a, pour tout élément x_i, $(x_i \cup y) \cap x = x_i$. Il en résulte que la chaîne non maximale $\{x_i \cup y\}$ entre y et $x \cup y$ conduit à la chaîne maximale $\{(x_i \cup y) \cap x\}$, ce qui prouve que le couple (x, y) ne vérifie pas la propriété l.

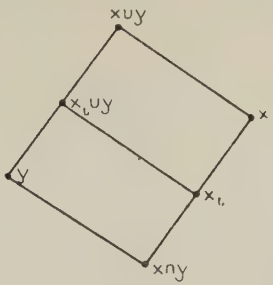


Fig. 8.

D'autre part, pour un couple (x, y), vérifier la propriété c (toute chaîne maximale sans répétition $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x conduit à une chaîne maximale sans répétition $\{x_i \cup y\}$ entre y et $x \cup y$) équivaut à vérifier simultanément les propriétés a et b. En effet, si les propriétés a et b ont lieu, il est évident que la propriété c a lieu (en utilisant la forme 1° de la propriété a). Réciproquement, supposons que la propriété c ait lieu; alors, une chaîne maximale $\{x_i\}$ donne une chaîne maximale $\{x_i \cup y\}$ (on supprime les répétitions éventuelles pour appliquer la propriété c, la chaîne $\{x_i \cup y\}$ reste maximale lorsqu'on les rétablit) et la propriété b a lieu; de même, une chaîne sans répétition $\{x_i\}$ donne une chaîne sans répétition $\{x_i \cup y\}$ (on rend la chaîne $\{x_i\}$ maximale pour appliquer la propriété c, la chaîne $\{x_i \cup y\}$ reste sans répétition quand on supprime les éléments introduits) et la propriété a a lieu.

Le rapprochement de ces remarques montre que $(L) \Rightarrow (\gamma)$. En effet, si la condition (L) est vérifiée et si un couple (x, y) satisfait à la propriété c, il satisfait à la propriété a. Le couple (y, x) satisfait à la propriété a, puisque $(L) \Rightarrow (\alpha)$; il satisfait donc aussi à la propriété b et, par conséquent, à la propriété c. La condition (γ) est vérifiée.

10° $(L) \Rightarrow (M)$: Il est évident qu'un couple (x, y) satisfait à la propriété m dès qu'il satisfait à la propriété l. On a donc $(L) \Rightarrow (M)$.

11° $(B) \Rightarrow (6)$: Supposons que la condition (6) soit en défaut. Il existe, d'après le théorème 7 du Chapitre I, trois éléments x, y, z tels que $y \cap z = y \cap x < x < z < y \cup x = y \cup z$ et tels que, pour tout élément t vérifiant $y \cap x < t \leq y$, on ait $t \cup x \geq z$. On voit immédiatement que la condition (B)

est en défaut : le couple (y, x) ne vérifie pas la propriété b. En effet, n'importe quelle chaîne maximale $\{y_\iota\}$ entre $y \cap x$ et y donne une chaîne $\{y_\iota \cup x\}$ non maximale, car on peut y intercaler l'élément z (aucun élément $y_\iota > y \cap x$ ne peut être tel que $y_\iota \cup x = z$, puisque $y \cap x = y \cap z$).

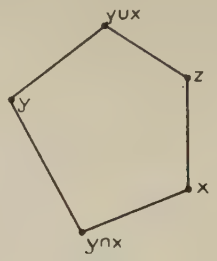


Fig. 9.

12° (B)$\Rightarrow$(β) : Cette propriété est évidente.

13° (B)$\Rightarrow$(M) : Cette implication est triviale si l'on utilise (M) sous la forme équivalente (M_1).

14° $(J_1)\Rightarrow$(M) : Supposons que (J_1) ait lieu et montrons qu'il en est de même de (M_1). Soient deux éléments x et y tels qu'il existe une chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \cap y$ et x avec $x_\iota = (x_\iota \cup y) \cap x$ pour tout ι. Envisageons une chaîne $\{u_\alpha\}$ maximale entre $x \cap y$ et y et considérons la chaîne du produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ obtenue en juxtaposant les chaînes $\{(x \cap y, u_\alpha)\}$ et $\{(x_\iota, y)\}$. Cette chaîne satisfait à l'hypothèse de la condition (J_1). Donc, la chaîne $\{u_\alpha \leq x_\iota \cup y\}$ est maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$, ce qui montre que la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ l'est entre y et $x \cup y$. On a donc $(J_1)\Rightarrow$(M).

15° $(J_1)\Rightarrow$(J) : Cette propriété est immédiate.

16° (α)$\Rightarrow$(2)([21]) : Plaçons-nous dans un treillis qui ne satisfait pas à la condition (2). Il existe deux éléments x et y tels que x couvre $x \cap y$ et $x \cup y$ ne couvre pas y. On peut donc trouver un élément z tel que $y < z < x \cup y$. Le couple (x, z) vérifie a, puisque x couvre $x \cap z = x \cap y$ et le couple (z, x) ne vérifie pas a, car y ne peut s'écrire sous la forme $z \cap c$ avec $x \leq c \leq x \cup y = x \cup z$. La condition ($\alpha$) est donc aussi en défaut.

17° (M)$\Rightarrow$(2) : La condition (2) n'étant pas satisfaite, il existe deux éléments x et y comme dans la démonstration précédente et le couple (x, y) ne vérifie pas m, car la chaîne maximale $\{x \cap y < x\}$ ne peut être obtenue à partir d'une chaîne maximale entre y et $x \cup y$. (M) est en défaut.

([21]) La propriété 16° est due à I. Kaplansky. *Voir* G. Birkhoff [1], exercice 2, p. 101.

18° (J)$\Rightarrow$(1) : Supposons (1) en défaut. Il existe trois éléments x, y et z tels que x et y couvrent $x \cap y$ et $x \cup y > z > y$. La chaîne

$$\{(x \cap y,\ x \cap y) < (x \cap y,\ y) < (x,\ y)\}$$

satisfait à l'hypothèse de la propriété j pour le couple $(x,\ y)$ sans satisfaire à sa conclusion. D'où (J)$\Rightarrow$(1).

19° (6)$\Rightarrow$(2) ([22]) : (2) étant en défaut, il existe x, y, z tels que

$$x \cap z < y < z < x \cup y$$

et x couvre $x \cap y$; il n'existe donc aucun élément t tel que $x \cap z < t \leq x$ et $(y \cup t) \cap z < z$ et (6) est aussi en défaut.

20° (2)$\Rightarrow$(1) : Cette implication est manifeste.

21° (2)$\Rightarrow$(3) : Plaçons-nous dans un treillis vérifiant la condition (2) et envisageons, s'il en existe, deux couples d'éléments x et y, z et t tels que x couvre y et z couvre t. Il faut établir l'égalité $[(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$.

Supposons d'abord que l'on ait $x \geq t$. L'égalité a démontrer devient $(x \cap z) \cup y = (z \cup y) \cap x$. Or, de $t \leq x$ et $t \leq z$, on déduit $t \leq x \cap z$ et, puisque z couvre t, $x \cap z = z$ ou $x \cap z = t$. Si $x \cap z = z$, l'égalité a lieu trivialement. Si $x \cap z = t$, z couvre $x \cap z$ et l'égalité résulte de la forme (2c) de la condition (2) (Chap. I, théorème 6). On traite de la même façon le cas où l'on a $z \geq y$.

Supposons maintenant qu'on n'ait aucune de ces deux relations. On voit immédiatement qu'il n'existe entre les quatre éléments x, y, z, t aucune relation autre que $x \geq y$ et $z \geq t$. Considérons l'élément $y \cup t$. Il est nécessairement distinct de x, y, z, t. Plusieurs cas sont possibles : on peut avoir $y \cup t \geq x$ ou non, $y \cup t \geq z$ ou non.

1er *cas.* — $y \cup t \not\geq x$ et $y \cup t \not\geq z$. On a alors $(y \cup t) \cap x = y$ et $(y \cup t) \cap z = t$. Par conséquent, d'après la condition (2), $(y \cup t) \cup x = x \cup t$ couvre $y \cup t$ et $(y \cup t) \cup z = z \cup y$ couvre $y \cup t$. Ce cas se subdivise : ou bien $x \cup t = z \cup y$, ou bien $x \cup t \neq z \cup y$. Si $x \cup t = z \cup y$, l'égalité à établir devient $z \cup y = x \cup t$; elle

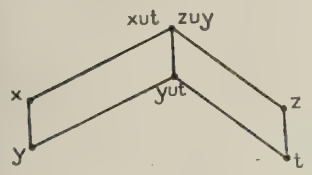


Fig. 10.

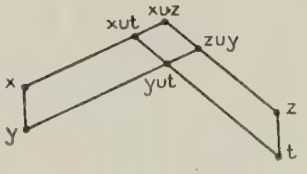


Fig. 11.

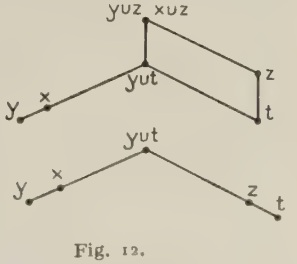


Fig. 12.

([22]) La propriété 19° est due à S. Mac Lane [1].

est vérifiée. Si $x \cup t \neq z \cup y$, on a $(x \cup t) \cap (z \cup y) = y \cup t$ et, d'après la condition (2), $(x \cup t) \cup (z \cup y) = x \cup z$ couvre $x \cup t$ et $z \cup y$. On a alors $(x \cup t) \cap z = t$, car on n'a pas $x \cup t \geq z$ et $(z \cup y) \cap x = y$, car on n'a pas $z \cup y \geq x$. L'égalité à établir devient $t \cup y = y \cup t$; elle est vérifiée.

2e *cas.* — $y \cup t \geq x$ et $y \cup t \not\geq z$. On a $x \cup t = y \cup t$ et $(y \cup t) \cap z = t$, $(y \cup t) \cup z = y \cup z = x \cup z$ couvre $y \cup t$. L'égalité à démontrer devient $t \cup y = x \cup t$ qui est satisfaite. Le cas où $y \cup t \not\geq x$ et $y \cup t \geq z$ se traite de la même façon.

3e *cas.* — $y \cup t \geq x$ et $y \cup t \geq z$. On a $y \cup t = x \cup t = z \cup y = x \cup z$. L'égalité s'écrit $z \cup y = x \cup t$ qui est satisfaite.

22° $(\alpha_i) \Rightarrow (2_i) \Rightarrow (1_i)$; $(\alpha') \Rightarrow (2') \Rightarrow (1')$: Dans les treillis quelconques, on sait qu'on a $(\alpha) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Ces implications ont donc lieu dans les treillis d'idéaux, et dans les treillis d'idéaux duaux.

23° $(\alpha_i) \Rightarrow (\alpha)$: Envisageons un treillis L qui vérifie la condition (α_i), c'est-à-dire que le treillis L_i de ses idéaux vérifie la condition (α) et supposons que,

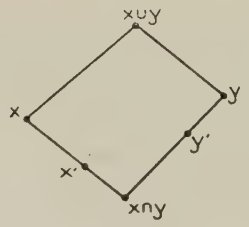


Fig. 13.

pour tout élément x' tel que $x \cap y \leq x' \leq x$, on ait $(x' \cup y) \cap x = x'$. Il faut montrer que, pour tout élément y' tel que $x \cap y \leq y' \leq y$, on a $(y' \cup x) \cap y = y'$.

Plaçons-nous dans L_i et montrons que, pour tout élément $\mathfrak{x}'$ tel que $(x \cap y) \leq \mathfrak{x}' \leq (x)$, on a $[\mathfrak{x}' \cup (y)] \cap (x) = \mathfrak{x}'$ [23]. Si $\mathfrak{x}'$ est un idéal principal (x'), ceci est trivial, car on sait que $(x_1 \cup x_2) = (x_1) \cup (x_2)$ et $(x_1 \cap x_2) = (x_1) \cap (x_2)$. Sinon, $\mathfrak{x}'$ est caractérisé par l'ensemble X' de ses éléments compris entre $x \cap y$ et x : $\mathfrak{x}'$ est, en effet, l'ensemble des éléments u tels qu'il existe $x' \in X'$ avec $u \leq x'$. $\mathfrak{x}' \cup (y)$ est alors l'ensemble des éléments v tels qu'il existe $x' \in X'$ avec $v \leq x' \cup y$, et $[\mathfrak{x}' \cup (y)] \cap (x)$ est l'ensemble des éléments w tels qu'il existe $x' \in X'$ avec $w \leq (x' \cup y) \cap x$. Or, on a $(x' \cup y) \cap x = x'$. On en déduit $[\mathfrak{x}' \cup (y)] \cap (x) = \mathfrak{x}'$. Le treillis L_i vérifiant la condition (α), pour tout élément $\mathfrak{y}'$ tel que $(x \cap y) \leq \mathfrak{y}' \leq (y)$, on a $[\mathfrak{y}' \cup (x)] \cap (y) = \mathfrak{y}'$. En particulier, ceci a lieu pour tout idéal principal

[23] (x) désigne l'idéal principal engendré par l'élément x, ensemble des éléments u tels que $u \leq x$.

$\mathfrak{y}' = (y')$. C'est dire que, pour tout élément $y' \in L$ tel que $x \cap y \leq y' \leq y$, on a $(y' \cup x) \cap y = y'$.

24° $(\alpha^i) \Rightarrow (\alpha)$: Nous considérons ici un treillis L qui vérifie la condition (α^i), c'est-à-dire que le treillis L^i de ses idéaux duaux vérifie la condition (α) et nous montrons qu'il satisfait à la condition (α).

Il suffit de reprendre la démonstration précédente, en y remplaçant $u \leq x'$ $v \leq x' \cup y$, $w \leq (x' \cup y) \cap x$, respectivement par $u \geq x'$, $v \geq x' \cup y$, $w \geq (x' \cup y) \cap x$.

25° $(2_i) \Rightarrow (2)$: Soit L un treillis tel que le treillis L_i vérifie la condition (2). Soit x et y deux éléments de L tels que x couvre $x \cap y$. Dans L_i, l'idéal principal (x) couvre l'idéal principal $(x \cap y)$, Donc, l'idéal principal $(x \cup y)$ couvre l'idéal principal (y). On en déduit que, dans L, $x \cup y$ couvre y.

26° $(2^i) \Rightarrow (5)$ ([24]) : Soit L un treillis dans lequel la condition (5) est en défaut. Il existe, dans L, trois éléments a, b, c tels que l'on ait

$$b \cap c = b \cap a < a < c < b \cup a = b \cap c$$

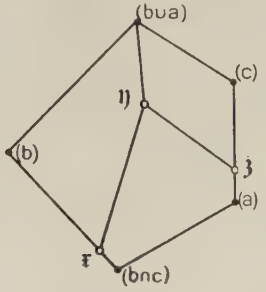


Fig. 14.

et tels que, pour tout élément x satisfaisant à $b \cap c < x \leq b$, on ait $(x \cup a) \cap c > a$. Plaçons-nous dans le treillis L^i. Considérons les idéaux duaux suivants (éléments de L_i) : 1° l'idéal principal $(b \cap c)$; 2° l'idéal $\mathfrak{x}$, ensemble des éléments u de L tels qu'il existe un idéal $\mathfrak{x}_i$ d'une chaine maximale d'idéaux $\{\mathfrak{x}_i\}$ entre $(b \cap c)$ exclus et (b) (choisie une fois pour toutes) avec $u \in \mathfrak{x}_i$: on voit que $\mathfrak{x}$ est un idéal et que cet idéal ne contient pas $b \cap c$; on a donc $\mathfrak{x} > (b \cap c)$; de plus, $\mathfrak{x}$ couvre $(b \cap c)$, car il appartient nécessairement à la chaine maximale $\{\mathfrak{x}_i\}$ et c'est l'élément minimum de cette chaine; 3° l'idéal $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cup (a)$: c'est l'ensemble des éléments v de L tels qu'il existe $x \in \mathfrak{x}$ et satisfaisant à $b \cap c < x \leq b$ avec $v \geq x \cup a$; 4° l'idéal $\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \cap (c)$: c'est l'ensemble des éléments w de L tels qu'il existe x avec $w \geq (x \cup a) \cap c$. Montrons que (2^i) est

([24]) Cette propriété est aussi établie dans R. P. Dilworth [1], p. 343.

alors en défaut. Il suffit de remarquer pour cela : 1° $\mathfrak{x} \cup (a) = \mathfrak{y}$; 2° $\mathfrak{x} \cap (a) = (b \cap c)$: en effet, $\mathfrak{x} \cap (a)$ est l'ensemble des éléments de L tels qu'il existe x avec $t \geq x \cap a = b \cap c$; 3° $\mathfrak{x}$ couvre $(b \cap c)$; 4° $\mathfrak{y} > \mathfrak{z} > (a)$: en effet, d'une part, $c \in \mathfrak{z}$ et $c \notin \mathfrak{y}$, car on ne peut trouver x avec $c \geq x$ donc avec $c \geq x \cup a$; d'autre part, $a \in (a)$ et $a \notin \mathfrak{z}$, car on ne peut trouver x avec $a \geq (x \cup a) \cap c$, puisque (5) est défaut.

27° $(1_i) \Rightarrow (1)$. Soient x et y deux éléments d'un treillis L satisfaisant à (1_i) tels que x et y couvrent $x \cap y$. Dans le treillis L_i, (x) et (y) couvrent $(x \cap y)$; par conséquent, $(x) \cup (y) = (x \cup y)$ couvre (x) et (y) et, dans L, $x \cup y$ couvre x et y.

28° $(1^i) \Rightarrow (1)$: La démonstration précédente est valable, L^i remplaçant L_i.

29° $(5) \Rightarrow (6)$: Cette propriété est triviale.

b. Indication des contre-exemples montrant qu'il n'y a pas d'implication binaire autre que celles-là et leurs conséquences logiques (25).

1° $(\alpha_i) \not\Rightarrow (1^i)$, (6), (γ), (β), (M), (J) : B6.
2° $(\alpha^i) \not\Rightarrow (1_i)$, (γ), (β), (M), (J) : C9, B11.
3° (R) $\not\Rightarrow (1_i)$, (1^i), (6), (β), (J) : C9, B3, A4.
4° (I) $\not\Rightarrow (1_i)$, (1^i), (6), (β), (S) : C9, B3, C5,.
5° (F) $\not\Rightarrow (1_i)$, (1^i), (5), (α), (γ), (S) : C2, B13, C5.
6° $(2_i) \not\Rightarrow (\alpha)$: B1.
7° $(2^i) \not\Rightarrow (\alpha)$: C2.
8° (S) $\not\Rightarrow (\alpha)$, (γ) : C2.
9° (B) $\not\Rightarrow$ (J) : A4.
10° $(1_i) \not\Rightarrow (3)$: B2.
11° $(1^i) \not\Rightarrow (3)$: C1.
12° $(5) \not\Rightarrow (1^i)$: B14.
13° $(\gamma) \not\Rightarrow (1)$, (3) : C3.
14° $(\beta) \not\Rightarrow (1)$, (3) : C3.
15° (J) $\not\Rightarrow$ (3) : B2.
16° (3) $\not\Rightarrow$ (1) : A5.

Les contre-implications qui précèdent suffisent pour s'assurer que le tableau du théorème 1 donne bien toutes les implications binaires reliant les conditions étudiées. De 1° à 5°, les contre-implications indiquées assurent que les conditions (α_i), (α^i), (R), (I), (F) n'entraînent rien qui ne résulte du tableau; par exemple, on a (R) $\not\Rightarrow$ (I), car on a (R) $\not\Rightarrow$ (J). De 6° à 16°, on a procédé de la même façon en ne figurant pas, de plus, ce qui résulte d'une contre-implication

(25) Les contre-exemples utilisés sont groupés et étudiés plus loin.

déjà écrite : par exemple, on a $(2_i) \not\Rightarrow (L)$, car on a $(\alpha_i) \not\Rightarrow (L)$; de même, en plus des conditions que (R) n'entraîne pas, (L) ne doit pas entraîner (R) ni (S), mais cela résulte du fait que (I) n'entraîne pas (S).

2. Treillis à condition de chaîne ascendante.

Théorème 2. — *Dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante*,

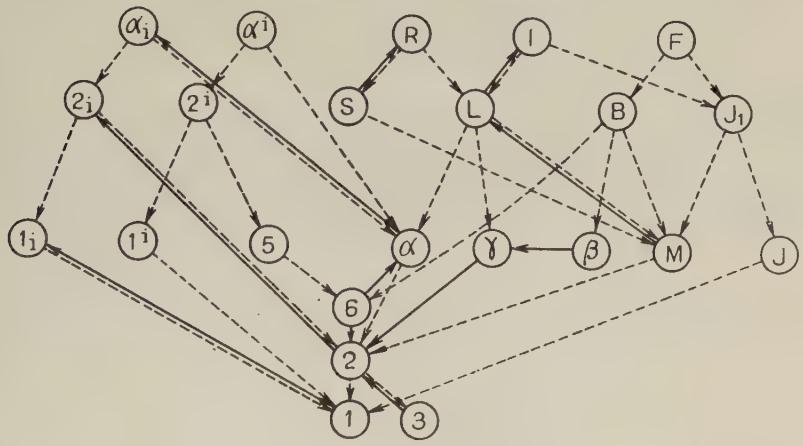


Fig. 15.

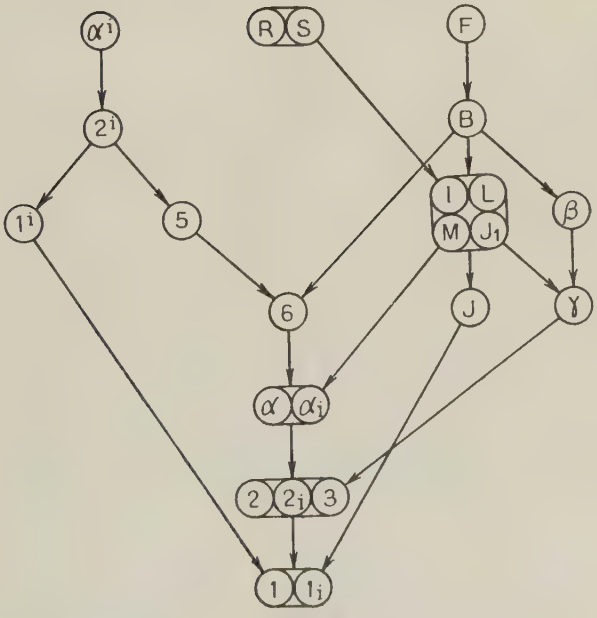


Fig. 16.

les conditions étudiées sont liées par les implications binaires indiquées dans la figure 15 *et par leurs conséquences logiques* ([26]), *ou par celles de la figure* 16 *obtenue en groupant les conditions qui deviennent équivalentes.*

a. Démonstration des implications supplémentaires. — 1° (M)⇒(L) : La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 1. — *Dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, si la condition* (M) *est vérifiée et si une chaîne maximale* $\{x_\iota\}$ *entre* $x \cap y$ *et* x *peut être obtenue sous la forme* $x_\iota = x \cap y_\iota$, *à partir d'une chaîne* $\{y_\iota\}$ *entre* y *et* $x \cup y$, *la chaîne* $\{y_\iota\}$ *assurant cette obtention est unique.*

Démonstration. — On peut toujours admettre, pour établir ce lemme, que la chaîne $\{x_\iota\}$ est sans répétition; supposons qu'il existe deux chaînes telles que $\{y_\iota\}$. La chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ possède certainement cette propriété. Envisageons donc cette chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ et une autre $\{y_\iota\}$. Soit alors b l'élément de la

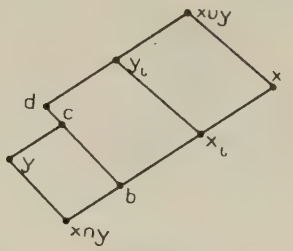


Fig. 17.

chaîne $\{x_\iota\}$ *maximal parmi ceux qui possèdent la propriété* $x_\iota \cup y \neq y_\iota$. On a donc $b \cup y = c < d$, d étant l'élément correspondant de la chaîne $\{y_\iota\}$; et, pour tout élément $x_\iota > b$, on a $x_\iota \cup y = y_\iota$. Montrons que le couple (x, c) ne vérifie pas la propriété m. On a d'abord $x \cap c = b$ et $x \cup c = x \cup y$. La chaîne $\{x_\iota\}$ avec $(x_\iota \geq b)$ maximale entre b et x est obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \cap x$ à partir d'une chaîne, la chaîne $\{y'_\iota\}$ (avec $y_\iota \geq d$) entre c et $x \cup y$. Or, il est impossible de choisir une autre chaîne entre c et $x \cup y$, soit $\{y'_\iota\}$, assurant cette obtention tout en étant maximale : en effet, la chaîne $\{y'_\iota\}$ devant être maximale entre c et $x \cup y$, c doit en faire partie et il conduit à $b = c \cap x$; d'autre part, pour tout élément x_ι tel que $x_\iota > b$, on doit avoir $y'_\iota \geq x_\iota$ et $y'_\iota \geq c$, donc $y'_\iota \geq x_\iota \cup c = x_\iota \cup y = y_\iota > d$, ce qui montre que d peut être intercalé dans la chaîne $\{y'_\iota\}$ immédiatement au-dessus du premier élément c, si bien que la chaîne $\{y'_\iota\}$ ne saurait être maximale. L'hypothèse faite conduisant à admettre

([26]) Je pense qu'on a aussi (L)⇒(R), mais je n'ai pu l'établir. Je n'ai pu décider non plus si l'on a ou non $(2^i) \Rightarrow (\alpha^i)$. Les contre-exemples indiqués plus loin montrent qu'il ne peut y avoir d'implication binaire qui ne soit pas conséquence de ces deux-là et de celles figurées dans le tableau.

que la condition (M) est en défaut doit être rejetée et la chaine $\{y_i\}$ est unique. On a d'ailleurs $y_i = x_i \cup y$.

De ce lemme, il résulte immédiatement que, dans un treillis satisfaisant à la condition (M) et à la condition de chaine ascendante, si une chaine maximale $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x peut être obtenue sous la forme $x_i = x \cap y_i$, à partir d'une chaine maximale entre y et $x \cup y$, $\{y_i\}$, on ne peut remplacer la chaine $\{y_i\}$ par une chaine non maximale assurant cette obtention. On voit donc que l'on a (M) $\Rightarrow$ (L).

2° (S) $\Rightarrow$ (R) : La démonstration, tout à fait analogue à la précédente, repose sur le lemme suivant :

Lemme 2. — *Dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, si la condition* (S) *est vérifiée et si une chaîne maximale* $\{z_i\}$ *entre* $x \cap y$ *et* $x \cup y$ *peut être obtenue sous la forme* $z_i = x_i \cap y_i$, *à partir d'une chaîne* $\{(x_i, y_i)\}$ *du produit cardinal* $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$, *la chaîne* $\{(x_i, y_i)\}$ *assurant cette obtention est unique.*

Démonstration. — Nous suivons la même marche que dans la démonstration

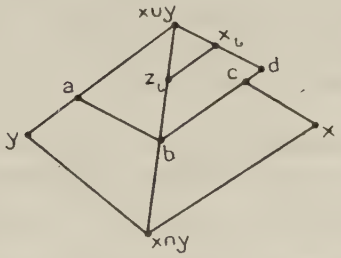


Fig. 18.

du lemme 1. Admettons que la chaine $\{z_i\}$ soit sans répétition et supposons qu'il existe une chaine $\{(x_i, y_i)\}$ différente de la chaine $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$ qui, elle, assure certainement l'obtention de la chaine $\{z_i\}$. Soit alors b l'élément de la chaine $\{z_i\}$ *maximal parmi ceux qui possèdent la propriété* $z_i \cup x \neq x_i$, s'il en existe. S'il n'en existe pas, il existera au moins un élément tel que l'on ait $z_i \cup y \neq y_i$ et l'on raisonnera de la même façon en remplaçant x par y. On a donc $b \cup x = c < d$, d étant l'élément x_i correspondant; et, pour tout élément $z_i > b$, on a $z_i \cup x = x_i$. Posons $b \cup y = a$ et montrons que le couple (c, a) ne vérifie pas la propriété s. On a d'abord $c \cap a = b$ et $c \cup a = x \cup y$. La chaine $\{z_i\}$ (avec $z_i \geq b$) maximale entre b et $x \cup y$ est obtenue sous la forme $z_i = x_i \cap y_i$ à partir d'une chaine, la chaine $\{(x_i, y_i)\}$ [avec $(x_i, y_i) \geq (d, e)$, e ([27]) étant l'élément y_i associé à $x_i = d$ pour donner b]. Or, il est impossible de choisir

([27]) Il est possible que l'on ait $e = a$.

une autre chaine entre (c, a) et $(x \cup_\iota y, x \cup_\iota y)$, soit $\{(x'_\iota, y'_\iota)\}$ assurant cette obtention tout en étant maximale : en effet, la chaine $\{(x'_\iota, y'_\iota)\}$ devant être maximale entre (c, a) et $(x \cup_\iota y, x \cup_\iota y)$, (c, a) doit en faire partie et il conduit à $b = c \cap a$; d'autre part, pour tout élément z_ι tel que $z_\iota > b$, on doit avoir $x'_\iota \geq z_\iota$ et $x'_\iota \geq c$, donc $x'_\iota \geq z_\iota \cup c = z_\iota \cup x = x_\iota \geq d$; l'élément (d, a) peut être intercalé dans la chaine $\{(x'_\iota, y'_\iota)\}$; il n'en fait certainement pas partie, car on a $d \cap a \geq c \cap a = b$ et $d \cap a \leq d \cap e = b$, donc $d \cap a = b$ et l'élément b est obtenu à partir de l'élément (c, a); la chaine $\{(x'_\iota, y'_\iota)\}$ ne saurait être maximale. (S) étant vérifiée, la chaine $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est unique et l'on a $x_\iota = z_\iota \cup x$, $y_\iota = z_\iota \cup y$.

De ce lemme, il résulte facilement, comme dans la démonstration précédente, que l'on a (S)⇒(R) dans les treillis satisfaisant à la condition de chaine ascendante.

(3°) (L)⇒(I) : Nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 3. — *Soient deux éléments s et x tels que $s \leq x$ d'un treillis* S, *deux éléments t et y tels que $t \leq y$ d'un treillis conditionnellement complet* ([28]) T; *si la chaine $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[s, x] \times [t, y]$, la chaine $\{x_\iota\}$ est maximale entre s et x. En particulier, soient deux éléments x et y d'un treillis conditionnellement complet; si la chaine $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$, la chaine $\{x_\iota\}$ est maximale entre $x \cap y$ et x, la chaine $\{y_\iota\}$ est maximale entre $x \cap y$ et y.*

Démonstration. — Supposons la chaine $\{x_\iota\}$ non maximale : on peut y intercaler un élément u. Soit I_0 l'ensemble des indices ι tels que l'on ait $x_\iota < u$. Posons $y' = \bigcup_{\iota \in I_0} y_\iota$. Cet élément existe, car l'ensemble d'éléments $\{y_\iota\}$ est borné. Envisageons l'élément (u, y') du produit cardinal $[s, x] \times [t, y]$. On a $u > x_\iota$ pour tout $\iota \in I_0$, $y' \geq y_\iota$ pour tout $\iota \in I_0$; $u < x_\iota$ pour tout $\iota \notin I_0$, $y' \leq y_\iota$ pour tout $\iota \notin I_0$. On voit qu'on peut intercaler l'élément (u, y') dans la chaine $\{(x_\iota, y_\iota)\}$, en contradiction avec le fait qu'elle est maximale.

Remarquons que la deuxième propriété du lemme 3 est inexacte dans un treillis non conditionnellement complet. Par exemple, en désignant par R la chaine des nombres rationnels r tels que $0 \leq r \leq 1$, le treillis R^2 met la propriété en défaut. Prenons $x = (0, 1)$, $y = (1, 0)$ et plaçons dans la chaine $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ les éléments $[(0, r), (0, 0)]$ avec $r^2 < \frac{1}{2}$ et les éléments $[(0, r), (1, 0)]$ avec $r^2 > \frac{1}{2}$. On voit que cette chaine est maximale sans que la chaine $\{y_\iota\}$ le soit.

Lemme 4. — *Un treillis qui satisfait à une condition de chaine (ascendante ou descendante) est conditionnellement complet.*

([28]) Pour la définition, *cf.* G. Birkhoff [1], p. 51.

Démonstration. — Montrons-le, par exemple, pour un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante. Soit $\{u_\alpha\}$ un ensemble borné d'éléments du treillis. Cet ensemble admet *un plus petit majorant* : soit u_1 un élément de l'ensemble. Si l'on n'a pas $u_1 \geqq u_\alpha$ pour tout α, il existe u_2 tel que $u_2 \not\leqq u_1$ et $u_1 < u_1 \cup u_2$. Si l'on n'a pas $u_1 \cup u_2 \geqq u_\alpha$ pour tout α, il existe u_3 tel que $u_3 \not\leqq u_1 \cup u_2$ et $u_1 \cup u_2 < u_1 \cup u_2 \cup u_3$. Et ainsi de suite. Cette chaîne ascendante est finie. Soit s son dernier élément. On a $s = \bigcup_\alpha u_\alpha$. L'ensemble $\{u_\alpha\}$ admet aussi *un plus grand minorant.* Il existe un élément a du treillis tel que l'on ait $a \leqq u_\alpha$ pour tout α. On voit aisément que $\bigcap_\alpha u_\alpha$ est égal à $\bigcup_\beta a_\beta$ où $\{a_\beta\}$ est l'ensemble des éléments tels que l'on ait $a_\beta \leqq u_\alpha$ pour tout α ([29]).

Lemme 5. — *Dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition* (L), *si x et y sont deux éléments tels qu'une chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ soit obtenue à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$ sous la forme $x_\iota = z_\iota \cap x$, $y_\iota = z_\iota \cap y$, la chaîne $\{x_\iota\}$ peut être obtenue à partir d'une chaîne $\{y'_\iota\}$ entre y et $x \cup y$ sous la forme $x_\iota = y'_\iota \cap x$, la chaîne $\{y_\iota\}$ peut être obtenue à partir d'une chaîne $\{x'_\iota\}$ entre x et $x \cup y$ sous la forme $y_\iota = x'_\iota \cap y$.*

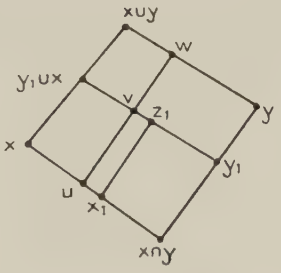


Fig. 19.

Démonstration. — On peut admettre que la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est sans répétition. Comme il a déjà été remarqué, on peut prendre pour chaîne $\{z_\iota\}$ la chaîne $\{x_\iota \cup y_\iota\}$ et il faut montrer qu'on a $(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota$, $(y_\iota \cup x) \cap y = y_\iota$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit (x_1, y_1) l'élément maximal de la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ tel que l'une de ces deux égalités au moins soit en défaut ; par exemple, on a $(x_1 \cup y) \cap x = u > x_1$. Soit I_0 l'ensemble des indices ι tels que l'on ait $(x_\iota, y_\iota) > (x_1, y_1)$. Pour tout $\iota \in I_0$, on a

$$(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota \geqq (x_1 \cup y) \cap x = u,$$

([29]) On voit, par le même raisonnement, que, dans un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, il suffit de s'assurer que tout couple d'éléments admet un plus petit majorant, pour pouvoir affirmer qu'on a affaire à un treillis conditionnellement complet. S'il existe un élément zéro, on a un treillis complet.

et pour tout $\iota \notin I_0$, on a $u > x_\iota \geq x_\iota$. L'élément u peut donc être intercalé dans la chaîne $\{x_\iota\}$. Celle-ci étant maximale d'après le lemme 3 et le lemme 4, u appartient à cette chaîne dans laquelle il suit x_ι. La chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ étant maximale, l'élément (u, y_ι) lui appartient et il suit (x_ι, y_ι). La chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ étant obtenue à partir de la chaîne $\{x_\iota \cup y_\iota\}$, on a nécessairement

$$x_\iota \cup y_\iota \neq u \cup y_\iota ;$$

plus précisément, on a $x_\iota \cup y_\iota = z_\iota < v = u \cup y_\iota$. D'autre part, on a

$$z_\iota \cap y = v \cap y = y_\iota \qquad \text{et} \qquad z_\iota \cup y = v \cup y = w.$$

Montrons que le couple d'éléments (y, z_ι) ne peut vérifier la propriété l. En effet, la chaîne $\{y_\iota\}$ (avec $y_\iota \geq y_\iota$) maximale d'après les lemmes 3 et 4, peut être obtenue sous la forme $y_\iota = (y_\iota \cup x) \cap y$ à partir de la chaîne $\{y_\iota \cup x\}$, entre $y_\iota \cup x$ et $x \cup y$; elle peut, par conséquent, être obtenue sous la forme $y_\iota = [(y_\iota \cup x) \cap w] \cap y$ à partir de la chaîne $\{(y_\iota \cup x) \cap w\}$ entre $(y_\iota \cup x) \cap w \geq v$ et w; cette dernière chaîne n'est certainement pas maximale entre z_ι et $w = z_\iota \cup y$, puisqu'elle ne contient pas l'élément z_ι. La condition (L) devant être vérifiée, l'hypothèse faite est illégitime et le lemme est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que, dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, on a (L)$\Rightarrow$(I). Pour cela, envisageons un tel treillis dans lequel la condition (I) soit en défaut. Nous pouvons y trouver un couple d'éléments (x, y) tel qu'il existe une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \cap x$, $y_\iota = z_\iota \cap y$ à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ non maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$. On peut admettre que la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est sans répétition. D'autre part, on peut toujours supposer qu'on n'a pas, pour tout ι, $z_\iota = x_\iota \cup y_\iota$; s'il en était ainsi, on pourrait toujours remplacer la chaîne $\{z_\iota\}$ par une autre également non maximale, assurant la même obtention et où cette égalité ne serait pas toujours vérifiée; en effet, on peut intercaler un élément u dans la chaîne $\{z_\iota\}$; l'élément $(u \cap x, u \cap y)$ appartient à la chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$, c'est-à-dire qu'on a, pour un certain $\iota = \iota_0$, $u \cap x = x_{\iota_0}$, $u \cap y = y_{\iota_0}$: on modifierait la chaîne $\{z_\iota\}$ en remplaçant $z_{\iota_0} = x_{\iota_0} \cup y_{\iota_0}$ par $u \neq x_{\iota_0} \cup y_{\iota_0}$. Faisons donc cette hypothèse et soit c l'élément maximal de la chaîne $\{z_\iota\}$ parmi ceux pour lesquels on a $z_\iota \neq x_\iota \cup y_\iota$; soient $x_\iota = a$, $y_\iota = b$ les éléments correspondant à $z_\iota = c$ et posons $a \cup b = d$. On a certainement $c > d$. Formons $a \cup y = u$. Deux cas sont possibles : ou bien on a $u \geq c$, ou bien il n'en est pas ainsi.

1er *cas.* — $u \geq c$. Alors, le couple (y, d) ne vérifie pas la propriété l. On a $y \cap d = b$, $y \cup d = u$. La chaîne $\{y_\iota\}$ (avec $y_\iota \geq b$) est maximale entre b et y, d'après le lemme 3. Elle est obtenue sous la forme $y_\iota = (z_\iota \cap u) \cap y$ à partir de la chaîne $\{z_\iota \cap u\}$ (avec $z_\iota \geq c$) entre c et u, non maximale entre d et u.

2e *cas.* — $u \not\geq c$. Posons $c \cup y = c \cup u = v$. La chaîne $\{x_\iota\}$ est maximale entre

$x \cap y$ et x, d'après le lemme 3. Étudions la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$. Pour tout ι tel que l'on ait $x_\iota \leq a$, on a $x_\iota \cup y \leq a \cup y = u$. Pour tout ι tel que l'on ait $x_\iota > a$, on a $x_\iota \cup y \geq x_\iota \cup y_\iota = z_\iota$, d'après la définition de l'élément c, d'où l'on déduit $x_\iota \cup y \geq z_\iota \cup y \geq c \cup y = c$. Distinguons deux sous-cas : 1° *l'élément a de la chaîne $\{x_\iota\}$ est couvert par un autre élément de cette chaîne :* remarquons que les éléments de la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ tels que l'on ait $(x_\iota, y_\iota) > (a; b)$ satisfont à $x_\iota > a$, car si l'on avait $(a, y_\iota) > (a, b)$, on aurait $a \cup y_\iota = z_\iota > c$, d'après la définition de l'élément c, d'où l'on déduit $u = a \cup y > c$, ce qui montre qu'on serait dans le premier cas; il en résulte que, si un élément $x_\iota = a'$ suit immédiatement a dans la chaîne $\{x_\iota\}$, l'élément (a', b) fait partie de la chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ et l'on a $a' \cup b = d' > c$, toujours d'après la définition de l'élément c; on en déduit que le couple (a', d) ne vérifie pas la propriété l, car on a $a' \cap d = a$, $a' \cup d = d'$, a' couvre a et d' ne couvre pas d; 2° *dans la chaîne $\{x_\iota\}$, l'élément a*

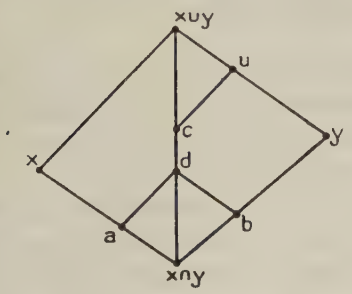


Fig. 20.

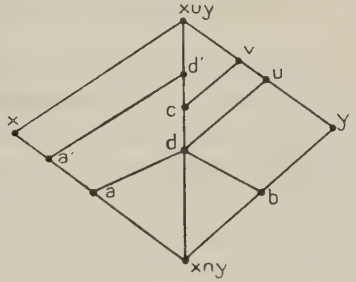


Fig. 21.

n'admet pas de successeur immédiat : si la condition (L) est satisfaite, il ne peut alors exister dans la chaîne $\{x_\iota\}$ aucun élément tel que $x_\iota \cup y = c$, car si l'on avait pour $x_\iota = a'' > a$, $a'' \cup y = c$, on aurait pour tout élément x_ι tel que $a'' \geq x_\iota > a$, $x_\iota \cup y = c$, en contradiction avec le lemme 5, puisqu'on doit avoir $(x_\iota \cup y) \cap x = x_\iota$; le couple (x, y) ne peut donc pas vérifier la propriété l, puisque la chaîne maximale $\{x_\iota\}$ entre $x \cap y$ et x doit être obtenue à partir de la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ entre y et $x \cup y$, d'après le lemme 5 et que la chaîne $\{x_\iota \cup y\}$ n'est pas maximale, puisqu'on peut y intercaler l'élément c; on aboutit à une contradiction.

Dans les deux cas, la condition (L) ne peut être satisfaite et l'on a (L) $\Rightarrow$ (I) ([30]).

4° (γ) $\Rightarrow$ (2) : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (2). Il existe

([30]) La même démonstration montre que, dans un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition (L), si une chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal

$$[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$$

est obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \cap x$, $y_\iota = z_\iota \cap y$ à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, on a nécessairement $z_\iota = x_\iota \cup y_\iota$.

deux éléments x et y tels que x couvre $x \cap y$ et $x \cup y$ ne couvre pas y. Soit z un élément tel que $y < z < x \cup y$ et tel que $x \cup y$ couvre z (il en existe d'après la condition de chaîne ascendante). Le couple (x, z) vérifie la propriété c et le

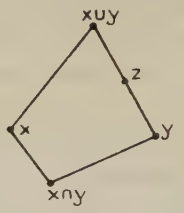


Fig. 22.

couple (z, x) ne vérifie pas la propriété c, car toute chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \cap y$ et z passant par l'élément y donne une chaîne $\{z_\iota \cup x\}$ présentant une répétition : $y \cup x = z \cup x$. La condition (γ) est aussi en défaut et l'on a $(\gamma) \Rightarrow (2)$.

5° $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$: Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (γ). Il existe un couple d'éléments (x, y) vérifiant la propriété c, alors que le couple (y, x) ne la vérifie pas. Toute chaîne maximale sans répétition $\{x_\iota\}$ entre $x \cap y$ et x donne une chaîne maximale sans répétition $\{x_\iota \cup y\}$ entre y et $x \cup y$. Si l'on suppose satisfaite la condition (β), le couple $\{x, y\}$ vérifiant la propriété b impliquée par la propriété c, le couple (y, x) la vérifie aussi et toute chaîne maximale entre $x \cap y$ et y doit donner une chaîne maximale entre x et $x \cup y$. Il doit donc exister une chaîne maximale sans répétition $\{y_\iota\}$ qui donne une chaîne maximale avec répétition $\{y_\iota \cup x\}$. Il existe donc deux éléments de la chaîne $\{y_\iota\}$, soient a et b $(a < b)$ tels que l'on ait $a \cup x = b \cup x = c$. Montrons

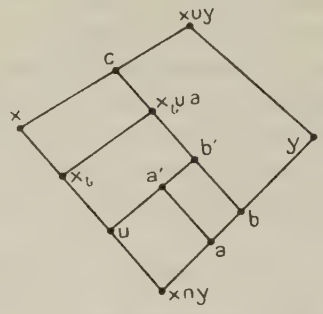


Fig. 23.

que le couple (a, x) vérifie la propriété b et que le couple (x, a) ne la vérifie pas, ce qui constituera une contradiction. On a d'abord $a \cap x = x \cap y$ et $a \cup x = c$. Toute chaîne maximale entre $x \cap y$ et a donne une chaîne maximale entre x et c, car toute chaîne maximale entre $x \cap y$ et y donne une chaîne maximale entre x et $x \cup y$. D'autre part, soit $\{x_\iota\}$ une chaîne maximale entre $x \cap y$

et x : la chaîne $\{x_t \cup a\}$ n'est certainement pas maximale entre a et c. Soit, en effet, u l'élément maximal parmi les éléments x_t tels que l'on ait $x_t \cup a \neq x_t \cup b$. Posons $u \cup a = a'$, $u \cup b = b'$. Pour tout x_t tel que $x_t > u$, on a $x_t \cup a = x_t \cup b \geq b'$. Or, il ne peut exister aucun élément x_t tel que $x_t \cup b = b'$, car on a déjà $u \cup b = b'$ et ceci contredirait le fait que le couple (x, y) vérifie la propriété c. L'élément b' peut donc être intercalé dans la chaîne $\{x_t \cup a\}$ et cette chaîne n'est pas maximale. La condition (β) est donc en défaut et l'on a $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$.

6° $(3) \Rightarrow (2)$: Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (2). Il existe deux éléments x et y tels que x couvre $x \cap y$ et $x \cup y$ ne couvre pas y. Soit z un élément tel que $y < z < x \cup y$ et t un élément tel que $z > t \geq y$ et tel que z

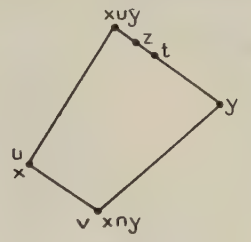


Fig. 24.

couvre t (il en existe d'après la condition de chaîne ascendante). Posons $x = u$, $x \cap y = v$. Les couples d'éléments u et v, z et t mettent la condition (3) en défaut. En effet, on a d'une part $[(u \cup t) \cap z] \cup v = z$ et l'on a d'autre part $[(z \cup v) \cap u] \cup t = t$. On a donc bien $(3) \Rightarrow (2)$.

7° $(\alpha) \Rightarrow (\alpha_i)$, $(2) \Rightarrow (2_i)$, $(1) \Rightarrow (1_i)$: Ces propriétés résultent trivialement du fait que, pour un treillis L satisfaisant à la condition de chaîne ascendante, le treillis L_i de ses idéaux se réduit au treillis des idéaux principaux, donc est isomorphe à L.

8° $(6) \Rightarrow (\alpha)$: Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (α). Il existe un couple d'éléments (x, y) tel que, pour tout élément x' avec $x \cap y \leq x' \leq x$,

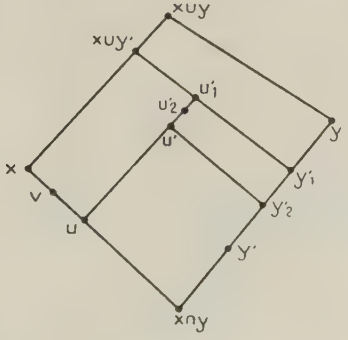


Fig. 25.

on ait $(x' \cup y) \cap x = x'$, alors que, pour un élément au moins y' avec $x \cap y \leq y' \leq y$, on ait $(y' \cup x) \cap y = y'_1 > y'$. Supposons que le treillis envisagé satisfasse à la condition (6). Il existe au moins un élément z avec $x \cap y < z \leq x$ tel qu'on ait $(z \cup y') \cap y'_1 = y'_2 < y'_1$. Soit u un élément maximal parmi les éléments z possédant cette propriété. Posons $u \cup y' = u'$, $u \cup y'_1 = u'_1$. On a $u' \cup x = u'_1 \cup x = x \cup y'$. On a aussi $u \leq u' \cap x \leq (u \cup y) \cap x = u$, d'où $u' \cap x = u$; de même, on a $u'_1 \cap x = u$. Pour tout élément v tel que $u < v \leq x$, on a $(v \cup u') \cap u'_1 = u'_1$; en effet, si l'on avait $(v \cup u') \cap u'_1 = u'_2 < u'_1$, on aurait $(v \cup y') \cap y'_1 \leq (v \cup u') \cap u'_1 = u'_2$, d'où $(v \cup y') \cap y'_1 \leq u'_2 \cap y'_1 < y'_1$, en contradiction avec la définition de u. Il résulte de là que (6) est en défaut, ce qui infirme l'hypothèse. On a donc $(6) \Rightarrow (\alpha)$.

b. Indication des contre-exemples ([25]) :

1° $(\alpha') \not\Rightarrow (\gamma)$, (J) : B11.
2° (R) $\not\Rightarrow (1^i)$, (6), (β) : B3.
3° (F) $\not\Rightarrow (1^i)$, (5) : B13.
4° (B) $\not\Rightarrow$ (F) : B4.
5° (J) $\not\Rightarrow$ (2) : B2.
6° $(1^i) \not\Rightarrow$ (2) : B16.
7° (5) $\not\Rightarrow (1^i)$: B14.
8° $(\beta) \not\Rightarrow$ (J), (α) : B9.

La remarque faite à la suite de l'indication des contre-exemples du paragraphe 1 est valable ici.

3. Treillis a condition de chaine descendante.

Théorème 3. — *Dans les treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante,*

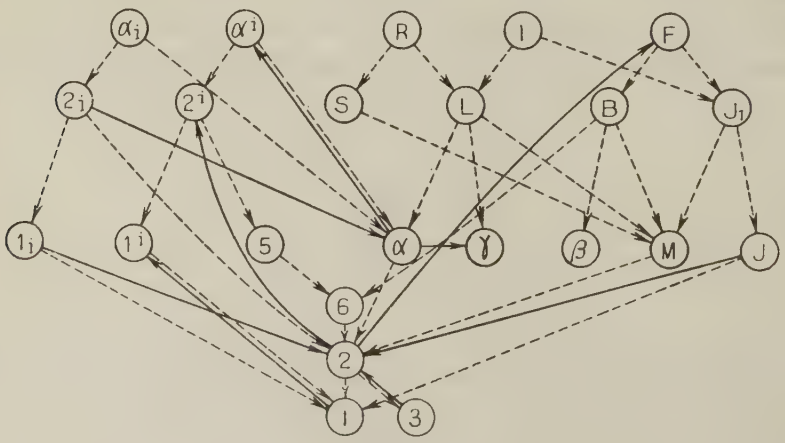


Fig. 26.

les conditions étudiées sont liées par les implications binaires indiquées dans la figure 26 et par leurs conséquences logiques (31), *ou par celles de la figure 27 obtenue en groupant des conditions qui deviennent équivalentes.*

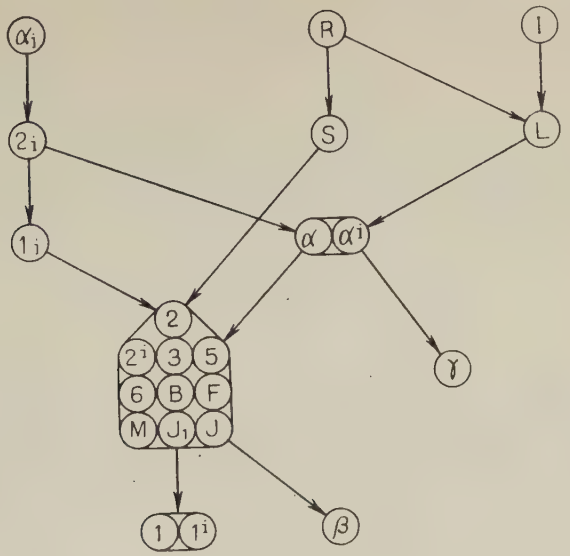


Fig. 27.

a. Démonstration des implications supplémentaires. — (2) $\Rightarrow$ (F) : Soit un treillis qui ne satisfait pas à (F). Il existe un couple d'éléments (x, y) ne possédant pas la propriété *f*, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ qu'on peut supposer sans répétition, maximale dans le produit cardinal

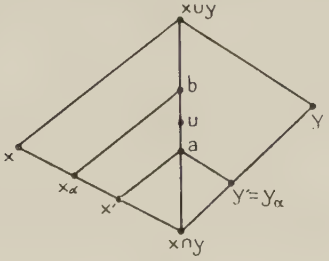


Fig. 28.

$[x \cap y, x] \asymp [x \cap y, y]$, telle que la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$ ne soit pas maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$. On peut intercaler un élément u dans la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$. Le

(31) Il est possible qu'on ait aussi : $(\alpha) \Rightarrow (L)$, $(1_l) \Rightarrow (\alpha_l)$, $(1_l) \Rightarrow (R)$. Les contre-exemples indiqués plus loin montrent qu'il ne peut y avoir d'implication binaire qui ne soit pas conséquence de celles-là et de celles figurées dans le tableau.

treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante est conditionnellement complet d'après le lemme 4. On peut donc définir un élément x' par $\bigcup_{\iota\in I_0} x_\iota$, I_0 étant l'ensemble des indices ι tels que l'on ait $x_\iota \cup y_\iota < u$. On définit de même l'élément y' par $\bigcup_{\iota\in I_0} y_\iota$. L'élément (x', y') peut être intercalé dans la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$. Cette chaîne étant maximale, (x', y') en fait partie. Appelons (x_α, y_α) le successeur de (x', y') dans cette chaîne [il existe d'après la condition de chaîne descendante vérifiée par le produit cardinal $[x\cap y, x]\times[x\cap y, y]$, puisqu'elle l'est par les treillis composants]. On ne peut avoir à la fois $x_\alpha \leq x'$ et $y_\alpha \leq y'$. Il en résulte que l'on a $\alpha \notin I_0$, d'où l'on déduit $x_\alpha \cup y_\alpha > u$. D'autre part, on a

$$x'\cup y' = \left(\bigcup_{\iota\in I_0} x_\iota\right)\cup\left(\bigcup_{\iota\in I_0} y_\iota\right) = \bigcup_{\iota\in I_0}(x_\iota\cup y_\iota) \leq u,$$

d'où l'on tire $x'\cup y' < u$. L'élément (x_α, y_α) couvrant l'élément (x', y'), on doit avoir soit $y' = y_\alpha$ et x_α couvre x', soit $x' = x_\alpha$ et y_α couvre y'. Supposons, par exemple, que la première hypothèse soit réalisée. Posons $x'\cup y' = a$ et $x_\alpha \cup y_\alpha = x_\alpha \cup y' = b$. La condition (2) est en défaut, car l'on a $x_\alpha \cup a = b$, $x_\alpha \cap a = x'$ et b ne couvre pas a. On a donc (2)$\Rightarrow$(F).

2° (α)$\Rightarrow$(γ) : Soit un treillis satisfaisant à la condition (α) et, dans ce treillis, un couple (x, y) d'éléments possédant la propriété c. D'après une remarque déjà faite, ce couple possède la propriété a. D'après la condition (α), le couple (y, x) possède aussi la propriété a. D'autre part, la condition (2), conséquence de la condition (α), est satisfaite; la condition (B), conséquence de la condition (F), est satisfaite, d'après le résultat établi ci-dessus; il en résulte que le couple (y, x) (comme tout autre couple) possède la propriété b. Le couple (y, x) possède donc la propriété c, d'après la remarque rappelée. La condition (γ) est satisfaite et l'on a (α)$\Rightarrow$(γ).

3° (3)$\Rightarrow$(2) : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (2). Il existe deux éléments x et y tels que x couvre $x\cap y$ et $x\cup y$ ne couvre pas y. Soit z un élément tel que $y < z < x\cup y$ et z couvre y (il en existe d'après la condition de chaîne descendante). Posons $x = u$, $x\cap y = v$, $y = t$. Les couples d'éléments u et v, z et t mettent la condition (3) en défaut. En effet, on a, d'une part, $[(u\cup t)\cap z]\cup v = z$ et, d'autre part, $[(z\cup v)\cap u]\cup t = t$. On a donc bien (3)$\Rightarrow$(2).

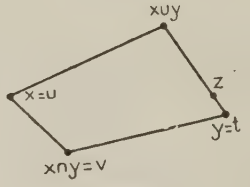


Fig. 29.

4° (J)⇒(2) : Soit un treillis ne satisfaisant pas à la condition (2). Il existe deux éléments x et y tels que x couvre $x \cap y$ et $x \cup y$ ne couvre pas y. Soit $\{y_\iota\}$ une chaîne maximale sans répétition quelconque entre $x \cap y$ et y. La chaîne $\{(x \cap y, y_\iota) < (x, y)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$.

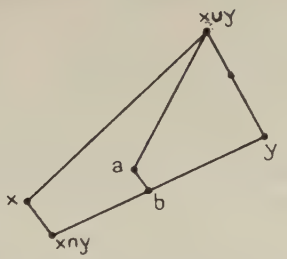


Fig. 30.

Cette chaîne est obtenue à partir de la chaîne $\{y_\iota < x \cup y\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, chaîne qui est non maximale, puisque $x \cup y$ ne couvre pas y. Montrons qu'il n'existe pas de chaîne maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$ assurant aussi cette obtention. S'il existe une telle chaîne, soit $\{z_\iota < x \cup y\}$, appelons a le premier élément de cette chaîne parmi ceux tels que l'on ait $z_\iota \neq y_\iota$; appelons b l'élément y_ι correspondant. On a $a > b$. Pour tout ι tel que $y_\iota < b$, on a $z_\iota = y_\iota < b$. Pour tout ι tel que $y_\iota \geqq b$, on a $z_\iota \geqq a$. Il en résulte que l'élément b peut être intercalé dans la chaîne $\{z_\iota\}$ qui n'est donc pas maximale. (J) est donc en défaut et l'on a (J)⇒(2).

5° $(\alpha) \Rightarrow (\alpha^i)$, $(2) \Rightarrow (2^i)$, $(1) \Rightarrow (1^i)$: Ceci résulte immédiatement du fait que le treillis des idéaux duaux d'un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante lui est isomorphe.

6° $(1_i) \Rightarrow (2)$: Soit un treillis L ne satisfaisant pas à la condition (2). Soit (x, y) un couple d'éléments minimal parmi ceux qui sont tels que x couvre

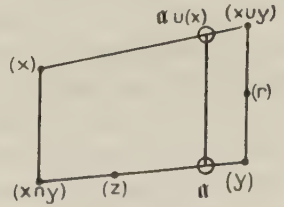


Fig. 31.

$x \cap y$ sans que $x \cup y$ couvre y. Il résulte de ce choix que pour tout z tel que $x \cap y \leqq z < y$, on a $z \cup x$ couvre z. Plaçons-nous dans le treillis des idéaux L_i. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal tel que $(x \cap y) \leqq \mathfrak{a} < (y)$ et (y) couvre $\mathfrak{a}$ (pour l'obtention d'un tel idéal, *voir* l'étude duale dans le paragraphe 1, *a*, 23°). L'idéal $\mathfrak{a}$

est caractérisé par l'ensemble de ses éléments z tels que $x \cap y \leq z < y$: c'est l'ensemble des éléments t tels qu'il existe z avec $t \leq z$. Montrons que $\mathfrak{a} \cup (x)$ couvre $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal tel que l'on ait : $\mathfrak{a} \cup (x) > \mathfrak{u} \geq \mathfrak{a}$. L'idéal $\mathfrak{a} \cup (x)$ est l'ensemble des éléments t tels qu'il existe z avec $t \leq z \cup x$. Il existe, dans l'idéal $\mathfrak{a} \cup (x)$, un élément v n'appartenant pas à $\mathfrak{u}$. Soit z_1 l'élément z tel que l'on ait $v \leq z_1 \cup x$. L'élément $z_1 \cup x$ appartient à $\mathfrak{a} \cup (x)$ et n'appartient pas à $\mathfrak{u}$. Soit maintenant u un élément quelconque de l'idéal $\mathfrak{u}$. On a $u \in \mathfrak{a} \cup (x)$, Il existe donc un élément z, soit z_2, tel que $u \leq z_2 \cup x$. On a $u \leq z_1 \cup z_2 \cup x$ avec $z_1 \cup z_2 \in \mathfrak{a}$ et $z_1 \cup z_2 \cup x \notin \mathfrak{u}$. On a aussi $z_1 \cup z_2 \leq u \cup z_1 \cup z_2 \leq z_1 \cup z_2 \cup x$ avec $u \cup z_1 \cup z_2 \in \mathfrak{u}$, car $z_1 \cup z_2 \in \mathfrak{a} \leq \mathfrak{u}$. On en déduit $u \cup z_1 \cup z_2 \neq z_1 \cup z_2 \cup x$. Or, d'après le choix du couple (x, y), $z_1 \cup z_2 \cup x$ couvre $z_1 \cup z_2$. On a donc $u \cup z_1 \cup z_2 = z_1 \cup z_2$, d'où $u \leq z_1 \cup z_2$ et $u \in \mathfrak{a}$. Finalement $\mathfrak{u} = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} \cup (x)$ couvre $\mathfrak{a}$. Le treillis L_i ne satisfait pas à la propriété (1) : on a $[\mathfrak{a} \cup (x)] \cap (y) = \mathfrak{a}$, car (y) couvre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} \cup (x) \not\geq (y)$ [en effet, on a $y \notin \mathfrak{a} \cup (x)$, puisqu'il n'existe aucun élément z tel que $y \leq z \cup x$, $z \cup x$ couvrant z]; on a

$$[\mathfrak{a} \cup (x)] \cup (y) = (x \cup y);$$

il existe un idéal principal (r) tel que $(y) < (r) < (x \cup y)$. Le treillis L ne satisfait pas à la condition (1_i) et l'on a $(1_i) \Rightarrow (2)$.

7° $(2_i) \Rightarrow (\alpha)$: Soit un treillis L ne satisfaisant pas à la condition (α). Soit (x, y) un couple d'éléments minimal parmi ceux qui ne possèdent pas la

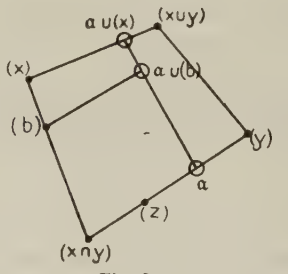


Fig. 32.

propriété a, alors que le couple symétrique la possède. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal tel que $(x \cap y) \leq \mathfrak{a} < (y)$ et (y) couvre $\mathfrak{a}$. Cet idéal est caractérisé par l'ensemble de ses éléments z tels que $x \cap y \leq z < y$: c'est l'ensemble des éléments t tels qu'il existe z avec $t \leq z$. Pour tout élément z, on a $(z \cup x) \cap y = z$. D'autre part, il existe un élément b entre $x \cap y$ et x tel que $(b \cup y) \cap x > b$. D'après le choix du couple (x, y), on a nécessairement $b \cup y = x \cup y$ et x couvre b. De plus, on a, quel que soit z, $b \cup z \neq x \cup z$, sans quoi le couple (x, z) ne posséderait pas la propriété a, alors que le couple (z, x) la possède évidemment, contrairement au choix du couple (x, y). Ceci posé, considérons les idéaux $\mathfrak{a} \cup (x)$, ensemble des éléments t tels qu'il existe z avec $t \leq z \cup x$ et $\mathfrak{a} \cup (b)$, ensemble des éléments t tels qu'il existe z avec $t \leq z \cup b$.

On a

$$(x \cup y) > a \cup (x) > a \cup (b)$$

car, d'une part, on a $y \in (x \cup y)$ et $y \notin a \cup (x)$ [il n'existe aucun élément z tel que $y \leqq z \cup x$, puisque le couple (y, x) possède la propriété a]; d'autre part, on a $x \in a \cup (x)$ et $x \notin a \cup (b)$ (il n'existe aucun élément z tel que $x \leqq z \cup b$, ce qui entrainerait $z \cup x = z \cup b$, contrairement à la remarque qui précède). Le treillis L_i ne satisfait pas à la condition (2) : on a $[a \cup (b)] \cap (y) = a$, car (y) couvre a et $(y) \not\leqq a \cup (b)$; on a $[a \cup (b)] \cup (y) = (x \cup y)$ et $(x \cup y)$ ne couvre pas $a \cup (b)$. Donc, le treillis L ne satisfait pas à la condition (2_i) et l'on a $(2_i) \Rightarrow (\alpha)$.

b. Indication des contre-exemples ([25]) :

1° $(\alpha_i) \not\Rightarrow (I)$: C8.
2° $(R) \not\Rightarrow (1_i), (I)$: C9, C8.
3° $(I) \not\Rightarrow (1_i), (S)$: C9, C5.
4° $(S) \not\Rightarrow (\gamma)$: C2.
5° $(\gamma) \not\Rightarrow (1), (\beta)$: C4.
6° $(\beta) \not\Rightarrow (1)$: C3.
7° $(1) \not\Rightarrow (\beta)$: C1.

4. ÉTUDE DES CONTRE-EXEMPLES UTILISÉS ([32]). — *a. Treillis ne satisfaisant à aucune condition de chaîne.*

1° A4 : Dans ce diagramme, les traits terminés de chaque côté par une double flèche symbolisent la chaîne des nombres réels r tels que $0 < r < 1$. Les éléments du treillis sont ainsi ceux des trois chaines $\{x_r\}$, $\{y_r\}$, $\{z_r\}$, auxquels il faut ajouter les éléments a, b, c, d, e. Les relations imposées sont lisibles sur le diagramme (on a $x_r \leqq y_{r'}$ et $z_r \leqq y_{r'}$ si les nombres r et r' satisfont aux mêmes relations avec leur sens ordinaire). On a bien affaire à un treillis dans lequel on a $a \cap c = e$, $a \cup c = b$, $a \cap d = e$, $a \cup d = b$, $c \cap d = e$, $c \cup d = b$; $a \cap y_r = x_r$, $a \cup y_r = b$, $a \cap z_r = e$, $a \cup z_r = b$, $c \cap y_r = z_r$, $c \cup y_r = b$, $c \cap x_r = e$, $c \cup x_r = b$, $d \cap x_r = e$, $d \cup x_r = y_r$, $d \cap z_r = e$, $d \cup z_r = y_r$; $x_r \cap y_{r'} = x_{\min(r,r')}$, $x_r \cup y_{r'} = y_{\max(r,r')}$, $x_r \cap z_{r'} = e$, $x_r \cup z_{r'} = b$, $y_r \cap z_{r'} = z_{\min(r,r')}$, $y_r \cup z_{r'} = y_{\max(r,r')}$. On s'assure facilement que ce treillis est complet : une famille quelconque d'éléments admet un plus grand minorant qu'on obtient en remplaçant d'abord les éléments de la famille appartenant à la chaine $\{x_r\}$ (s'il en existe) par leur plus grand minorant et en faisant de même pour ceux des deux autres chaines; on voit de la même façon que toute famille d'éléments admet un plus petit majorant. On obtient le treillis des idéaux en remplaçant chacune des trois chaines $\{x_r\}$,

([32]) Tous les contre-exemples utilisés sont des treillis complets.

$\{y_r\}$, $\{z_r\}$ par la chaîne de ses idéaux (avec des relations évidentes entre les éléments des chaînes d'idéaux). On obtient de même le treillis des idéaux duaux en remplaçant les chaînes par les chaînes d'idéaux duaux. Le treillis A 4

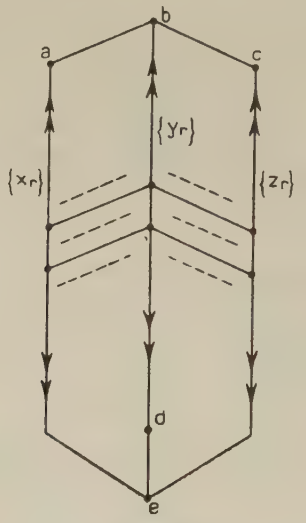


Fig. 33.

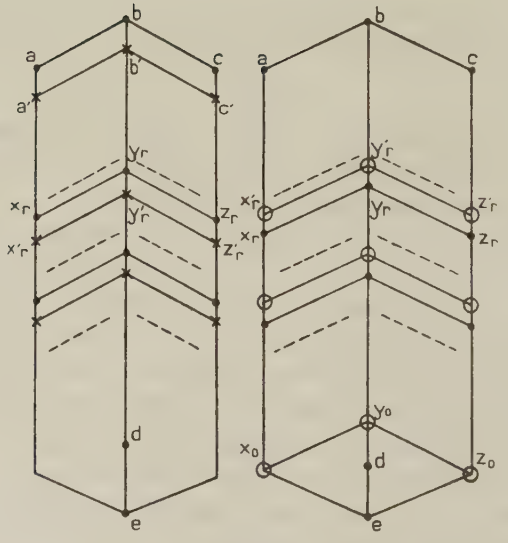


Fig. 34.

satisfait à la condition (R) : on le voit en remarquant que les couples d'éléments (a, c), (a, d), (c, d), (a, y_r), (a, z_r), (c, y_r), (c, x_r), (d, x_r), (d, z_r), (x_r, y_r), (x_r, z_r), (y_r, z_r) vérifient la propriété *r*. Il satisfait à la condition (B), car les mêmes couples et les couples symétriques vérifient la propriété *b*. Il satisfait à

la condition (α_i) : le treillis de ses idéaux satisfait à la condition (α), car les couples d'éléments (a, b'), (a, y_r) (a, y'_r), (a, d), (a', y_r), (a', y'_r), (a', d), (x_r, y_r), (x_r, y'_r), (x'_r, y_r), (x'_r, y'_r), et les couples symétriques ainsi que les couples du diagramme symétriques de ceux-là par rapport à la chaîne médiane vérifient la propriété a, alors que les couples (a, c), (a, c'), (a, z_r), (a, z'_r), (a', c), (a', c'), (a', z_r), (a', z'_r), (x_r, c), (x_r, c'), (x_r, z_r), (x_r, z'_r), (x'_r, c), (x'_r, c'), (x'_r, z_r), (x'_r, z'_r) et les couples symétriques ne la vérifient pas. Il satisfait à la condition (α^i) : le treillis de ses idéaux duaux satisfait à la condition (α), car les couples d'éléments (a, y'_r), (a, y_r), (a, y_0), (a, d), (a, z_0), (x'_r, y'_r), (x'_r, y_r), (x'_r, y_0), (x'_r, d), (x'_r, z_0), (x_r, y'_r), (x_r, y_r), (x_r, y_0), (x_r, d), (x_r, z_0), (x_0, d), (x_0, z_0) et les couples symétriques ainsi que les couples du diagramme symétriques de ceux-là par rapport à la chaîne médiane vérifient la propriété a, alors que les couples (a, c), (a, z'_r), (a, z_r), (x'_r, c), (x'_r, z'_r), (x'_r, z_r), (x_r, c), (x_r, z'_r), (x_r, z_r) et les couples symétriques ne la vérifient pas. Il ne satisfait pas à la condition (J) : le couple (a, c) ne vérifie pas la propriété j, car la chaîne $\{(e, e) < (x_r, z_r) < (a, c)\}$ (r décrivant la chaîne des nombres réels de l'intervalle ouvert $[0, 1]$) maximale dans le produit cardinal $[e, a] \times [e, c]$ peut être obtenue seulement à partir de la chaîne $\{e < y_r < b\}$ ou à partir de la chaîne $\{d < y_r < b\}$, toutes deux non maximales entre e et b.

Le treillis A 4 satisfait donc aux conditions (R), (S), (L), (B), (α), (γ), (β), (M), (6), (2), (1), (3), (α'), (α_i), (2_i), (2^i), (1_i), (1^i), (5). Il ne satisfait pas aux conditions (I), (F), (J_1), (J).

2° A 5 : Le treillis A5 est formé des éléments a, b, c, d et des deux chaînes

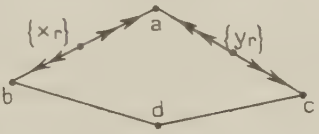


Fig. 35.

$\{x_r\}$ et $\{y_r\}$ (des nombres réels r de l'intervalle ouvert $[0, 1]$). Il est immédiat qu'il s'agit bien d'un treillis. Ce treillis est complet. Il satisfait aux conditions (β) et (γ) car, quel que soit l'élément x pris dans l'une des deux chaînes joignant d et a et quel que soit l'élément y pris dans l'autre, le couple (x, y) ne vérifie pas la propriété b (x et y étant différents de a et d), ni *a fortiori* la propriété c. Il satisfait à la condition (3) : en effet, pour avoir x couvre y et z couvre t, il faut prendre $x = b$, $y = d$, $z = c$, $t = d$ ou $x = z = b$, $y = t = d$ (ou les éléments du diagramme symétriques par rapport à la droite ad). Dans les deux cas, on a $[(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$. Il ne satisfait pas à la condition (1), b et c couvrant d sans que a couvre b et c.

Le treillis A5 satisfait donc aux conditions (γ), (β), (3). Il ne satisfait pas

aux conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J_1), (α), (M), (J), (6), (2), (1), (α^i), (α_i), (2_i), (2^i), (1_i), (1^i), (5).

b. Treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante.

1° B1 : Dans ce diagramme et dans tous les suivants, les traits terminés d'un côté par une flèche symbolisent la chaîne des nombres entiers positifs. Les éléments du treillis sont ceux des deux chaînes $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$ et les éléments a, b, c. On voit immédiatement qu'il s'agit d'un treillis complet, car deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant [*voir* la note ([29])]. Ce treillis satisfait à la condition (2) comme il est facile de s'en assurer. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments a' et b', Le treillis B1 ne satisfait pas à la condition (1^i), car a' et c couvrent a et b' ne couvre pas c. Il ne

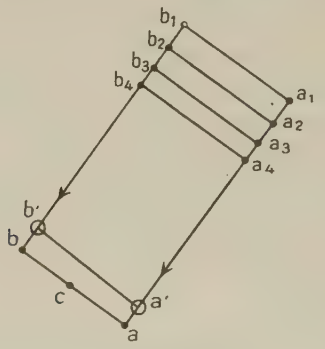


Fig. 36.

satisfait pas à la condition (J) : le couple (c, a) ne vérifie pas la propriété j, car la chaîne $\{(a, a) < (c, a) < (c, a_i)\}$ (i décroissant jusqu'à 1) maximale dans le produit cardinal $[a, c] \times [a, a_1]$ peut être obtenue seulement à partir de la chaîne $\{a < c < b_i\}$ ou à partir de la chaîne $\{a < b < b_i\}$ et ces chaînes ne sont pas maximales entre a et b_1. Il ne satisfait pas à la condition (γ), car le couple (c, a_1) vérifie la propriété c et le couple (a_1, c) ne la vérifie pas. Il ne satisfait pas à la condition (α), car le couple (a_1, b) vérifie la propriété a et le couple (b, a_1) ne la vérifie pas.

Le treillis B1 satisfait donc aux conditions (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (R), (I), (F), (2^i), (B), (J), (1^i), (5), (α), (γ), (β), (6).

2° B2 : Les éléments du treillis B2 sont ceux des trois chaînes $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{c_k\}$ et les éléments a et c. Deux éléments quelconques admettant un plus petit majorant, il s'agit bien d'un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (J) : il est évident qu'un couple d'éléments auquel n'appartient pas c vérifie la propriété j et l'on s'assure facilement qu'il en est de même des couples (c, a_i) et (c, b_j). On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments a',

b', c'. Le treillis B2 ne satisfait pas à la condition (1^i), car a' et c couvrent a et c' ne couvre pas a'. Il ne satisfait pas à la condition (2), car c couvre $a = c \cap a$, et $c_1 = c \cup a_1$ ne couvre pas a_1.

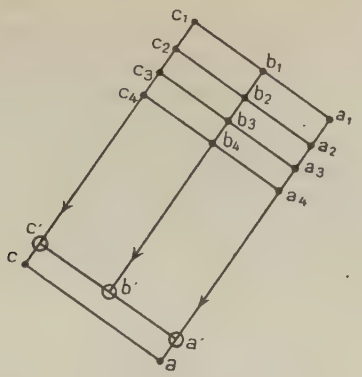


Fig. 37.

Le treillis B2 satisfait donc aux conditions (J), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (R), (I), (F), (2^i), (B), (1^i), (5), (α), (γ), (β), (6), (2).

3° B3 : Les éléments du treillis B3 sont ceux des deux chaînes $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$ et les éléments c et d. Il est immédiat qu'il s'agit d'un treillis complet. Le treillis B3 satisfait à la condition (R) car, quels que soient a_i et b_j, toute chaîne du produit $[a_i, c] \times [b_j, c]$ est finie et ne saurait donner une chaîne maximale entre d et c, ce qui montre que le couple (a_i, b_j) vérifie la propriété r. Le treillis des idéaux duaux est obtenu en ajoutant les éléments a' et b', Le treillis B3 ne satisfait pas à la condition (1^i), car a' et b' couvrent d sans que c couvre

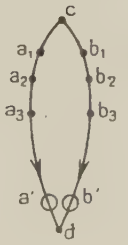


Fig. 38.

a' et b'. Il ne satisfait pas à la condition (β), car le couple (a_1, b_2) ne vérifie pas la propriété b alors que le couple (b_2, a_1) la vérifie. Il ne satisfait pas à la condition (6), car on a $a_1 \cap b_1 = a_1 \cap b_2 = d$, $a_1 \cup b_1 = a_1 \cup b_2 = c$, alors que tout élément x tel que $d < x \leq a_1$ est tel que $x \cup b_2 = c$, donc tel que $(x \cup b_2) \cap b_1 = c \cap b_1 = b_1$.

Le treillis B3 satisfait donc aux conditions (R), (I), (J), (α), (γ), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α'), (F), (2'), (B), (1'), (5), (β), (6).

4° B4 : Les éléments du treillis B4 sont ceux des trois chaînes $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{c_k\}$ et les éléments b et d. C'est un treillis complet, car deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. Ce treillis satisfait à la condition (R) : les couples d'éléments (a_i, b_j), (a_i, c_k), (b_j, c_k), (a_i, b), (b, c_k) vérifient la propriété r. Il satisfait à la condition (B); les mêmes couples d'éléments et les couples symétriques vérifient la propriété b. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a', b', c'. Ce treillis satisfait à la condition (α), car les couples (a_i, b_j), (b_j, c_k), (a_i, b), (b, c_k), (a_i, b'), (b', c_k), (a_i, c'), (a', c_k), (a', b), (b, c'), (a', c') et les couples symétriques vérifient la

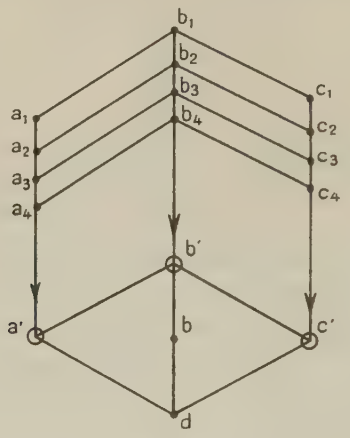


Fig. 39.

propriété a, alors que les couples (a_i, c_k) et les couples symétriques ne la vérifient pas. Le treillis B4 satisfait donc à la condition (α'). Il ne satisfait pas à la condition (F); le couple (a_1, c_1) ne vérifie pas la propriété f, car la chaîne

$$\{(d, d) < \ldots < (a_i, c_i) < (a_i, c_{i-1}) < (a_{i-1}, c_{i-1}) < \ldots < (a_2, c_2) < (a_2, c_1) < (a_1, c_1)\}$$

maximale dans le produit cardinal $[d, a_1] \times [d, c_1]$ donne la chaîne

$$\{d \cup d = d \leq \ldots \leq a_i \cup c_i = b_i \leq a_i \cup c_{i-1} = b_{i-1} \leq \ldots \leq a_2 \cup c_1 = b_1 \leq a_1 \cup c_1 = b_1\}$$

non maximale entre d et b, puisqu'on peut y intercaler l'élément b.

Le treillis B4 satisfait donc à toutes les conditions étudiées, sauf à la condition (F).

5° B6 : Les éléments du treillis B6 sont ceux des chaînes $\{a_n\}$, $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, $\{a_{3n}\}$, ..., $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{c_{1n}\}$, $\{c_{2n}\}$, $\{c_{3n}\}$, ... et les éléments a et c. On voit que c'est un treillis complet en s'assurant que deux éléments quelconques ont un

plus petit majorant. Ce treillis satisfait à la condition (α) : les couples d'éléments (a_i, c_j), (a_{ri}, c_j) avec $r \geqq j$, (a_{ri}, c_{rj}), (a, c_j), (a, c_{rj}) vérifient la propriété a ainsi que les couples symétriques ; les autres couples (x, y) (où l'on n'a ni $x \geqq y$, ni $y \geqq x$) ne vérifient pas la propriété a. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a', a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, ..., b', c', c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, ... Le treillis B6 ne satisfait pas à la condition ($1'$), car a et c' couvrent c, alors que a' ne couvre pas a. Il ne satisfait pas à la condition (6), car on a $b_1 \cap c_1 = b_2 \cap c_1 = c$ et $b_1 \cup c_1 = b_2 \cup c_2 = a$, alors que tout élément x tel que $c < x \leqq c_1$ est tel que $(b_2 \cup x) \cap b_1 = b_1$. Il ne satisfait pas à

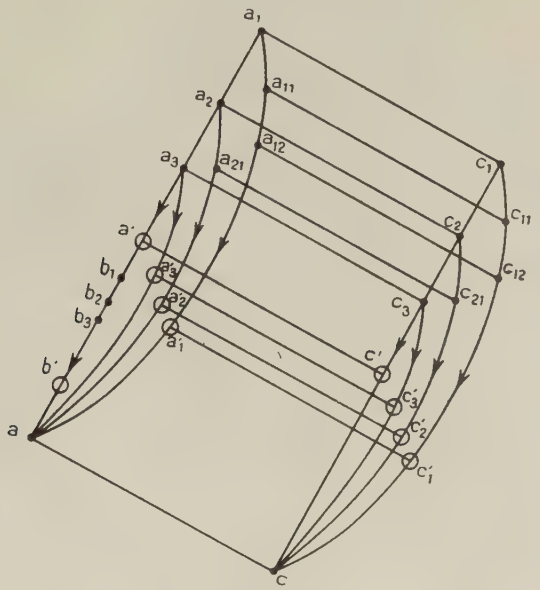


Fig. 40.

la condition (γ) : le couple (a, c_1) vérifie la propriété c et le couple (c_1, a) ne la vérifie pas, car la chaîne maximale $\{c < c_i\}$ (où i décroît jusqu'à 1) sans répétition entre c et c_1, donne la chaîne $\{c \cup a = a < c_i \cup a = a_i\}$ non maximale entre a et a_1. Il ne satisfait pas à la condition (J) : le couple (a, c_1) ne vérifie pas la propriété j, car la chaîne $\{(c, c) < (a, c) < (a, c_i)\}$ (où i décroît jusqu'à 1) maximale dans le produit cardinal $[c, a] \times [c, c_1]$ ne peut être obtenue qu'à partir de la chaîne $\{c < a < a_i\}$ non maximale entre c et a_1.

Le treillis B6 satisfait donc aux conditions (α), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α'), (R), (I), (F), ($2'$), (B), (J), ($1'$), (5), (γ), (β), (6).

6° B9 : Les éléments du treillis B9 sont a_{ijk}, b_{ij}, c_{ijk}, d_{ij}, e où les indices sont des entiers positifs quelconques. Il est immédiat que l'ensemble partiellement ordonné défini par le diagramme satisfait à la condition de chaîne ascen-

dante. On voit sans difficulté que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. Le diagramme représente donc un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (β) : on peut, en effet, constater que les couples d'éléments $(a_{ijk}, a_{i'j'k'})$, $(a_{ijk}, b_{i'j'})$, $(a_{ijk}, c_{i'j'k'})$, $(a_{ijk}, d_{i'j'})$, $(b_{ij}, b_{i'j'})$, $(c_{ijk}, c_{i'j'k'})$, $(c_{ijk}, d_{i'j'})$, $(d_{ij}, d_{i'j'})$ et les couples symétriques vérifient la propriété b, alors

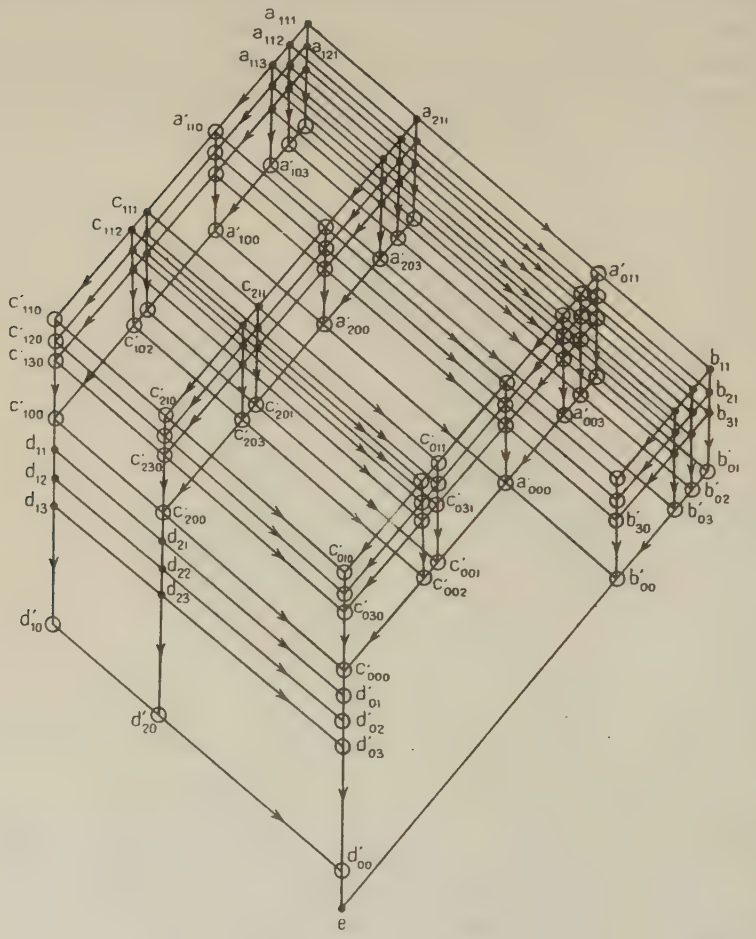


Fig. 41.

que les couples $(b_{ij}, c_{i'j'k'})$, $(b_{ij}, d_{i'j'})$ et les couples symétriques ne la vérifient pas. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a'_{0jk}, a'_{ij0}, a'_{i0k}, a'_{00k}, a'_{0j0}, a'_{i00}, a'_{000}, b'_{0j}, b'_{i0}, b'_{00}, c'_{0jk}, c'_{ij0}, c'_{i0k}, c'_{00k}, c'_{0j0}, c'_{i00}, c'_{000}, d'_{0j}, d'_{i0}, d'_{00}. Le treillis B9 ne satisfait pas à la condition ($1'$), car b'_{00} et d'_{00} couvrent e sans que a'_{000} couvre d'_{00}. Il ne satisfait pas à la condition (α), car le couple (b_{11}, d_{11}) possède la propriété a que ne possède pas le couple (d_{11}, b_{11}). Il ne satisfait pas à la condition (J), car le couple (b_{11}, c_{112}) ne

vérifie pas la propriété j ; en effet, la chaîne $\{(e,e)<(e,d_{1j})<(e,c_{11k})<(b_{1j'},c_{112})\}$ (j et j' décroissant jusqu'à 1, k décroissant jusqu'à 2) maximale dans le produit cardinal $[e, b_{11}]\times[e, c_{112}]$ peut être obtenue seulement à partir de la chaîne $\{e<d_{1j}<c_{11k}<a_{11j'}\}$ ou à partir de la chaîne déduite de celle-là en remplaçant c_{112} par c_{111} et ces deux chaînes sont non maximales entre e et a_{112}.

Le treillis B9 satisfait donc aux conditions (γ), (β), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (R), (I), (F), (2^i), (B), (J), (1^i), (5), (α), (6).

7° B11 : Les éléments du treillis B11 sont a_{ij}, b_{ij}, a_{0j}, a_{i0}, b_{0j}, b_{i0}, b_{00}, où

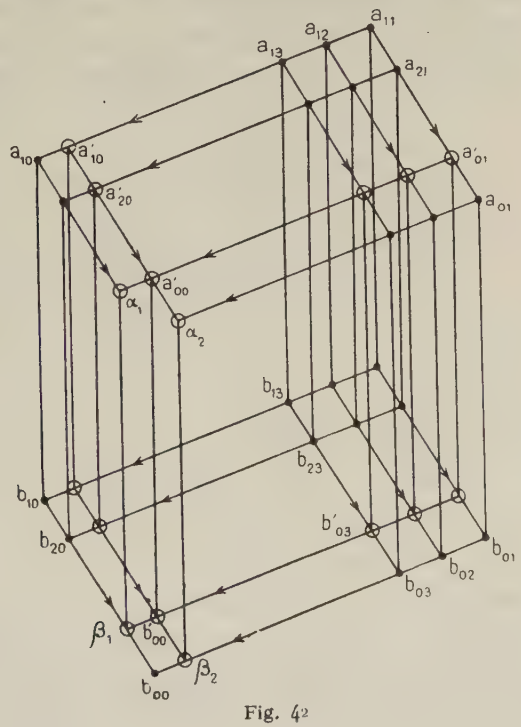


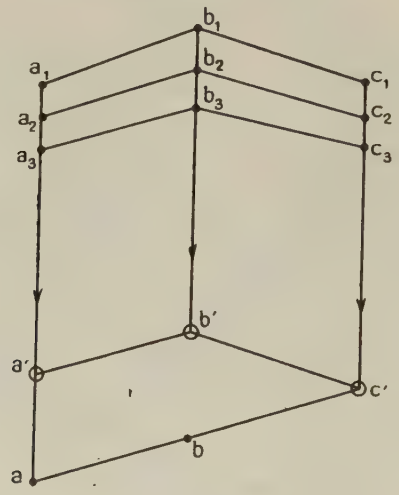
Fig. 42

les indices sont des entiers positifs quelconques. On voit facilement que c'est bien un treillis complet. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a'_{i0}, a'_{0j}, a'_{00}, α_1, α_2, b'_{i0}, b'_{0j}, b'_{00}, β_1, β_2. Le treillis des idéaux satisfait à la condition (α) : les seuls couples d'éléments ne possédant pas la propriété a sont les couples (a_{i0}, a_{0j}), (a_{i0}, α_2), (α_1, a_{0j}), (α_1, α_2) et les couples symétriques. Le treillis B11 satisfait donc à la condition (α^i). Il ne satisfait pas à la condition (γ) : le couple (b_{10}, a_{01}) possède la propriété c et le couple (a_{01}, b_{10}) ne la possède pas, car la chaîne $\{b_{00}<a_{0j}\}$ (où j décroît jusqu'à 1) est maximale sans répétition entre b_{00} et a_{01}, alors que la chaîne $\{b_{10}<a_{1j}\}$ n'est pas maximale entre b_{10} et a_{11}. Il ne satisfait pas à la condi-

tion (J) : le couple (a_{01}, b_{10}) ne vérifie pas la propriété j, car la chaîne $\{(b_{00}, b_{00}) < (b_{i0}, b_{00}) < (b_{10}, a_{0j})\}$ (où i et j décroissent jusqu'à 1) maximale dans le produit cardinal $[b_{00}, b_{10}] \times [b_{00}, a_{01}]$ peut être obtenue seulement à partir de la chaîne $\{b_{00} < b_{i0} < a_{1j}\}$ ou à partir de la chaîne déduite de celle-là en remplaçant b_{10} par a_{10} et ces deux chaînes sont non maximales entre b_{00} et a_{11}.

Le treillis B11 satisfait donc aux conditions (α^i), (2^i), (1^i), (5), (α), (6), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (R), (I), (F), (B), (J), (γ), (β).

8° B13 : Les éléments du treillis B13 sont ceux des trois chaînes $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{c_k\}$ et les éléments a et b. On voit immédiatement que c'est un treillis complet. Il satisfait à la condition (R) : on voit aisément que les couples d'éléments (a_i, b_j), (a_i, c_j), (a_i, b), (b_i, c_j) possèdent la propriété r. Il satisfait à la condi-



43.

tion (F) : les mêmes couples vérifient la propriété f. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments a', b', c'. Celui-ci ne satisfaisant pas à la condition (1), car a' et b couvrent a sans que b' couvre b, le treillis B13 ne satisfait pas à la condition (1^i). Il ne satisfait pas non plus à la condition (5), car on a $a_1 \cap b = a_1 \cap c_1 = a$, $a_1 \cup b = a_1 \cup c_1 = b_1$ et, pour tout élément $x = a_i$ tel que $a < x \leq a_1$, on a $(a_i \cup b) \cap c_1 = b_i \cap c_1 = c_i$.

Le treillis B13 satisfait donc aux conditions (R), (I), (F), (B), (J), (α), (γ), (β), (6), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (2^i), (1^i), (5).

9° B16 ([33]) : Les éléments du treillis B16 sont ceux des deux chaînes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, les éléments c_{ij}, où i, j sont des entiers positifs quelconques et les

([33]) Les contre-exemples B16 et B14 sont directement inspirés d'un exemple de R. P. DILWORTH, [1], p. 349.

éléments a et b. On voit aisément que l'ensemble partiellement ordonné défini par le diagramme satisfait à la condition de chaîne ascendante et que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. On a donc bien un treillis complet. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a' et b'. Celui-ci satisfait à la condition (1), donc le treillis B 16 satisfait à la condition (1^i). Le treillis B 16 ne satisfait pas à la condition (2), car b couvre $a = a_1 \cap b$ sans que $b_1 = a_1 \cup b$ couvre a_1.

Parmi les conditions étudiées, les seules auxquelles satisfasse le treillis B 16 sont donc les conditions (1^i) et (1) [et la condition équivalente (1_i)].

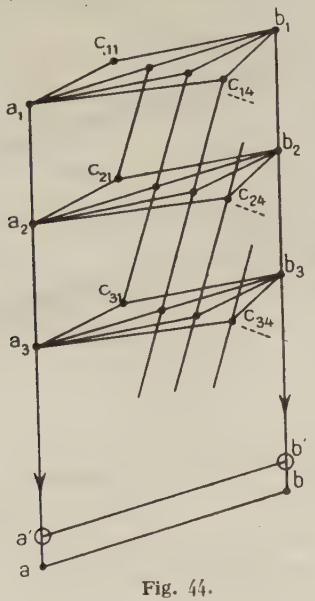


Fig. 44.

10° B 14 : Les éléments du treillis B 14 sont ceux des chaînes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$, $\{g_n\}$, les éléments c_{ij} et f_{ij}, où i et j sont des entiers positifs quelconques et l'élément a. Là aussi, on voit immédiatement que le diagramme représente un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. On a affaire à un treillis complet. Considérons deux éléments autres que a : ils appartiennent à un sous-treillis convexe $[a_n, b_1]$ (il suffit de prendre pour n le maximum de l'indice des éléments à un seul indice et du premier indice des éléments à deux indices). Il en résulte que le treillis B 14 possèdera toutes les propriétés (parmi celles qu'on étudie ici et autres que celles portant sur le treillis des idéaux duaux) de ces sous-treillis. Or, ceux-ci sont de longueur finie et possèdent la propriété (1). Ils possèdent donc toutes les propriétés envisagées ([34]). On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments

([34]) D'après leur équivalence dans les treillis de longueur finie, établie au Chapitre III.

a', b', d', e', g'. Ce treillis ne satisfait pas à la condition (1), puisque b' et d' couvrent a', alors que e' ne couvre pas d'.

Le treillis B14 possède donc toutes les propriétés étudiées, sauf les propriétés (α^i), (2^i), (1^i).

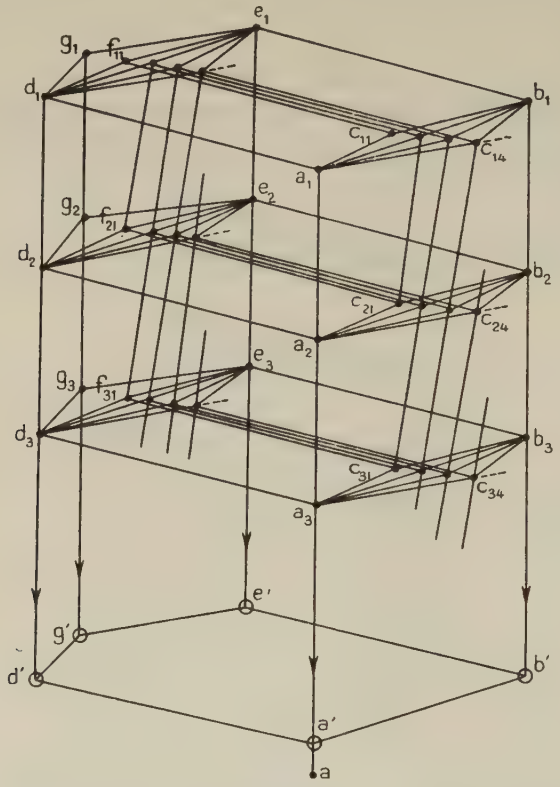


Fig. 45.

c. Treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante ([35]).

1° C1 : Le treillis C1 est le treillis dual du treillis B1. Ce treillis satisfait à la

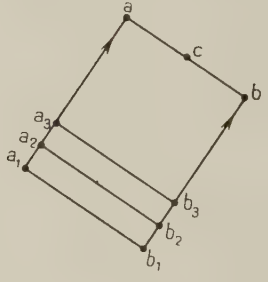


Fig. 46.

([35]) Le contre-exemple C8 qui est modulaire sera étudié dans R. Croisot [3], Chapitre I.

condition (1). Il ne satisfait pas à la condition (γ), ni à la condition (β), car le couple (b, a_1) vérifie la propriété c, donc aussi la propriété b, alors que le couple (a_1, b) ne les vérifie pas.

Le treillis C1 satisfait donc à la condition (1) [et à la condition ($1'$)]; il ne satisfait à aucune autre condition étudiée.

2° C2 : Le treillis C2 est le treillis dual du treillis B2. Le treillis de ses idéaux est donc dual du treillis des idéaux duaux du treillis B2. Le treillis C2 satisfait à la condition (S) : on voit aisément que les couples (a_i, c) possèdent la propriété s (et aussi la propriété r) et que les couples (b_j, c) possèdent également

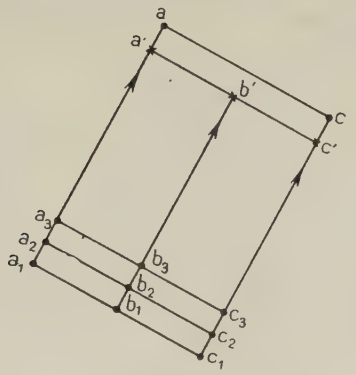


Fig. 47.

la propriété s (mais non la propriété r); les autres couples vérifient trivialement la propriété s (et la propriété r). Le treillis C2 ne satisfait pas à la condition (1_i), car b' et c couvre $c' = b' \cap c$ sans que $a = b' \cup c$ couvre b'. Il ne satisfait pas à la condition (γ), car le couple (c, a_1) possède la propriété c que ne possède pas le couple (a_1, c).

Le treillis C2 satisfait donc aux conditions (S), (β), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α_i), (R), (I), (2_i), (L), (1_i), (α), (γ).

3° C3 : Le treillis C3 est le treillis dual du treillis B3. Il satisfait à la condi-

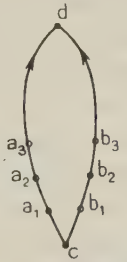


Fig. 48.

tion (β) et à la condition (γ), car aucun couple d'éléments (x, y) tel que l'on n'ait ni $x \geqq y$, ni $x \leqq y$ ne possède la propriété b, ni par conséquent la pro-

priété c. Il ne satisfait pas à la condition (1), car a_1 et b_1 couvrent c sans que d couvre a_1 et b_1.

Le treillis C3 satisfait donc aux conditions (γ) et (β) et seulement à celles-là.

4° C4 : Les éléments du treillis C4 sont ceux des trois chaînes $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{c_k\}$ et les éléments a et b. L'ensemble partiellement ordonné défini par le diagramme satisfait à la condition de chaîne descendante et est tel que deux éléments quelconques possèdent un plus grand minorant ; c'est donc un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (γ) : les couples d'éléments (a_i, c_k) avec $i \neq 1$, (b_j, c_k) avec $j \neq 1$, (a, c_k) et les couples symétriques ne possèdent pas la propriété c ; tous les autres couples la possèdent. Le treillis C4 ne satisfait pas à la condition (1), car b_2 et c_1 couvrent b_1 sans que b couvre b_2 et c_1. Il ne satisfait pas à la condition (β), car le couple (c_1, a) possède la propriété b et le couple (a, c_1) ne la possède pas.

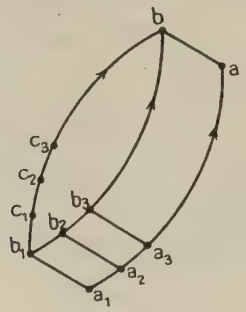


Fig. 49.

Le treillis C4 satisfait donc uniquement à la condition (γ) parmi les conditions étudiées.

5° C5 : Les éléments du treillis C5 sont a_{ijk}, b_{ijk}, a_{ij0}, a_{i0k}, où les indices sont des entiers positifs quelconques (à part que l'on exclut les éléments de la forme b_{i11}) et e. Le diagramme définit un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne descendante. On voit que deux éléments quelconques ont toujours un plus grand minorant. On a donc bien affaire à un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (L) : deux éléments de la forme a_{ijk} ou b_{ijk} appartiennent à un sous-treillis convexe de longueur finie vérifiant la condition (1), donc semi-modulaire, vérifiant donc aussi la condition (I) ([34]) ; il en résulte que les couples ainsi déterminés possèdent la propriété i ; on s'assure facilement qu'il en est de même des couples ayant un élément de la forme a_{ij0} ou a_{i0k} ou les deux. On obtient le treillis des idéaux en ajoutant les idéaux non principaux a'_{ij0}, a'_{i0k}, a'_{i00}, c'_i, d'_i, a'_{0j0}, a'_{00k}, a'_{000}, f'_i, g'_i. Le treillis C5 ne satisfait pas à la condition (1_i), car c'_1 et d'_1 couvrent a'_{100} sans que e couvre c'_1 et d'_1. Il ne satisfait pas à la condition (S) : le couple (a_{101}, a_{110})

ne possède pas la propriété *s*, car la chaîne $\{a_{i11} < e\}$ (i croissant à partir de 1) maximale entre a_{111} et e peut être obtenue à partir de la chaîne $\{(a_{i01}, a_{i10}) < (e, e)\}$ du produit cardinal $[a_{101}, e][a_{110}, e]$ et ne peut pas être obtenue à partir d'une chaîne maximale de ce produit cardinal.

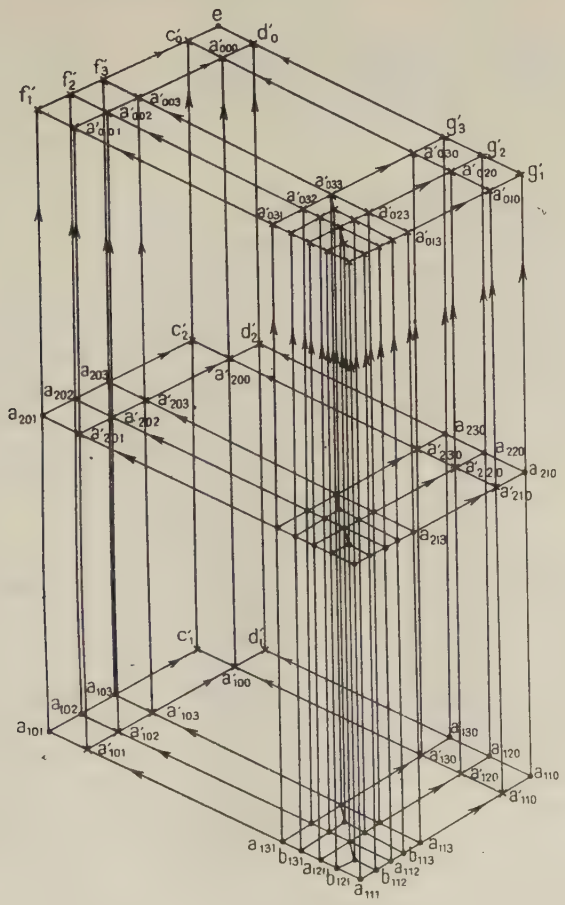


Fig. 30.

Le treillis C5 satisfait donc aux conditions (I), (L), (α), (γ), (β), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α_i), (R), (2_i), (S), (1_i).

6° C9 : Les éléments du treillis C9 sont a_{ij}, b_{ij}, a_{i0}, a_{0j}, e_{ij}, f_{ij}, e_{i0}, e_{0j}, e (les indices sont des entiers positifs quelconques à part que l'on exclut les éléments b_{11} et f_{11}). On voit facilement qu'il s'agit bien d'un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (R) et à la condition (I) : deux éléments de la forme a_{ij}, b_{ij}, e_{ij} ou f_{ij} appartiennent à un sous-treillis convexe de longueur finie vérifiant

la condition (1), donc semi-modulaire et vérifiant les conditions (R) et (I) ([34]); les couples d'éléments ainsi déterminés possèdent donc les propriétés r et i; on voit aisément qu'il en est de même des couples ayant un ou deux éléments de l'une des formes a_{i0}, a_{0j}, e_{i0}, e_{0j}. On obtient le treillis des idéaux en ajoutant les éléments a'_{i0}, a'_{0j}, a'_{00}, e'_{i0}, e'_{0j}, e'_{00}, c', d', g', h'. Ce treillis ne satisfait pas à la condition (1), puisque c' et d' couvrent a'_{00} sans que e couvre c' et d'. Le treillis C9 ne satisfait donc pas à la condition (1_i).

Finalement, le treillis C9 satisfait à toutes les conditions étudiées, sauf aux conditions (α_i), (2_i), (1_i).

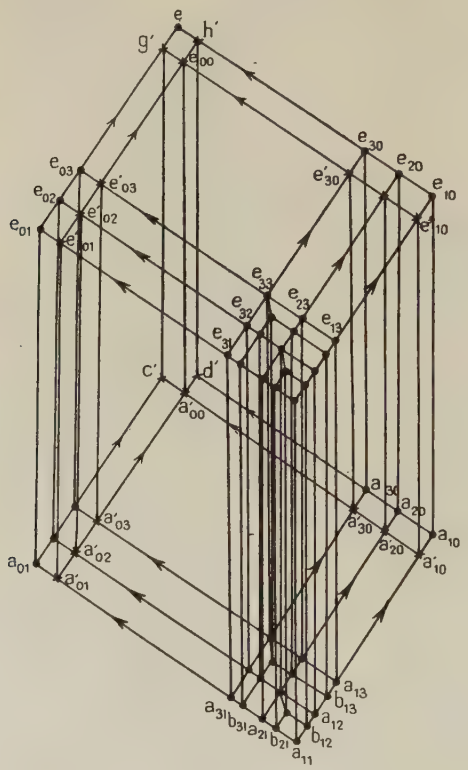


Fig. 51.

CHAPITRE III.

Application a la caractérisation des treillis semi-modulaires de longueur finie.

Lemme. — *Dans les treillis de longueur finie, toutes les conditions étudiées sont équivalentes.*

Démonstration. — Un treillis de longueur finie satisfait à la fois à la condition

de chaîne ascendante et à la condition de chaîne descendante ([36]). Les théorèmes 2 et 3 du Chapitre II entraînent alors les conséquences suivantes :

D'après le théorème 2, les conditions (I), (L), (M) sont équivalentes, les conditions (2_i), (2), (3) sont équivalentes. D'après le théorème 3, les conditions (J), (F), (B), (M), (2), (6), (5), (2^i), (3) sont équivalentes. Il en résulte l'équivalence de toutes ces conditions. De plus, d'après le théorème 2, (L) entraîne (α) et (γ), (B) entraîne (β) et l'une quelconque de ces conditions entraîne (2). Les conditions (α), (γ), (β) sont donc équivalentes aux précédentes. Il en est de même de la condition (α_i) équivalente à (α) d'après le théorème 2 et de la condition (α^i), également équivalente à (α) d'après le théorème 3.

La condition (S) équivaut à la condition (R), d'après le théorème 2 et les conditions (1), (1_i), (1^i) sont équivalentes, d'après les théorèmes 2 et 3.

Puisque (R) entraîne (2) et que (2) entraîne (1), on établira l'équivalence totale des conditions étudiées en montrant que (1) entraîne (R).

Or, on sait ([37]) que la condition (1) caractérise la semi-modularité et que, dans un treillis semi-modulaire de longueur finie, la condition de chaîne de Jordan-Dedekind est vérifiée et, pour tout couple d'éléments (x, y), les longueurs des chaînes maximales sans répétition joignant $x \cap y$ à x d'une part, y à $x \cup y$ d'autre part, sont liées par l'inégalité

$$\lg[x \cap y, x] \geqq \lg[y, x \cup y].$$

Supposons alors que, dans un treillis de longueur finie satisfaisant à la condition (1), pour un couple d'éléments (x, y), une chaîne $\{z_i\}$ maximale sans répétition (de longueur l) entre $x \cap y$ et $x \cup y$ soit obtenue sous la forme $z_i = x_i \cap y_i$ à partir d'une chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ du produit cardinal $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$. Cette chaîne est évidemment sans répétition et sa longueur qui doit être l est inférieure ou égale à la longueur du produit cardinal dont elle est extraite. La longueur d'un produit cardinal étant égale à la somme des longueurs des treillis composants, on doit avoir

$$l \leqq \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y].$$

Or, l n'est autre que $\lg[x \cap y, x \cup y]$. Tenant compte de l'inégalité précédente, on a donc

$$\begin{aligned} \lg[x \cap y, x \cup y] = l &\leqq \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y] \\ &\leqq \lg[x, x \cup y] + \lg[x \cap y, x] = \lg[x \cap y, x \cup y]. \end{aligned}$$

([36]) Remarquons aussi qu'un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition de chaîne descendante, ainsi qu'à une des conditions étudiées est semi-modulaire de longueur finie. Il suffit, d'après la démonstration du lemme, de montrer que ceci est vrai avec la condition (1). On montre pour cela que, si une chaîne de a à b est de longueur finie, toutes les chaînes de a à b ont même longueur (récurrence sur la longueur de la chaîne).

([37]) G. Birkhoff [1], p. 100.

On en déduit $l = \lg[x, x \cup y] + \lg[y, x \cup y]$, c'est-à-dire que la chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ est nécessairement maximale. La condition (R) est vérifiée et l'équivalence des conditions étudiées est établie.

THÉORÈME. — *Un treillis de longueur finie est semi-modulaire si et seulement s'il satisfait à l'une quelconque des conditions suivantes* ([38]) :

(R) Pour tout couple (x, y) d'éléments, si une chaîne $\{z_i\}$ maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$ est obtenue sous la forme $z_i = x_i \cap y_i$ à partir d'une chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ du produit cardinal $[x, x \cup y] \times [y, x \cup y]$, cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(S) Pour tout couple (x, y), avec les hypothèses précédentes, la chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ assurant cette obtention peut être choisie maximale.

(S_1) Pour tout couple (x, y), avec les hypothèses précédentes, la chaîne $\{(z_i \cup x, z_i \cup y)\}$ est maximale.

(I) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$ est obtenue sous la forme $x_i = z_i \cap x$, $y_i = z_i \cap y$

([38]) On pourrait espérer caractériser les treillis semi-modulaires de longueur finie par l'absence de certains sous-treillis en analogie avec la caractérisation des treillis modulaires et des treillis distributifs par ce moyen. Guidé par cette idée, j'ai pensé un moment que les treillis semi-modulaires de longueur finie ne possèdent pas de sous-treillis isomorphe au suivant (*fig.* 52), où d couvre e dans le treillis (et, par suite, où b couvre c, et f couvre g). Il n'en est rien comme le montre l'exemple figure 53.

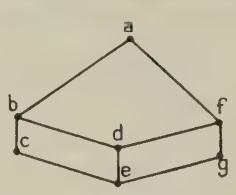


Fig. 52.

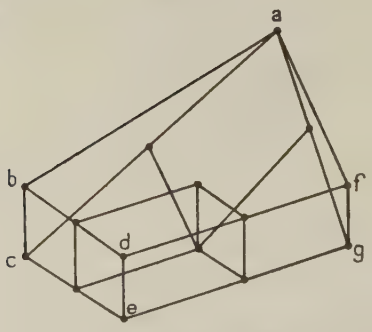


Fig. 53.

à partir d'une chaîne $\{z_i\}$ entre $x \cap y$ et $x \cup y$, cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(J) Pour tout couple (x, y), avec les hypothèses précédentes, la chaîne $\{z_i\}$ assurant l'obtention peut être choisie maximale.

(J_1) Pour tout couple (x, y), avec les hypothèses précédentes, la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$ est maximale.

(L) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{x_i\}$ maximale entre $x \cap y$ et x est obtenue sous la forme $x_i = y_i \cap x$ à partir d'une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$, cette dernière chaîne est nécessairement maximale.

(M) Pour tout couple (x, y), avec les mêmes hypothèses, la chaîne $\{y_i\}$ peut être choisie maximale.

(M_1) Pour tout couple (x, y), avec les mêmes hypothèses, la chaîne $\{x_i \cup y\}$ est maximale.

(F) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{(x_i, y_i)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x \cap y, x] \times [x \cap y, y]$, la chaîne $\{x_i \cup y_i\}$ est maximale entre $x \cap y$ et $x \cup y$.

(B) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{x_i\}$ est maximale entre $x \cap y$ et x, la chaîne $\{x_i \cup y\}$ est maximale entre y et $x \cup y$ ([39]).

(β) Si la propriété précédente a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le couple (y, x).

(γ) Si la propriété suivante a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le couple (y, x) : si une chaîne $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x est maximale sans répétition, la chaîne $\{x_i \cup y\}$ est maximale sans répétition entre y et $x \cup y$.

(5) $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$ il existe t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $(x \cup t) \cap z = x$.

(5a) $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$ il existe t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $(x \cup t) \cap z = x$.

(6) $y \cap z < x < z < y \cup z \Rightarrow$ il existe t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $(x \cup t) \cap z < z$.

(6a) $y \cap z < x < z < y \cup x \Rightarrow$ il existe t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $(x \cup t) \cap z < z$.

(1) x et y couvrent $x \cap y \Rightarrow x \cup y$ couvre x et y.

(2) x couvre $x \cap y \Rightarrow x \cup y$ couvre y.

(2b) x couvre $x \cap y$ et $z \geq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$.

(2c) x couvre $x \cap z$ et $z \geq y \Rightarrow z \cap (x \cup y) = (z \cap x) \cup y$.

(3) x couvre y et z couvre $t \Rightarrow [(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$.

(α_1) Si la propriété suivante a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le couple (y, x) : si une chaîne $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x est sans répétition, la chaîne $\{x_i \cup y\}$ est sans répétition.

(α_2) Si la propriété suivante a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le couple (y, x) : l'application $x' \to x' \cup y$ du sous-treillis $[x \cap y, x]$ dans le sous-treillis $[y, x \cup y]$ est biunivoque.

(α_3) Si la propriété suivante a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le

([39]) Les conditions (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), (B_5), (B_6), (B_7), ($\bar{B}$), signalées à la fin du Chapitre I, équivalent évidemment aussi à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie.

couple (y, x) : l'application $y' \to y' \cap x$ du sous-treillis $[y, x \cup y]$ dans le sous-treillis $[x \cap y, x]$ est une application sur.

(α_4) Si la propriété suivante a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le couple (y, x) : toute chaîne maximale $\{x_i\}$ entre $x \cap y$ et x peut être obtenue sous la forme $x_i = y_i \cap x$, à partir d'une chaîne $\{y_i\}$ entre y et $x \cup y$.

(α_5) Si la propriété suivante a lieu pour un couple (x, y), elle a lieu pour le couple (y, x) : $x \cap y \leq z \leq x \Rightarrow (z \cup y) \cap x = z$.

(α_6) Si un couple (x, y) est modulaire, le couple (y, x) est modulaire.

Démonstration. — L'équivalence de ces diverses conditions à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie résulte du lemme précédent et des théorèmes 1, 4, 5, 6, 7 du Chapitre I.

CHAPITRE IV.

Étude d'un exemple de treillis semi-modulaire de longueur infinie : le treillis des variétés linéaires de l'espace de Hilbert.

1. Généralités. — Plaçons-nous dans l'ensemble des sous-ensembles de vecteurs de l'espace de Hilbert H (c'est évidemment une algèbre de Boole vis-à-vis de la relation d'inclusion). Le sous-ensemble vide sera représenté par $\varnothing$.

a. Si X est le sous-ensemble générique, le passage de X à la variété linéaire $\overline{X}$ engendrée par X est une opération de fermeture ([40]) : on a les propriétés caractéristiques d'extensivité $(X \subset \overline{X})$, d'idempotence $(\overline{\overline{X}} = \overline{X})$, d'isotonie $(X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y})$. Il en résulte que l'ensemble des variétés linéaires constitue un *treillis complet* T_0 vis-à-vis de la relation d'inclusion. Ces variétés linéaires ne sont autres que les sous-groupes permis du groupe abélien à opérateurs, dont les éléments sont les vecteurs de l'espace de Hilbert; le treillis T_0 est donc un *treillis modulaire*.

b. Le passage d'une variété linéaire $\overline{X}$ à la variété linéaire fermée $\overline{X}^*$ qu'elle engendre (ou plus généralement le passage d'un sous-ensemble à la variété linéaire fermée qu'il engendre) est encore une opération de fermeture : les trois propriétés caractéristiques sont satisfaites. L'ensemble des variétés linéaires fermées constitue donc un *treillis complet* T_1 vis-à-vis de la relation d'inclusion. Ce n'est pas un sous-treillis de T_0 car, si l'intersection de deux variétés linéaires

([40]) G. Birkhoff [1], p. 49.

fermées est bien une variété linéaire fermée, il n'en est pas de même de leur somme linéaire ([41]). D'ailleurs, le treillis T_1 n'est pas modulaire ([42]).

C'est T_1 que nous allons étudier en utilisant les résultats du Chapitre I. Nous rapporterons l'espace de Hilbert à un système orthonormal complet ([43]) : $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots$. Nous désignerons les variétés linéaires fermées par des lettres capitales sans barre ni astérisque, aucune confusion n'étant à craindre. $A = (\xi_1, \xi_2)$ désignera par exemple la variété linéaire (fermée) engendrée par les vecteurs ξ_1 et ξ_2.

Remarquons tout de suite que T_1 ne satisfait ni à la condition de chaîne ascendante ni à la condition de chaîne descendante : la chaîne

$$\{ A_0 = \emptyset < A_1 < A_2 < \ldots < A_n < \ldots \},$$

où $A_i = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ est une chaîne ascendante infinie, alors que la chaîne $\{ D_0 = H > D_1 > \ldots > D_n > \ldots \}$, où $D_i = (\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \ldots, \xi_n, \ldots)$ est une chaîne descendante infinie.

c. Signalons encore que T_0 et T_1 admettent comme sous-treillis commun, le treillis T_2 de toutes les variétés linéaires de dimension finie. Celui-ci est *modulaire* mais *non complet* (il ne possède pas d'élément universel). Toutefois, il satisfait à la condition de chaîne descendante et est par conséquent *conditionnellement complet.*

2. Propriétés de couverture du treillis T_1.

a. Lemme 1. — *A couvre B si et seulement si A est engendré par les éléments de B auxquels on ajoute un seul élément.*

Si A couvre B, soit ξ un élément quelconque de H appartenant à A et n'appartenant pas à B. La variété linéaire X engendrée par ξ et par les éléments de B satisfait à $B < X \leq A$. On en tire immédiatement $X = A$.

Supposons maintenant que A soit engendrée par les éléments de B auxquels on a ajouté un élément ξ. Montrons que A couvre B. Soit, pour cela, une variété linéaire fermée B′ tel que l'on ait $B < B' \leq A$. On peut trouver dans B′ un élément η n'appartenant pas à B. L'élément η appartient à A. Or, les éléments de A sont les éléments de la variété linéaire engendrée par ξ et les éléments de B,

([41]) M. H. Stone [1], p. 21, où l'on peut trouver un contre-exemple. D'ailleurs, au paragraphe 4, la somme linéaire des sous-espaces B et X ne contient pas le vecteur ξ_1 que contient le sous-espace linéaire fermé qu'ils engendrent.

([42]) G. Birkhoff et J. von Neumann [2], où l'on indique un sous-treillis non modulaire qui est d'ailleurs à la base de l'étude faite au paragraphe 4 : c'est le sous-treillis $\{ B, A, X, H, \ldots \}$.

([43]) G. Julia [1], p. 9.

donc les éléments de la forme $\beta+\lambda\xi$ (où $\beta\in B$ et où λ est un scalaire), car cette variété linéaire est fermée, (ξ) étant de dimension finie. On a donc $\eta=\beta+\lambda\xi$; de $\eta\notin B$, on déduit $\lambda\neq 0$, d'où $\xi=\frac{\eta-\beta}{\lambda}$ et, finalement, $\xi\notin B'$ et $A\not\leq B'$. D'où $B'=A$ et A couvre B.

La démonstration prouve que l'on peut prendre pour l'élément ξ un élément quelconque de A n'appartenant pas à B.

b. Lemme 2. — *Soient* A *et* B *deux éléments de* T_4 *tels que l'on ait* $A>B$. *Alors, on peut trouver un élément de* T_4, *soit* C, *tel que l'on ait* $A\geq C>B$ *et* C *couvre* B.

C'est une conséquence facile du lemme 1. Soit ξ un élément de H appartenant à A sans appartenir à B. La variété linéaire (fermée) engendrée par les éléments de B auxquels on ajoute ξ répond à la question.

c. Le treillis T_4 satisfait aux conditions $(L\gamma)$, $(L\gamma')$, $(L\gamma R)$, $(L\gamma R')$ de G. Birkhoff [1] (*voir* R. Croisot [3], Chap. II).

Dans le treillis T_4, les points (au sens de la théorie des treillis) sont évidemment les variétés linéaires de dimension 1. Il est trivial que chaque variété linéaire fermée A (en particulier, l'espace entier H) est engendrée par les éléments des points P tels que l'on ait $P\not\leq A$. Il est bien connu que, pour chaque variété linéaire fermée A, on peut trouver une variété linéaire fermée A' telle que l'on ait $A\cap A'=\emptyset$ et $A\cup A'=H$ [on prend, par exemple, pour A', la variété orthogonale complémentaire de A ([44])]. Pour montrer l'existence des compléments relatifs, il suffit de remarquer que le sous-treillis convexe [A, B] (où $A<B$) est isomorphe soit au treillis T_4, soit au treillis des variétés linéaires d'un espace à un nombre fini de dimensions construit à partir du corps des nombres complexes [espaces unitaires ([45])].

Signalons également que, dans le treillis T_4, la $\cap$-continuité est en défaut. Prenons la chaine ascendante $\{X_i\}$ telle que $X_i=(\eta_{i1},\ \eta_{i2},\ \ldots,\ \eta_{ii})$ avec $\eta_{i1}=\xi_1+\frac{\xi_3}{10^3}$, $\eta_{i2}=\xi_1+\frac{\xi_3}{10^5}$, $\ldots$ $\eta_{in}=\xi_1+\frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n+1}}$, $\ldots$ On a $X_i\uparrow X$ avec $X=(\xi_1,\xi_3,\ \xi_5,\ \ldots,\ \xi_{2n+1},\ \ldots)$. Considérons d'autre part, $Y=(\xi_1)$. On a $X_i\cap Y=\emptyset$ pour tout i, d'où $X_i\cap Y\uparrow\emptyset$. Pourtant, on a $X\cap Y=(\xi_1)$ ([46]).

3. Auto-dualité du treillis T_4. — Il est bien connu que l'application $X\to X'$ de la variété linéaire fermée générique de l'espace de Hilbert sur la variété

([44]) G. Julia [1], p. 51.

([45]) M. H. Stone [1], p. 16-18.

([46]) Ceci provient du fait que X n'est pas la réunion des X_i au sens de la théorie des ensembles. Il n'en est pas ainsi dans le treillis des partitions d'un ensemble (*voir* R. Croisot [3], Chap. II). On pourra rapprocher aussi l'exercice 3, p. 64 de G. Birkhoff [1].

linéaire orthogonale complémentaire est telle que l'on ait, outre $X \cap X' = o$ et $X \cup X' = H$,

$$(X \cap Y)' = X' \cup Y' \quad \text{et} \quad (X \cup Y)' = X' \cap Y'.$$

Cette application réalise un automorphisme dual de T_1 ([47]).
On déduit de là la validité de l'énoncé dual de celui du lemme 2.

4. Étude, dans le treillis T_1, des conditions du Chapitre I.

a. Lemme 3. — *Le treillis* T_1 *satisfait à la condition* (2).

Soient A et B deux variétés linéaires fermées telles que A couvre $A \cap B$. Soit $\{\xi_\iota\}$ un système de générateurs de $A \cap B$. On a $A \cap B = (\{\xi_\iota\})$. Puisque A couvre $A \cap B$, il existe d'après le lemme 1 un élément α de H tel que l'on ait $A = (\{\xi_\iota\}, \alpha)$. Soit $\{\xi_\iota, \eta_\chi\}$ un système de générateurs de B. On a évidemment $A \cup B = (\{\xi_\iota, \eta_\chi\}, \alpha)$. D'après le lemme 1, $A \cup B$ couvre B, car α ne peut appartenir à B puisqu'il n'appartient certainement pas à $A \cap B$.

Lemme 4. — *Le treillis* T_1 *satisfait à la condition* (5).

Ceci résulte d'une remarque de R. P. Dilworth [1] selon laquelle, dans les treillis satisfaisant à la condition du lemme 2, la condition (2) entraîne la condition (5).

Cette propriété est facile à démontrer : Soient X, Y, Z, tels que l'on ait

$$X \cap Y < Z < Y < X \cup Z.$$

Prenons T tel que l'on ait $X \cap Y < T \leq X$ et T couvre $X \cap Y$. D'après (2), on a $Z \cup T$ couvre Z et, puisqu'on a certainement $Z \cup T \not\leq Y$, on en déduit

$$(Z \cup T) \cap Y = Z.$$

b. Nous considérons le sous-treillis de T_1 indiqué dans G. Birkhoff et J. von Neumann [2] constitué par les éléments $B = (\{\xi_{2n}\})$, où n est un entier positif quelconque,

$$X = \left(\left\{\frac{\xi_1}{10^n} + \xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}}\right\}\right), \quad A = \left(\xi_1, \left\{\xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}}\right\}\right), \quad \text{ø et H.}$$

On a évidemment $A > X$ et $B \cap A = B \cap X = \text{ø}$, $B \cup A = B \cup X = H$.

Lemme 5. — *Le couple* (B, A) *possède la propriété a.*

([47]) G. Birkhoff [1], exercice 4, p. 124. Ceci est un cas particulier du corollaire du théorème 9, p. 54.

Soit $U \leq B$. Il faut établir $(U \cup A) \cap B = U$. On a évidemment $U \leq (U \cup A) \cap B$. Soit maintenant η_1 un élément de H appartenant à $(U \cup A) \cap B$. On a $\eta_1 \in B$ et $\eta_1 \in U \cup A$. Or, $U \cup A$ est l'ensemble des éléments de la forme $\mu + \alpha$ avec $\mu \in U$ et $\alpha \in A$ et des limites fortes de tels éléments. Si l'on a $\eta_1 = \mu + \alpha$, on en déduit $\alpha \in B$, d'où $\alpha \in A \cap B = o$, soit $\alpha = o$ et $\eta_1 = \mu \in U$. Si $\eta_1 = \lim_{n \to \infty} \mu_n + \alpha_n$, la projection de $\mu_n + \alpha_n$ sur B', variété linéaire orthogonale complémentaire de B, tend vers celle de η_1, donc tend vers zéro. Or, cette projection provient seulement de α_n; donc la projection de α_n sur chacun des vecteurs ξ_{2i+1} tend vers zéro, ainsi que sa projection sur ξ_1 ; il en résulte que les projections de α_n sur tous les vecteurs de la base orthogonale $\left\{ \xi_1, \xi_{2i} + \frac{\xi_{2i+1}}{10^{2i}} \right\}$ de A tendent vers zéro; autrement dit, α_n tend vers zéro et l'on a $\eta_1 = \lim_{n \to \infty} \mu_n \in U$. Finalement, on a $(U \cup A) \cap B \leq U$, d'où $(U \cup A) \cap B = U$.

Lemme 6. — *Le couple* (A, B) *possède la propriété a'.*

Soit $V \geq A$. Il faut établir $(V \cap B) \cup A = V$. Nous transformons par la dualité du paragraphe 3. Il faut établir $(V' \cup B') \cap A' = V'$ pour tout V' tel que l'on ait $V' \leq A'$, c'est-à-dire qu'il faut montrer que le couple (A', B') possède la propriété *a*. On voit aisément que l'on a $A' = \left(\left\{ \xi_{2n+1} - \frac{\zeta_{2n}}{10^{2n}} \right\} \right)$, $B' = (\{ \xi_1, \xi_{2n+1} \})$. Faisons, dans l'espace de Hilbert, le changement de système orthonormal complet défini par les formules suivantes :

$$\eta_{i1} = \xi_1,$$

$$\eta_{i2n} = \frac{1}{K_n} \left(\xi_{2n+1} - \frac{\xi_{2n}}{10^{2n}} \right) \qquad \text{avec} \quad K_n^2 = 1 + \frac{1}{10^{4n}},$$

$$\eta_{i2n+1} = \frac{1}{K_n} \left(\xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}} \right)$$

ou les formules équivalentes :

$$\xi_1 = \eta_{i1},$$

$$\xi_{2n} = \frac{1}{K_n} \left(\eta_{i2n+1} - \frac{\eta_{i2n}}{10^{2n}} \right),$$

$$\xi_{2n+1} = \frac{1}{K_n} \left(\eta_{i2n} + \frac{\eta_{i2n+1}}{10^{2n}} \right).$$

Rapportées au nouveau système de base, les variétés A' et B' s'écrivent respectivement :

$$A' = (\{ \eta_{i2n} \}), \quad B' = \left(\left\{ \eta_{i1}, \eta_{i2n} + \frac{\eta_{i2n+1}}{10^{2n}} \right\} \right).$$

Il suffit d'appliquer le lemme 5 pour voir que le couple (A', B') possède la propriété *a*.

LEMME 7. — *Le couple* (A, B) *ne possède pas la propriété a.*

On a, en effet, $(X \cup B) \cap A = A \neq X$.

LEMME 8. — *Le couple* (A, B) *ne vérifie pas la propriété b.*

Revenons à A' et B' comme dans la démonstration du lemme 6. Soit

$$Y' = \left(\left\{ \frac{\eta_1}{10^n} + \eta_{12n} + \frac{\eta_{12n+1}}{10^{2n}} \right\} \right).$$

On a $Y' < B'$. Considérons la chaine $\{ Y'_0 = o < Y'_1 < Y'_2 < \ldots < Y'_i < \ldots < Y' \}$ maximale entre o et Y', où l'on a

$$Y'_i = \left(\left\{ \frac{\eta_1}{10^n} + \eta_{12n} + \frac{\eta_{12n+1}}{10^{2n}} \right\}_{n \leq i} \right).$$

Formons la chaine $\{ Y'_i \cup A' < H \}$. On a

$$Y'_i \cup A' = \left(\{ \eta_{12n} \}, \left\{ \eta_1 + \frac{\eta_{12n+1}}{10^n} \right\}_{n \leq i} \right).$$

La chaine $Y'_i \cup A'$ est maximale entre A' et H. Montrons qu'on a $(Y'_i \cup A') \cap B' = Y'_i$. Soit ξ un élément de $(Y'_i \cup A') \cap B'$. De $\xi = \eta'_i + \alpha'$ avec $\eta'_i \in Y'_i$ et $\alpha' \in A'$, on déduit $\alpha' \in B'$, d'où $\alpha \in A' \cap B' = o$ et $\alpha' = o$, d'où $\xi = \eta'_i \in Y'_i$. Il résulte de là que l'on a $(Y'_i \cup A') \cap B' = Y'_i$.

En revenant à A et B par dualité, on obtient une chaine, la transformée de la chaine $\{ Y'_i \cup A' < H \}$, maximale entre o et A, qui donne une chaine, la transformée de la chaine $\{ Y'_i < B' \}$, non maximale entre B et H puisqu'on peut y intercaler Y, variété transformée de Y'.

LEMME 9. — *Le couple* (B, X) *ne possède pas la propriété m.*

Soit la chaine $\{ o < \ldots < B_i < \ldots < B_2 < B_1 < B_0 = B \}$, où l'on a

$$B_i = (\{ \xi_{2n} \}_{n > i}).$$

Cette chaine est maximale entre o et B. Or, on a $(B_i \cup A) \cap B = B_i$, puisque le couple (B, A) possède la propriété *a*. D'autre part, on a $B_i \cup X \geq A$ (car $B_i \cup X$ contient ξ_1), d'où $B_i \cup X = B_i \cup A$ et $(B_i \cup X) \cap B = B_i$. Finalement, la chaine $\{ X < \ldots < B_i \cup X < \ldots < H \}$ n'est pas maximale entre X et H, car on peut intercaler l'élément A. On pourrait évidemment l'intercaler dans n'importe quelle chaine entre X et H capable de redonner la chaine $(o < \ldots < B_i < \ldots < B)$. La propriété *m* est donc en défaut.

LEMME 10. — *Le couple* (B, X) *ne possède pas la propriété j.*

Soit la chaine $(\emptyset, \emptyset) < \ldots < (\emptyset, X_j) < \ldots < (\emptyset, X) < \ldots < (B_i, X) < \ldots < (B, X)\}$, où l'on a B_i comme dans la démonstration du lemme 9 et

$$X_j = \left(\left\{ \frac{\xi_1}{10^n} + \xi_{2n} + \frac{\xi_{2n+1}}{10^{2n}} \right\}_{n \leq j} \right).$$

Cette chaine est obtenue à partir de la chaine

$$\{\emptyset < \ldots < X_j < \ldots < X < \ldots < B_i \cup X < \ldots < H\}.$$

Elle ne peut être obtenue à partir d'une chaine maximale entre $\emptyset$ et H ; (B_i, X) doit être obtenu à partir d'un élément, soit C_i, tel que l'on ait $B_i \cup X \leq C_i$. De $C_i \geq A$, on déduit $(C_i \cap B) \cup A = C_i$ (lemme 6) et, puisqu'on veut obtenir (B_i, X), on doit avoir $C_i \cap B = B_i$, d'où $B_i \cup A = C_i$. On voit donc que (B_i, X) ne peut être obtenu qu'à partir de $B_i \cup X = B_i \cup A$. On voit aisément que l'on a $\bigcap_i (B_i \cup A) = A$.

Donc, A peut être intercalé dans la chaine assurant l'obtention s'il n'y figure pas. Puisqu'on cherche une chaine maximale, A doit y figurer. Or, A donne $(\emptyset, X)$. Si, maintenant, tous les $(\emptyset, X_j)$ sont obtenus à partir de X_j, on peut intercaler X dans la chaine envisagée et elle ne peut être maximale. Sinon, soit j_1 le premier indice j pour lequel X_j est obtenu à partir d'un élément différent de lui. Alors X_{j_1} peut évidemment être intercalé dans la chaine assurant l'obtention et celle-ci ne peut pas être choisie maximale. La propriété j est en défaut.

c. Théorème. — *Le treillis* T_1 *satisfait aux conditions* (5), (6), (2), (1), (3) *et à leurs duales. Il ne satisfait pas aux conditions* (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J_1), (J), (α), (β), (γ), (M), *ni à leurs duales.*

T_1 satisfait à (5), d'après le lemme 4. Il satisfait donc à (6), à (2), à (1), à (3) d'après le théorème 1 du Chapitre II. Il satisfait aux conditions duales puisqu'il est auto-dual.

D'après le lemme 5, le couple (B, A) possède la propriété *a* ; d'après le lemme 6, le couple (A, B) possède la propriété *a'*. Il en résulte que le couple (B, A) possède aussi la propriété *b* ; en effet, si $\{B_i\}$ était une chaine maximale entre $\emptyset$ et B telle que la chaine $\{B_i \cup A\}$ soit non maximale entre A et H, on pourrait intercaler dans cette dernière chaine un élément, soit C, qui serait tel que l'on ait $C \cap B = (B_i \cup A) \cap B = B_i$ pour un certain i (d'après la propriété *a*) et ceci contredirait le fait que le couple (A, B) possède la propriété *a'*. Le couple (B, A) possède donc la propriété *c* d'après une remarque déjà faite. Le couple (A, B) ne possédant, ni la propriété *a*, ni la propriété *b*, d'après les lemmes 7 et 8, ni évidemment la propriété *c*, les conditions (α), (β), (γ) sont en défaut. Les conditions (M) et (J) ne sont pas satisfaites d'après les lemmes 9 et 10. Les conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J_1) ne sont pas satisfaites d'après le théorème 1 du Chapitre II. Les conditions duales de ces conditions non satisfaites ne le sont pas non plus.

BIBLIOGRAPHIE.

G. Birkhoff [1], *Lattice theory* (*Colloquium*, 1949).

G. Birkhoff et J. von Neumann [2], *The logic of quantum mechanics* (*Annals of Math.*, 37, 1936, p. 823-843).

R.P. Dilworth [1], *Ideals in Birkhoff lattices* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 49, 1941, p. 325-353).

G. Julia [1], *Introduction mathématique aux théories quantiques*, 2e partie, Gauthier-Villars, 1938.

S. Mac Lane [1], *A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases* (*Duke Math. Journal*, 4, 1938, p. 455-468).

M. H. Stone [1], *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis* (*Colloquium*, 1932).

L. R. Wilcox [1], *Modularity in the theory of lattices* (*Annals of Math.*, 40, 1939, p. 490-505).

R. Croisot [1], *Axiomatique des treillis semi-modulaires* (*C. R. Acad. Sc.*, 231, 1950, p. 12).

R. Croisot [2], *Diverses caractérisations des treillis semi-modulaires, modulaires et distributifs* (*C. R. Acad. Sc.*, 231, 1950, p. 1399).

R. Croisot [3], *Quelques applications et propriétés des treillis semi-modulaires de longueur infinie* (Deuxième partie de ma thèse, à paraître aux *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*).

ÉTUDE DES RÉSEAUX DE COURBES

TRACÉS SUR UNE SURFACE CLOSE

ET EN GÉNÉRAL

LOCALEMENT HOMÉOMORPHES A UN FAISCEAU DE DROITES PARALLÈLES

PAR Mme DUBOIS-VIOLETTE.

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est l'étude des réseaux R de courbes situés sur une surface close. Ces réseaux sont supposés, en tout point de la surface à l'exception d'un nombre fini de points, localement homéomorphes à un faisceau plan de droites parallèles. Plus particulièrement, cette étude porte sur l'ensemble d'accumulation d'une courbe quelconque d'un tel réseau.

Avant d'aborder les réseaux R proprement dits, nous établirons dans une première Partie quelques résultats généraux relatifs aux surfaces et aux courbes fermées simples de Jordan situées sur les surfaces.

Nous établirons dans la deuxième Partie quelques résultats préliminaires relatifs aux réseaux R. Nous ferons ensuite l'étude locale de R au voisinage d'un point ordinaire, puis d'un point singulier. Enfin, nous déduirons de cette étude une forme particulière de la formule des points fixes.

Dans la troisième Partie, nous considérerons quelques exemples de réseaux R. Nous établirons l'existence de réseaux R admettant un système arbitraire de courbes fermées disjointes, à l'exclusion de toute autre courbe fermée. Nous étudierons, d'autre part, un réseau R, tracé sur une surface de genre 1, et admettant nécessairement une ou plusieurs courbes fermées.

Les deux dernières Parties abordent dans le cas général l'étude de l'ensemble d'accumulation des courbes de R. La quatrième Partie est développée dans le cadre des restrictions suivantes : 1° à tout point singulier aboutit un nombre

fini de courbes de R; 2° R n'admet pas de courbes fermées; 3° R satisfait à l'hypothèse (h) suivante : tout point de S est point d'accumulation pour au moins une courbe de R (Remarquons que cette hypothèse se trouve vérifiée lorsque les courbes de R sont des trajectoires récurrentes de la dynamique). Dans la cinquième Partie, nous étudions d'abord les réseaux R satisfaisant aux conditions précédentes 1° et 2° mais non plus à l'hypothèse (h), et nous montrons que toutes les courbes de R ont le même ensemble d'accumulation. Il est alors possible de déduire des résultats précédemment établis, l'étude complète de l'ensemble d'accumulation des courbes de R dans le cas le plus général. Cette étude souligne le rôle particulièrement important des réseaux R qui satisfont à l'hypothèse (h).

Je veux exprimer ici ma profonde gratitude à MM. Denjoy et Garnier dont les conseils et les encouragements m'ont été précieux. J'adresse tous mes remerciements à M. Valiron pour la bienveillance qu'il m'a toujours montrée, et je tiens à dire combien je suis reconnaissante à M. Favard : ce Mémoire doit beaucoup à l'attention particulière qu'il lui a accordée.

Dans ce tableau se trouve précisé le sens exact des termes utilisés :

surface, variété à deux dimensions;

surface close, surface qui n'a pas de frontière;

orbe, courbe de Jordan fermée simple tracée sur une surface;

bord d'une surface, orbe appartenant à la frontière de la surface;

nombre ou orbe de connexion d'une surface S, le nombre $N = I - \alpha$, où α est le nombre maximum de courbes fermées que l'on peut tracer sur S sans que la surface cesse d'être connexe; nous ne considérerons que des surfaces dont l'ordre de connexion est fini;

genre d'une surface orientable, le nombre $p = \frac{N - I}{2}$.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Théorème. — *Soit un orbe* Γ, *non homologue à* 0, *tracé sur une surface* S *de nombre de connexion* q. *Il existe une représentation de cette surface sur un polygone* π *à un seul sommet, dans laquelle à l'orbe* Γ *correspond un couple de côtés associés du polygone.* La représentation symbolique du polygone π n'est pas nécessairement de forme normale, mais elle est exclusivement constituée par des suites de côtés adjacents du type a^+a^+ ou $a^+b^+a^-b^-$.

1° *Supposons qu'il existe sur* S *un voisinage de* Γ *qui soit orientable.* Une coupure suivant Γ remplace S par une surface S′ présentant deux bords et de nombre de connexion $q - 1$. Il existe sur S′ un arc continu $\overset{\frown}{P_1P_2}$, joignant deux points situés respectivement sur chacun des bords de S′ et provenant

d'un même point de Γ. A cet arc correspond sur S un orbe Γ′. Une nouvelle coupure, effectuée suivant P_1P_2, remplace à son tour la surface S′ par une surface S_1, de nombre de connexion $q-2$, présentant un seul bord de représentation symbolique $\Gamma^+\Gamma'^+\Gamma^-\Gamma'^-$.

Si la surface S_1 n'est pas simplement connexe, il est possible de trouver un ensemble d'orbes, passant par le point commum à Γ^+ et Γ'^-, et rendant S_1 simplement connexe. Il existe donc une représentation de S_1 sur un polygone π' à un seul sommet et $2(q-2)+1$ côtés, dont un côté correspond au bord de S_1 et dont les autres côtés sont identifiés deux à deux. Il en résulte une représentation de S sur un polygone à un seul sommet et $2q$ côtés, dont la représentation symbolique commence par $\Gamma^+\Gamma'^+\Gamma^-\Gamma'^-$ et comporte exclusivement des suites de termes de la forme a^+a^+ ou $a^+b^+a^-b^-$. *Si la surface* S *est orientable, et seulement dans ce cas,* la représentation obtenue est de forme normale et ne contient pas de suite du types a^+a^+.

2° S'il n'existe sur S aucun voisinage orientable de Γ, une coupure suivant Γ remplace S par une surface S'_1, à un seul bord de représentation symbolique $\Gamma^+\Gamma^+$. En raisonnant sur S'_1 comme sur S_1 on obtient une représentation de S sur un polygone à un seul sommet dont le schéma commence par $\Gamma^+\Gamma^+$ et ne comporte que des suites de termes de la forme a^+a^+ ou $a^+b^+a^-b^-$. C'est seulement dans le cas où la coupure suivant Γ remplace S par une surface S'_1 non orientable que cette représentation peut être de forme normale.

2. *Définition et propriétés de l'étranglement d'un orbe* Γ *tracé sur une surface* S′. *Étant donné un orbe* Γ *tracé sur la surface* S, *nous appellerons étranglement de* Γ *l'ensemble des opérations suivantes :*

1° *coupure de* S *le long de* Γ;

2° *identification de tous les points appartenant à un même bord de la surface* S_1 *obtenue par la coupure précédente.*

S est ainsi remplacée par une surface S′. La courbe Γ correspond sur S′, soit à un point γ, soit à un couple de points γ_1 et γ_2 suivant l'orientabilité des voisinages de Γ sur S. Les points de S n'appartenant pas à Γ sont en correspondance biunivoque et réciproque avec les points de S′ autres que γ (ou γ_1 et γ_2).

A. *Si l'orbe* Γ *n'est pas homologue à* 0, nous pouvons, en vertu du théorème précédent, considérer une représentation de S sur un polygone π à un seul sommet, dans laquelle Γ correspond à un couple de côtés associés du polygone.

1er *cas.* — Γ *a un voisinage orientable sur* S. — Le polygone π a donc pour schéma $\Gamma^+\Gamma'^+\Gamma^-\Gamma'^-\ldots$

L'étranglement remplace π par un polygone π_1 de schéma $\Gamma'^{+}\Gamma'^{-}\ldots$. On peut alors faire disparaître le couple $\Gamma'^{+}\Gamma'^{-}$ et obtenir le polygone π' associé à S'. Si le nombre de connexion de S est q et si S est une surface close, le nombre de côtés de π' est $(2q-4)$. Par suite, S' est une surface close d'ordre de connexion $(q-2)$. Remarquons que la suppression des deux couples ne modifie en rien l'existence éventuelle d'un couple $\Gamma_i^{+}\Gamma_i^{+}$ dans le schéma de π, donc : *l'étranglement d'un orbe, admettant un voisinage orientable sur une surface* S *de nombre de connexion q, remplace* S *par une surface* S' *de nombre de connexion* $(q-2)$, *orientable ou non en même temps que* S.

2e *cas.* — Γ *n'a pas de voisinage orientable sur* S. — La coupure suivant Γ transforme S en une surface S'_1 à un seul bord et l'orbe Γ correspond, après étranglement, à un point unique de S'.

Le schéma du polygone π commence par $\Gamma^{+}\Gamma^{+}\ldots$. L'identification de tous les points de Γ remplace π par un polygone π' à un seul sommet et $2q-2$ côtés. La surface S, non orientable, de nombre de connexion q est alors remplacée par une surface S' close, de nombre de connexion $q-1$, qui peut être ou ne pas être orientable.

B. *Si l'orbe* Γ *est homologue à* 0, la coupure le long de Γ remplace S par deux surfaces ouvertes S'_1 et S'_2 ayant chacune un bord. Dans l'étranglement, S est remplacé par deux surfaces closes S_1 et S_2, la courbe Γ correspondant à un point γ_1 de S_1 et à un point γ_2 de S_2.

Nous pouvons représenter chacune des surfaces S'_1 et S'_2, sur des polygones π_1 et π_2 à un seul sommet, admettant $(2h_1+1)$ et $(2h_2+1)$ côtés qui sont identifiés deux à deux à l'exception du côté de chaque polygone qui correspond à Γ. Par identification des côtés de π_1 et π_2 correspondant à Γ_1 nous obtenons une représentation de S sur un polygone à un seul sommet et $(2h_1+2h_2)$ côtés. Par suite, $h_1+h_2=q$.

Comme la surface S_1 (ou S_2) se déduit de S'_1 (ou S'_2) par identification des points de S'_1 (ou S'_2) situés sur Γ, elle peut être représentée sur un polygone à un seul sommet et $2h_1$ (ou $2h_2$) côtés. *Le nombre de connexion de la surface* S *est donc égal à la somme des nombres de connexion de chacune des surfaces* S_1 *et* S_2.

Remarque. — Si, au lieu de réaliser l'étranglement d'un orbe Γ non homologue à 0 sur une surface S, on se contente de réaliser une coupure suivant Γ, on remplace S par une surface S_1 homéomorphe à une surface close, d'ordre de connexion $q-2$ ou $q-1$ (selon la nature des voisinages de Γ sur S), privée de deux ou une aires homéomorphes à l'intérieur d'un cercle.

Plus généralement, en effectuant sur S, α coupures le long d'orbes à voisinage orientable et β coupures le long d'orbes sans voisinage orientable, (α et β vérifiant $2\alpha+\beta=q$), on remplace S par une surface $S_{\alpha+\beta}$, si les orbes

considérés sont homologiquement indépendants. Celle-ci est homéomorphe à une sphère privée de $(2\alpha+\beta)$ aires simplement connexes.

De même, une coupure suivant un orbe homologue à o, remplace S par l'ensemble de deux surfaces ouvertes, homéomorphes à deux surfaces closes d'ordre de connexion q_1 et q_2 (avec $q_1+q_2=q$) privées chacune d'une aire simplement connexe.

3. Théorème. — *Deux orbes* Γ_1 *et* Γ_2 *tracés sur* S, *non homologues à* o, *homotopes et disjoints sont isotopes.*

1er *cas.* — Γ_1 *a un voisinage* V *orientable.* — Nous pouvons supposer que Γ_2 n'a aucun point intérieur à V. Il existe alors deux orbes C′ et C″, disjoints de Γ_2 et de Γ_1, isotopes à Γ_1 et situés dans V de part et d'autre de Γ_1.

Réalisons l'étranglement de Γ_1. A Γ_1 correspond sur S′ deux points γ et γ'. Aux orbes C′ et C″ correspondent deux orbes Γ′ et Γ″ limitant des aires (A′) et (A″) simplement connexes et contenant l'une γ', l'autre γ''. A Γ_2 correspond un orbe Γ'_2 homotope à o donc limitant, sur S′, une aire (A_2) simplement connexe. L'orbe Γ'_2 est extérieur aux aires (A′) et (A″) puisque Γ_2 n'a par hypothèse aucun point intérieur à V.

(A_2) contient un point et un seul du couple $\gamma'\gamma''$, sinon une aire de S simplement connexe correspondrait à (A_2), et Γ_2 serait homologue à o.

Soit γ' le point intérieur à (A_2). L'aire (A′) est alors intérieure à (A_2) et l'aire $[(A_2)-(A')]$ est homéomorphe à une couronne circulaire. Il existe donc une déformation isotope de Γ_2 en C′, et, puisque C′ est lui-même isotope à Γ_1, Γ_2 et Γ_1 sont isotopes.

2e *cas.* — Γ_1 *n'a pas de voisinage orientable.* — Dans ce cas, il n'existe pas d'ordre homotope à Γ_1, et disjoint de Γ_1.

En effet, réalisons l'étranglement de Γ_1. A Γ_1 correspond sur S′ un point γ'. S'il existait sur S un orbe Γ_2 homotope à Γ, et disjoint de Γ_1, il lui correspondrait sur S′ un orbe Γ'_2, homotope à o, limitant une aire simplement connexe (A_2). Si (A_2) ne contenait pas γ', Γ_2 serait homotope à o sur S, ce qui est contraire aux hypothèses. Mais si (A_2) contenait γ', Γ_2 limiterait sur S une aire de nombre de connexion 1, et serait ainsi homotope à $(2\Gamma_1)$ et non à Γ_1.

4. *Étude du nombre maximum d'orbes disjoints et homotopiquement distincts que l'on peut tracer simultanément sur une surface close d'ordre de connexion q.*

Considérons sur une surface S d'ordre de connexion q, un système U d'orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les orbes de U sont deux à deux disjoints;

2° Les orbes de U sont tous homotopiquement distincts;

3° Il est impossible de tracer sur S un orbe Γ_{i+1} sans point commun avec aucun des orbes de V et homotopiquement distinct de chacun d'entre eux.

Nous allons montrer qu'un tel système comprend un nombre borné d'orbes.

A. *Il existe dans* U *un orbe non homologue à* o *pourvu que* S *soit d'ordre de connexion* q *non nul.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi l'étranglement des orbes Γ_i remplacerait S par un ensemble de surfaces dont la somme des ordres de connexion serait q. Par suite, sur l'une au moins des surfaces on pourrait tracer un orbe non homologue à o ne passant par aucun des points correspondant à un orbe étranglé. Cet orbe correspondrait à un orbe Γ_{i+1} sur S, non homologue à o, disjoint et homotopiquement distinct des orbes de U qui ne vérifierait pas la condition 3°.

De façon plus générale, il existera dans U *un ensemble* U_1 *d'orbes ne morcelant pas* S, *et constitué par* α *orbes admettant un voisinage orientable sur* S, *et* β *orbes sans voisinage orientable et l'on a* $2\alpha+\beta=q$.

En effet, on ne peut avoir $2\alpha+\beta>q$, car l'étranglement de l'ensemble des orbes de U_1 remplacerait S par une surface d'ordre de connexion négatif, ce qui est absurde.

D'autre part, si $2\alpha+\beta<q$, l'étranglement des orbes de U n'appartenant pas à U_1 remplacerait S par un ensemble de surfaces dont la somme des ordres de connexion serait différente de o. L'existence d'orbes non homologues à o sur l'une, au moins, de ces surfaces, entraînerait l'existence d'un orbe Γ_{i+1} sur S, non homologue à o, disjoint et homotopiquement distinct des orbes de U qui ne vérifierait pas la condition 3°.

B. Soit Γ_1 un orbe non homologue à o. Une coupure suivant Γ_1, remplace S par une surface S_1 admettant deux ou un bords, selon que Γ_1 admet ou non un voisinage orientable.

Deux orbes, autres que Γ_1, homotopiquement distincts sur S resteront homotopiquement distincts sur S_1. Si, par ailleurs, le système U_1 des orbes Γ'_2, Γ'_3, ..., Γ'_i correspondant sur S_1 aux orbes Γ_2, Γ_3, ..., Γ_i de U, ne satisfait pas à la condition 3° énoncée au début de ce Chapitre, nous pourrons ajouter à U, un certain nombre d'orbes Γ'_{i+1} ....

1er *cas.* — Γ'_1 *a un voisinage orientable.* — La surface S_1 a deux bords Γ'_1 et Γ''_1.

Il existe, sur S, des orbes isotopes et disjoints de Γ_1. A chacun d'eux correspond sur S_1 un orbe isotope de Γ'_1 ou Γ''_1. Le système d'orbes Γ'_2, Γ'_3, ..., Γ'_i, Γ'_1, Γ''_1, satisfait sur S_1 aux trois conditions 1°, 2°, 3°. Par suite, si μ est le nombre maximum d'orbes d'un système U sur S, μ_1 le nombre analogue sur S_1, il vient : $\mu_1 \geq \mu+1$.

2e *cas.* — Γ_1 *n'a pas de voisinage orientable.* — La surface S_1 à un bord Γ'_1. Un orbe isotope à Γ'_1 sur S_1 correspond sur S à un orbe homotope à $2\Gamma_1$.

D'autre part, le système U sur S comprend certainement un orbe homotope à $2\Gamma_1$; sinon le système U pourrait être complété par un orbe Γ_{i+1} situé tout entier dans un voisinage de Γ_1 ne contenant aucun point des orbes $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$, et Γ_{i+1} serait homotope à $2\Gamma_1$. L'ensemble des orbes $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_i$ contient donc deux orbes homotopes sur S_1, et par suite : $\mu_1 \geqq \mu - 1$.

C. Nous pouvons opérer sur la surface S_1 comme nous avons opéré sur S. Après avoir effectué α coupures le long d'orbes $\Gamma_1, \Gamma'_2, \Gamma''_2, \ldots, \Gamma^{\alpha-1}_{\alpha}$, admettant des voisinages orientables, et β coupures le long d'orbes $\Gamma^{\alpha}_{\alpha+1}, \ldots, \Gamma^{\alpha+\beta-1}_{\alpha+\beta}$ sans voisinage orientable, nous obtenons une surface $S_{\alpha+\beta}$, admettant $(2\alpha+\beta)$ bords sur laquelle se trouve tracé un système d'orbes disjoints et homotopiquement distincts. Si $(2\alpha+\beta)=q$, $S_{\alpha+\beta}$ est homéomorphe à une sphère privée de $(2\alpha+\beta)$ aires simplement connexes. Le nombre maximum $\mu_{\alpha+\beta}$ d'orbes d'un système satisfaisant sur $S_{\alpha+\beta}$ aux conditions 1°, 2°, 3°, vérifie l'inégalité : $\mu \leqq \mu_{\alpha+\beta} - \alpha + \beta$.

Nous nous proposons de déterminer μ. Nous déterminerons d'abord $\mu_{\alpha+\beta}$, puis nous montrerons que $\mu = \mu_{\alpha+\beta} - \alpha + \beta$.

D. *Nombre maximum d'orbes d'un système* U_r *satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° *tracés sur une surface* Σ *de genre nul, présentant r bords* $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

U_r admet toujours un orbe et un seul homotope à o, et h_r orbes non homotopes à o. Parmi ceux-ci, figure un orbe homotope à un bord C_1 de Σ ou homotope à C_1; car, s'il n'en était pas ainsi, U_r pourrait être complété par l'adjonction de C_1, et ne satisferait pas à la condition 3°. Mais si U_r admet un orbe Γ_1 homotope à C_1 et distinct de C_1, il existe une aire de Σ dont les bords sont Γ_1 et C_1.

Cette aire ne peut contenir d'orbes qui ne soient ni homotopes à o, ni homotopes à C_1. Par suite on peut remplacer, dans U_r, Γ_1 par C sans modifier le nombre h_r et sans qu'aucune des conditions 1°, 2°, 3° cesse d'être satisfaite. Nous supposons donc que U_r admet les r bord de Σ.

Un ensemble de coupures, suivant Σ, sur les $(h_r - r)$ orbes de U_r non homotopes à o et distincts des bords de Σ, remplace Σ par $(h_r - r + 1)$ surfaces σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_{h_r - r + 1}$ de genre nul, présentant un certain nombre de bords. Une surface σ_i ne peut avoir moins de trois bords, puisque les orbes suivant lesquels sont effectuées les coupures ne sont ni homotopes à o, ni homotopes deux à deux. D'autre part, si une surface σ_i présentait plus de trois bords, nous pourrions adjoindre à U_r un orbe séparant σ_i en deux surfaces ayant chacune au moins trois bords. Par suite, U_r ne satisferait pas à la condition 3°. Les surfaces σ_i ont donc chacune trois bords. L'un quelconque des r bords de Σ est bord d'une surface σ_i. Les $(h_r - r)$ orbes du système de coupures sont bords

chacun de deux surfaces σ_i. En exprimant de deux façons le nombre total des bords des surfaces σ_i il vient $h_r = 2r - 2$.

Le nombre total d'orbes de U_r est par suite : $h_r + 1 = 2r - 2$.

E. Il résulte de l'étude précédente que l'on peut construire sur $S_{\alpha+\beta}$ un système $U_{2\alpha+\beta}$ satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, et constitué par $[2(2\alpha+\beta)-2]$ orbes dont les $(2\alpha+\beta)$ bords de $S_{\alpha+\beta}$.

En passant de $S_{\alpha+\beta}$ à S par les opérations inverses de celle qui ont conduit de S à $S_{\alpha+\beta}$, nous faisons correspondre à $U_{2\alpha+\beta}$ un système U d'orbes sur S. Le nombre d'orbes de U est donc

$$\mu = \mu_{\alpha+\beta} - \alpha + \beta = 3(\alpha+\beta) - 2.$$

Il est égal au nombre maximum d'orbes d'un système satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° sur S, à condition toutefois que deux orbes quelconques de U soient homotopiquement distincts sur S. Démontrons cette propriété par l'absurde :

Soient deux orbes C_1, C_2 de $U_{2\alpha+\beta}$, correspondant sur S à deux orbes homotopes Γ_1, Γ_2. Ceux-ci sont isotopes et limitent une aire (A) homéomorphe à une couronne circulaire. Tout orbe, situé dans (A), est homotope à o ou à Γ_1. (A) contient nécessairement un orbe Γ_i qui correspond à deux (ou à un) bords de $S_{\alpha+\beta}$, sinon C_1 et C_2 seraient homotopes sur $S_{\alpha+\beta}$. Comme Γ_i ne peut être homotope à o, il est homotope à Γ_1, et par suite C_1 est homotope à un bord de $S_{\alpha+\beta}$. Ce résultat est en contradiction avec les hypothèses auxquelles doit satisfaire $U_{2\alpha+\beta}$.

Le nombre d'orbes d'un système U répondant aux conditions 1°, 2°, 3° est donc

$$\boxed{\mu = 3(\alpha+\beta) - 2.}$$

Lorsque S est orientable, le nombre d'orbes de U ne dépend que du genre p de la surface. En effet, β est ici égal à o, et d'autre part :

$$\mu = \frac{3q}{2} - 2 = 3p - 2.$$

Lorsque la surface S *n'est pas orientable*, le nombre β des orbes sans voisinage orientable appartenant à U peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et q. Selon la valeur de β, le nombre d'orbes de U sera plus au moins élevé. Il sera maximum en même temps que β. Par suite :

$$\beta = q, \qquad \alpha = 0, \qquad \boxed{\mu_q = 3q - 2.}$$

Ce nombre peut être effectivement atteint, puisqu'il est possible de trouver, sur S, q orbes disjoints, homotopiquement distincts, sans voisinage orientable.

DEUXIÈME PARTIE.

Définition des réseaux R. Résultats préliminaires. Étude locale.

1. *Définition des réseaux* R. — Nous nous proposons d'étudier des réseaux R de courbes, couvrant une surface S connexe, close, orientable ou non, d'ordre de connexion q fini.

Les réseaux R sont assujettis aux deux conditions suivantes :

1° *Par tout point* M *de* S, *il passe en général une courbe unique de* R *et il existe un voisinage* V_M *de* M *dans lequel* R *est homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles;*

2° *Les points de* S *pour lesquels il n'en est pas ainsi, appelés points singuliers de* R, *sont en nombre fini.*

Nous désignerons une courbe continue appartenant à R et dont aucun point ne coïncide avec un point singulier de R par le terme de *caractéristique* de R.

Un point M sur une caractéristique, la partage en deux courbes continues ou *demi-caractéristiques d'origine* M.

Dans un homéomorphisme qui fait correspondre point par point à la surface S une surface S′, à un réseau R tracé sur S, correspond courbe par courbe un réseau R′, satisfaisant sur S′ aux conditions 1° et 2°. Toutes les propriétés de R que nous étudierons seront des propriétés se conservant dans un homéomorphisme quelconque.

A. Un arc de caractéristique est localement homéomorphe à un segment de droite. L'application du théorème de Borel-Lebesgue permet d'en conclure qu'un arc de caractéristique quelconque est l'image biunivoque et bicontinue du segment (0, 1).

Considérons une demi-caractéristique L, d'origine M_0. Nous pouvons définir une correspondance monotone et continue entre les points M de L et les valeurs de t telles que $0 \leq t < \infty$, la valeur $t = 0$ correspondant au point M_0.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1° $M(t)$ coïncide avec M_0 pour une valeur $t_0 \neq$ de t. L est une courbe fermée. Inversement, si L est une courbe fermée, il existe toujours une fonction $M(t)$ périodique de période t_0 faisant correspondre L à la demi-droite $t \geq 0$, un point de L correspondant à une infinité de valeurs de t.

2° Si, dans la correspondance, les valeurs positives de t ne sont pas toutes atteintes, soit t_1 la borne supérieure précise des valeurs atteintes, t_1 ne correspond à aucun point M_1 de L, sinon, la correspondance pouvant être prolongée

au delà de M_1, on se heurterait à une contradiction. Par suite L est l'image continue de l'intervalle $0 \leq t < t_1$, intervalle homéomorphe à une demi-droite.

3° Lorsque L n'est pas une courbe fermée, on peut choisir la correspondance de telle sorte que tout point de L corresponde à une valeur finie de t. En effet, nous pouvons trouver sur L une suite infinie bien ordonnée de points $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ telle que : *a*. l'arc $M_0 M_n$ de L est entièrement couvert par des voisinages $V_{M_0}, \ldots, V_{M_n}$ des points de la suite, dans chacun desquels R est localement homéomorphe à une famille de droites parallèles et *b*, la suite n'admet pas de point limite sur L. En effet, s'il n'en était pas ainsi toute suite satisfaisant à *a* admettrait un point limite M′ contenu dans un voisinage $V_{M'}$ dans lequel se trouve tous les points M_n pour lesquels $n > p$. On pourrait alors remplacer la suite $M_0, \ldots, M_n, \ldots$ par la suite finie $M_0, \ldots, M_p M'$, suite que l'on peut prolonger au delà de M_1.

D'autre part, étant donné une telle suite, un point quelconque de L est situé sur un arc $M_n M_{n-1}$ car s'il n'en était pas ainsi l'ensemble des points de L couverts par les V_{M_n} et l'ensemble des points extérieurs à tous les V_{M_n} définiraient une coupure et par suite un point M_1 de L limite des M_n contrairement aux hypothèses. Nous pouvons alors définir une correspondance biunivoque et bicontinue entre L et la demi-droite $t \geq 0$ en associant les point M_i aux entiers i et les arcs $M_i M_{i+1}$ aux segments $(i, i+1)$. *Une caractéristique de* R *sera donc, soit une courbe fermée image bicontinue de la droite* $(-\infty, +\infty)$, *soit une courbe non fermée image biunivoque et bicontinue de la droite.*

Lorsque $t \to +\infty$, le point $M(t)$ de L peut ou non avoir une limite sur S, mais si cette limite existe, ce ne peut être qu'un point singulier de R. En adjoignant ce point aux points de la demi-caractéristique L, celle-ci devient l'image biunivoque et bicontinue du segment $0 \leq t \leq 1$. Nous dirons alors que L *aboutit* au point singulier. Une caractéristique aboutissant à un point singulier est dite *séparatrice*. Une caractéristique n'aboutissant que dans un sens à un point singulier est l'image d'une demi-droite. Nous conviendrons de considérer comme formant une caractéristique l'ensemble de deux séparatrices aboutissant à un même point singulier P si, et seulement si, l'ensemble de ces deux séparatrices limite dans un voisinage de P sur S une région où ne se trouve aucune demi-caractéristique aboutissant à P. Dans ce cas encore, la caractéristique définie est l'image biunivoque et bicontinue d'une droite.

Nous appellerons *Col* un point singulier auquel aboutit un nombre fini, non nul, de séparatrices. Toute séparatrice aboutissant à un col peut être associée à l'une ou l'autre de deux séparatrices aboutissant au même col pour former une caractéristique.

B. Nous disons qu'une courbe L présente un contact en un de ses points M avec le réseau R si la courbe de R qui passe en M ne traverse pas L au point M.

Étant donné un arc $\alpha\beta$ *de Jordan sur* S, $\alpha\beta$ *peut être déformé en un arc infiniment voisin ne présentant qu'un nombre au plus fini de contact avec* R.

En effet, nous pouvons supposer que l'arc $\alpha\beta$ ne passe par aucun point singulier de R en remplaçant éventuellement $\alpha\beta$ par un arc infiniment voisin de mêmes extrémités. Tout point M de $\alpha\beta$, admet un voisinage V_M dans lequel le réseau R est localement homéomorphe à un faisceau de droites parallèles; V_M contient un arc $\alpha_1\beta_1$ de $\alpha\beta$. On peut couvrir (théorème de Borel-Lebesgue) l'arc $\alpha\beta$ par un nombre fini d'arcs contigus tel que $\alpha_1\beta_1$. On peut alors remplacer chacun de ces arcs par un arc infiniment voisin de mêmes extrémités et n'ayant qu'un nombre fini de contacts avec R. Il en sera de même pour l'arc $\alpha\beta$.

En particulier, tout orbe tracé sur S est déformable en un orbe infiniment voisin présentant un nombre fini ou nul de points de contact avec R.

C. *Voisinage d'un orbe* Γ *sur une surface* S *couverte par un réseau* R. — Soit Γ un orbe ne passant par aucun point singulier de R et présentant un nombre fini de contacts avec R. Il existe sur S une aire (A_0), de nombre de connexion 1, contenant Γ et formée par la réunion d'un nombre fini de voisinages sur lesquels R est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles.

Étant donné sur Γ un point P autre qu'un point de contact de Γ avec R, nous considérons deux points pp' situés de part et d'autre de P sur l'arc de caractéristique passant en P et intérieur à (A_0). Il existe une aire (A_1) intérieure à (A_0), contenant Γ et l'arc de caractéristique pp', aire dont la frontière passe par p et p'. Une coupure le long de l'arc de caractéristique pp' remplace (A_1) par une aire (A) simplement connexe.

Établissons entre (A) et une aire plane (A') un homéomorphisme transformant les arcs de caractéristique situés sur (A) en segments appartenant à un faisceau R' de droites parallèles, sur A'.

A Γ correspond alors un arc P_1P_2 partageant (A') en deux aires simplement connexes (A'_1) et (A'_2). A deux points a, a' situés sur les arcs de caractéristiques P_p et $P_{p'}$ correspondent deux couples a_1a_2, $a'_1a'_2$ de points sur les droites de R passant en P_1 et P_2.

1° Supposons tout d'abord que l'aire (A'_1) contienne les points a_1 et a_2.

Considérons des segments normaux à R' contenus dans (A'), et passant par chacun des points de contacts de l'arc P_1P_2 avec R'. Sur chacun de ces segments prenons un point M_i. Il existe alors une ligne polygonale a_1a_2, intérieure à (A'_1), admettant comme sommets particuliers les points M_i et ne présentant de contact avec R qu'en ces points M_i.

Il existe une ligne polygonale $a'_1a'_2$ analogue dans l'aire (A'_2).

Ces deux lignes polygonales sont l'image de deux courbes $\Gamma'\Gamma''$ situées sur S dans (A_0), isotopes de Γ et telles qu'à un contact M de Γ avec R correspondront

deux contacts M′ et M″ de Γ′ et Γ″ avec R. La disposition des courbes de R, par rapport aux courbes Γ, Γ′, Γ″, au voisinage de M, M′, M″ est la même.

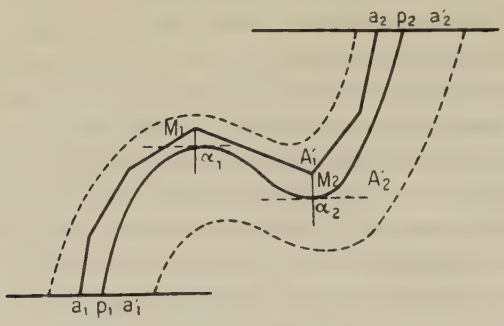


Fig. 1.

2° Si, au contraire, l'aire A_1 contient les points a_1 et a'_2, il existera deux lignes polygonales $a_1 a'_2$ et $a'_1 a_2$ situées dans (A_1) et (A_2), analogues aux précédentes. Mais ici l'ensemble de ces deux lignes sera l'image d'un orbe Γ′ situé sur (A_0) homotopes à 2Γ et tel qu'à un contact M de Γ avec R correspondent deux contacts M′ et M″ de Γ′ avec R′ ; la disposition des courbes de R par rapport à Γ ou Γ′ est la même au voisinage de M, M′ et M″.

La première hypothèse est vérifiée lorsque Γ admet sur S un voisinage orientable, la seconde dans le cas contraire.

2. *Étude locale du réseau* R. — Soit Γ un orbe limitant sur S une aire (A) homéomorphe à un cercle. (A) constitue l'intérieur de Γ. Nous supposons

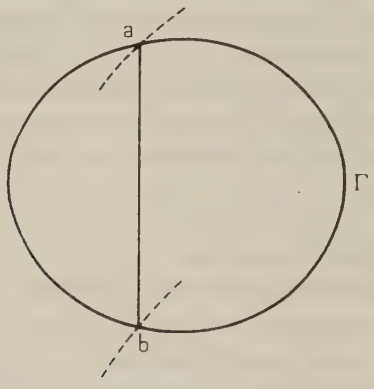


Fig. 2.

que Γ ne présente qu'un nombre fini de points de contacts avec R et ne passe par aucun point singulier de R. Un point de contact P de Γ avec R est un contact extérieur si la courbe de R passant en P ne pénètre pas dans (A) en P,

un contact intérieur dans le cas contraire. Nous désignons par λ_Γ l'excès du nombre des contacts extérieurs sur celui des contacts intérieurs. Soit *ab* un arc de Jordan simple joignant deux points de Γ et situé en totalité dans (A). Cet arc partage (A) en deux aires (A_1) et (A_2) de frontières Γ_1 et Γ_2. On voit immédiatement que l'on a

$$\lambda_\Gamma = \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma_2} - 2. \tag{1}$$

Les deux courbes Γ_1 et Γ_2 sont, en effet, constituées chacune par la réunion d'un arc de Γ et de l'arc *ab* commun à Γ_1 et Γ_2. Les contacts le long de *ab* sont de nature différente pour Γ_1 et Γ_2 et, par suite, ont une contribution nulle dans $(\lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma_2})$. D'autre part, en *a* (et en *b*) il y a apparition d'un contact extérieur supplémentaire pour Γ_1 ou Γ_2, d'où la formule (1).

Plus généralement supposons (A) partagée en *n* aires (A_1), (A_2), ..., (A_n), homéomorphes à un cercle, deux à deux sans point intérieur commun, et de frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. L'une des courbes frontières Γ_1, par exemple, admet un arc de Γ. Γ_1 partage (A) en deux aires (A_1) et (A'_2), cette dernière constituée par l'ensemble des aires (A_2, ..., (A_n). Si Γ'_2 est la frontière de (A'_2) on a $\lambda_\Gamma = \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma'_2} - 2$.

On peut répéter sur l'aire (A'_2) partagée en $(n-1)$ aires un raisonnement analogue; au bout de $(n-1)$ opérations, on aboutit à

$$\lambda_\Gamma = \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma_2} + \ldots + \lambda_{\Gamma_n} - 2(n-1).$$

Si nous appelons indice de l'orbe Γ le nombre $i_\Gamma = 1 - \frac{\lambda_\Gamma}{2}$, on voit que la formule précédente devient :

$$i_\Gamma = i_{\Gamma_1} + i_{\Gamma_2} + \ldots + i_{\Gamma_n}.$$

A. *Étude de* R *au voisinage d'un point ordinaire.* — Si l'aire (A) est à l'intérieur d'un domaine (D) dans lequel R est homéomorphe à une famille de droites parallèles, on a

$$\lambda_\Gamma = 2 \qquad \text{et} \qquad i_\Gamma = 0.$$

En effet, représentons la partie de R intérieure à D sur un faisceau plan F de droites parallèles. Soit alors C l'image de Γ.

On peut toujours trouver un polygone π dont les sommets sont sur C, qui admet comme sommets particuliers les contacts de C avec F et qui limite une aire homéomorphe à un cercle.

Les contacts de π avec F coïncident avec ceux de C avec F et sont de même nature, on aura donc

$$\lambda_\pi = \lambda_C = \lambda_\Gamma.$$

Or, l'intérieur de π peut être décomposé en ν aires triangulaires. Pour chacun des triangles, on a $\lambda = 2$. Alors $\lambda_\pi = \nu \times 2 - 2(\nu - 1) = 2$.

On a donc $\lambda_\Gamma = 2$ et $i = 0$. C. Q. F. D.

Plus généralement, si l'aire (A) ne contient aucun point singulier de R, on peut couvrir (A) par un nombre fini de domaines ouverts dans chacun desquels R est homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles. Par suite, on pourra partager (A) en un nombre fini d'aires contiguës (A_1), (A_2), ..., (A_n) de frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ telles que l'on ait

$$\lambda_{\Gamma_j} = 2 \qquad \text{et} \qquad i_{\Gamma_j} = 0,$$

alors

$$i_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} i_{\Gamma_j} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_\Gamma = 2.$$

B. *Étude de* R *au voisinage d'un point singulier. Indice d'un point singulier.* — Supposons maintenant que l'aire (A) contient un point singulier unique, P, de R. Les nombres λ et i précédemment définis pour l'orbe Γ sont caractéristiques du point P, c'est-à-dire sont les mêmes pour deux orbes Γ_1 et Γ_2 limitant deux aires (A_1) et (A_2) contenant chacune le seul point singulier P de R.

En effet, supposons tout d'abord que Γ_1 et Γ_2 sont sans point commun et

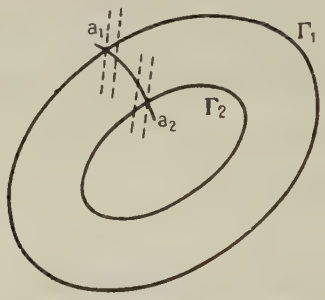


Fig. 3.

que, par exemple, l'aire (A_1) contienne l'aire (A_2). Nous pouvons rendre simplement connexe l'aire $(A_1 - A_2)$ en effectuant une coupure le long d'un arc simple de Jordan joignant deux points a_1 et a_2 de Γ_1 et Γ_2 qui ne sont pas des contacts de Γ_1 et Γ_2 avec R. Soit Γ la frontière de l'aire obtenue, on a $\lambda_\Gamma = \Gamma_{\Gamma_1} - \lambda_{\Gamma_2} + 2$, car Γ présente deux contacts extérieurs avec R en a_1 et a_2. Mais, puisque $(A_1 - A_2)$ ne contient pas de point singulier de R, on a $\lambda_\Gamma = 2$, d'où $\lambda_{\Gamma_1} = \lambda_{\Gamma_2}$.

Si nous supposons maintenant que Γ_1 et Γ_2 ne sont pas disjoints, il existera toujours un orbe Γ_3 situé tout entier à l'intérieur de $(A_1).(A_2)$ et contenant P à son intérieur et l'on a encore

$$\lambda_{\Gamma_1} = \lambda_{\Gamma_3} = \lambda_{\Gamma_2}.$$

L'égalité $\lambda_{\Gamma_1} = \lambda_{\Gamma_2}$ entraîne $i_{\Gamma_1} = i_{\Gamma_2}$.

Nous appellerons *indice d'un point singulier* P *de* R l'indice d'un orbe limitant sur S une aire homéomorphe à un cercle contenant P à l'exclusion de tout autre point singulier de R.

Plus généralement, si un orbe Γ limite une aire (A) homéomorphe à un cercle, nous pouvons partager (A) en un nombre fini d'aires contenant chacune au plus un seul point singulier de R et l'indice de Γ est égal à la somme des indices des points singuliers contenus dans (A).

Remarque fondamentale. — Nous avons considéré des orbes ne présentant qu'un nombre fini de contact avec R. Nous avons montré, d'autre part, que tout orbe est déformable en un orbe infiniment voisin ne présentant qu'un nombre fini de contacts avec R. C'est-à-dire qu'il existera effectivement des orbes présentant un nombre fini de contacts avec R et limitant sur S une aire simplement connexe contenant un point singulier donné de R à l'exclusion de tout autre point singulier. On pourra donc définir un *indice fini pour tout point singulier de* R.

En particulier, si un point singulier P est un col, le nombre λ associé à un orbe entourant ce col est égal au nombre de séparatrices de R qui aboutissent à P. Ce nombre de séparatrices sera donc *toujours fini*.

3. *Formule des points fixes.* — 1° Nous donnons ici la démonstration dans le cas particulier qui nous intéresse de la formule des points fixes.

Supposons que la surface S *soit de genre* 0. Tout orbe Γ limite sur S deux aires simplement connexes. Soit Γ un orbe ne passant par aucun point singulier de R et limitant sur S une aire (A) ne contenant aucun point singulier de R. Si l'on considère cette aire comme l'intérieur de Γ son indice est nul et le nombre λ attaché à Γ est égal à $+2$.

Mais si l'on considère que (A) constitue l'extérieur de Γ, le nombre λ est égal à (-2) et l'indice de Γ est alors $i = \left(1 - \frac{-2}{2}\right) = 2$. Cet indice est aussi égal à la somme des indices des points singuliers de R intérieurs à Γ, c'est-à-dire à la somme des indices de tous les points singuliers de R et l'on a alors $\Sigma i = 2$.

Dans le cas le plus général d'une surface S *d'ordre de connexion* q, la surface S peut être représentée sur l'intérieur d'un polygone plan π à un seul sommet et $2q$ côtés identifiés deux à deux. Nous pouvons supposer qu'aucun point singulier de R ne se trouve sur les courbes de R qui correspondent aux côtés du polygone π.

Au réseau R correspond, à l'intérieur de π, un réseau R′ que nous pouvons toujours supposer prolongé dans le plan de π au voisinage du polygone. L'indice de π, par rapport à R′, est égal à la somme des indices des points singuliers de R′ situés à l'intérieur de π, c'est-à-dire à la somme des indices de tous les points singuliers de R. Calculons directement le nombre λ_π relatif au

polygone π par rapport à R'. Les contacts de π avec R' peuvent se trouver sur un côté ou en un sommet de π. Les côtés se correspondent deux à deux. Chaque contact situé sur un côté correspond à un contact de nature opposée sur le côté correspondant. Par suite, les contacts extérieurs et intérieurs se trouvent en nombres égaux sur les côtés de π. Restent les contacts aux sommets du polygone. Les sommets de π correspondent à un même point de S par lequel passe une caractéristique unique de R. Par suite, deux arcs de caractéristiques R' aboutissent dans les $2q$ angles au sommet de π. Si ces deux arcs aboutissent dans le même angle au sommet, π présentera un contact intérieur avec R' dans cet angle $(2q-1)$ contacts extérieurs aux autres angles. Si les deux branches aboutissent dans deux angles distincts, le polygone π présente $(2q-2)$ contacts extérieurs aux autres angles. Finalement, le nombre λ_π est dans tous les cas $\lambda_\pi = 2q-2$. Et l'on a en désignant par Σi la somme des indices des points singuliers de R.

$$\Sigma i = 1 - \frac{\lambda_\pi}{2} = 1 - \frac{2q-2}{2} = 2 - q.$$

2° Nous pouvons trouver ce résultat *en réalisant l'étranglement d'un certain nombre d'orbes homologues à* 0, *tracés sur* S. Nous avons vu, en effet, que l'étranglement d'un orbe Γ non homologue à 0 et admettant un voisinage orientable sur S remplace une surface S d'ordre de connexion q par une surface S_1 d'ordre de connexion $(q-2)$. L'orbe Γ donne alors naissance à deux points γ' et γ'' situés sur S_1. Ces deux points sont des points singuliers du réseau R_1 transformé du réseau R dans l'étranglement. Si Γ ne passe par aucun point singulier de R et présente respectivement α et β contacts avec R, sur chacun de ses côtés, les indices des deux points γ' et γ'' seront respectivement

$$i' = 1 - \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \text{et} \qquad i'' = 1 - \frac{\beta - \alpha}{2},$$

l'on aura $i' + i'' = 2$. Si (Σi) est la somme des indices des points singuliers de R et $(\Sigma i)_1$ la somme des indices des points singuliers de R_1, on a

$$(\Sigma i)_1 = \Sigma i + i' + i'' = \Sigma i + 2.$$

L'étranglement d'un orbe Γ sans voisinage orientable conduit à un réseau R_1, présentant, outre les points singuliers correspondant à ceux de R_1, un point singulier γ. Une courbe qui limite autour de ce point une aire simplement connexe, a un nombre égal de contacts extérieurs et intérieurs avec R' un contact de Γ avec R correspond à un contact extérieur et un contact intérieur d'une courbe entourant γ avec R'. Par suite, γ a pour indice 1. Nous avons vu, d'autre part, que la surface S est remplacée par une surface S' dont le nombre de connexion est inférieur de 1.

Nous pouvons donc toujours, au moyen d'une suite d'étranglements, rem-

placer la surface S d'ordre de connexion q par une surface S de genre nul, le réseau R étant remplacé par un réseau R_q tel que l'on ait

$$(\Sigma i)_{R_q} = (\Sigma i)_R + q,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma i = (\Sigma i)_{R_q} - q = 2 - q.$$

TROISIÈME PARTIE.

Étude de réseaux R particuliers. Existence d'un réseau R admettant un ensemble de courbes fermées données *a priori* à l'exclusion de toute autre courbe fermée.

1. Nous allons maintenant donner quelques exemples de réseaux R. Nous verrons plus loin que l'étude d'un réseau R se ramène à l'étude de réseaux n'admettant que des points singuliers du type col; c'est pourquoi les réseaux R particuliers que nous déterminons ici sont assujettis à n'avoir pas de points singuliers autres que des cols.

Le nombre de courbes fermées homotopiquement distinctes appartenant à un réseau R est au plus égal au nombre maximum de ces courbes que l'on peut tracer simultanément sur S. Nous allons montrer que ce nombre peut être effectivement atteint et, plus généralement, qu'il existe des réseaux R admettant un ensemble restrictif quelconque d'orbes disjoints et homotopiquement distincts tracés sur S.

Nous donnons tout d'abord des exemples de réseaux R sans courbe fermée tracée sur une surface orientable. Nous définissons un mode de construction de R sur S à partir de deux réseaux R_1 et R_2 couvrant des surfaces S_1 et S_2. Nous montrons ensuite que l'on peut ainsi obtenir sur une surface quelconque un réseau sans courbe fermée. Enfin nous montrons que, sur une surface quelconque, il existe des réseaux admettant un ensemble de courbes fermées arbitraires.

A. *Réseau sans caractéristique fermée sur une surface de genre nul.* — Pour que R n'ait que des points singuliers du type col, il est nécessaire que, parmi ces cols, figurent des points à l'un desquels aboutit une séparatrice unique, sinon la somme des indices des points singuliers de R serait négative, alors qu'elle doit être égale à $(+2)$. Nous construisons un réseau R sans caractéristique fermée de la façon suivante : considérons un disque circulaire et couvrons chacune des faces de ce disque par une famille de cordes parallèles. Les deux familles formant entre elles un angle α incommensurable avec π. Si l'on choisit sur la circonférence Γ du disque une origine des arcs, les points de Γ appartenant à une même caractéristique de R auront pour argument

$$x, \quad -x, \quad x + 2\alpha, \quad \ldots, \quad \pm(x + 2k\alpha),$$

où k prend toutes les valeurs entières. Une caractéristique de R rencontre donc Γ en un ensemble de points partout dense sur Γ. Elle traversera un voisinage quelconque de tout point de S.

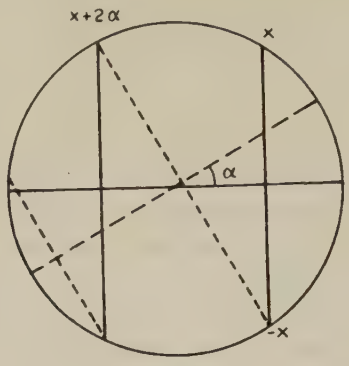


Fig. 4.

B. *On connaît, d'autre part, sur une surface de genre* 1, *des réseaux* R *sans point singulier.* Il en est ainsi du réseau R représenté, sur un quadrillage doublement infini où l'intérieur d'un carré élémentaire représente la surface S,

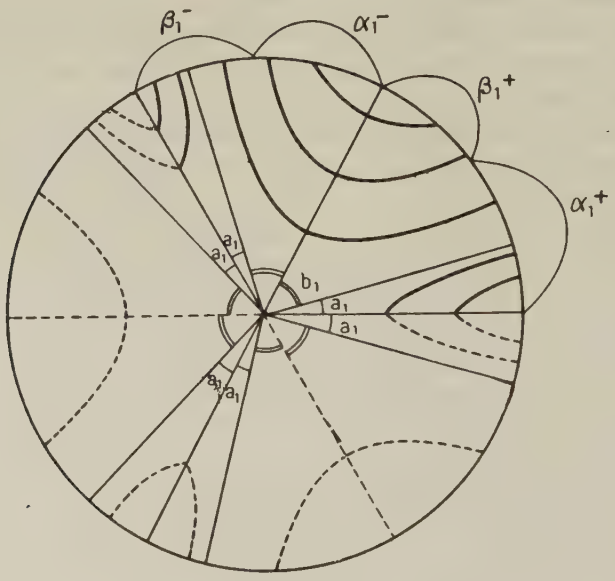


Fig. 5.

par une famille de droites parallèles formant avec les droites du quadrillage des angles de tangente irrationnelle.

Nous pouvons alors considérer une surface S de genre p constituée par

l'ensemble de p-surfaces de genre 1 superposées et réunies entre elles par des coupures qui font passer de l'un des feuillets aux feuillets immédiatement au-dessus et au-dessous. Nous supposons que le réseau R coïncide sur chacun des feuillets avec un réseau R_1 sans point singulier satisfaisant à l'hypothèse (h) et qui est identique sur les différents feuillets. A un arc de courbe de R_1 correspond alors p arcs de courbes de R et une caractéristique de R est formée d'arcs successifs correspondant à des arcs successifs d'une même courbe de R_1. Par suite R, comme R_1, n'a pas de caractéristique fermée. D'autre part, tout point de l'un des feuillets supposé couvert par R_1 est point d'accumulation d'une caractéristique quelconque de R_1 et, par suite, tout point de S est point d'accumulation pour au moins une des p caractéristiques de R qui correspondent à une même caractéristique S de R_1.

Nous représentons un tel réseau R *dans le cas d'une surface de genre* 3, sur un cercle dont le périmètre est partagé en 12 arcs égaux deux à deux identifiés suivant le schéma (*fig.* 5)

$$\alpha_1^+\beta_1^+\alpha_1^-\beta_1^-\alpha_2^+\beta_2^+\alpha_2^-\beta_2^-\alpha_3^+\beta_3^+\alpha_3^-\beta_3^-.$$

Les arcs correspondants à a_1 sont égaux, ceux correspondants à b_1 son égaux. Le rapport $\frac{a_1}{b_1}$ est irrationnel. Le réseau R admet les axes de symétrie d'argument $\lambda\frac{\pi}{3}$ avec λ entier.

Remarque. — Dans les exemples précédents une caractéristique L de R, dans la représentation polygonale de S, correspond à une infinité d'arcs joignant deux points du périmètre Γ du polygone, les points de L sur Γ forment un ensemble dénombrable partout dense. Remplaçons L par un pinceau de caractéristiques couvrant sur Γ une infinité d'arcs dénombrables et deux à deux disjoints et identifions deux à deux les arcs provenant de deux points de Γ préalablement identifiés. R est alors remplacé par un réseau R′ sans courbes fermées; un arc sans contact intérieur au pinceau de caractéristiques αR′ remplaçant L est traversé une fois au plus par une caractéristique quelconque de R′. Le pinceau de caractéristiques qui remplace L couvre une aire de S qui est un ruban ne se ramifiant pas.

C. *Mode de construction de réseaux* R. — Considérons deux surfaces : S_1, couverte par un réseau R_1, et S_2, couverte par un réseau R_2. Nous effectuons sur S_1 et S_2 deux coupures, l'une suivant un arc A_1B_1 sans contact avec R_1, l'autre suivant un arc A_2B_2 sans contact avec R_2. Nous identifions point par point les deux lèvres de la coupure sur S_1 le long de A_1B_1 aux deux lèvres de la coupure sur S_2 le long de A_2B_2. L'ensemble de S_1 et S_2 devient une surface S dont le nombre de connexion est la somme des nombres de connexion de S_1 et S_2. S est couverte par un réseau R qui admet, outre les points singuliers de R_1 et R_2, deux cols à quatre séparatrices aux points résultant de la fusion de A_1 et A_2 et

de B_1 et B_2. Si, en outre, les caractéristiques de R_1 rencontrent au plus une fois l'arc A_1B_1 sur S_1, les seules caractéristiques fermées de R sont celles de R_1 et de R_2 qui ne rencontrent, ni A_1B_1, ni A_2B_2.

Supposons en particulier que S_1 est une surface orientable de genre p couverte par un réseau R_1 sans caractéristique fermée et que A_1B_1 est tout entier intérieur à un ruban ne se ramifiant pas et ne se recouvrant pas particulièrement. Supposons, d'autre part, que S_2 est une surface non orientable et que R_2 admet une caractéristique fermée Γ_2 qui constitue l'ensemble d'accumulation de toutes les caractéristiques de R_2. Nous prenons pour A_2B_2 un arc sans contact avec R_2 traversant Γ_2. La surface S résultant de la réunion de S_1 et S_2 est alors couverte par un réseau R n'admettant pas de courbe fermée. Nous donnerons plus loin des exemples de réseaux tracés sur des surfaces non orientables et admettant une courbe fermée unique, *ce qui permet de conclure à l'existence sur une surface quelconque de réseaux sans courbe fermée;* toutefois pour un tel réseau aucun point de l'arc AB de S résultant de la fusion de A_1B_1 et A_2B_2 n'est point d'accumulation pour aucune caractéristique de R.

Il n'est donc pas établi qu'il existe sur une surface non orientable un réseau sans courbe fermée et tel que tout point de S soit point d'accumulation d'une caractéristique au moins de R.

D. Considérons, sur une surface S quelconque, un ensemble de courbes fermées disjointes données à l'avance. Il existe toujours des réseaux R *admettant ces courbes à l'exclusion de toute autre courbe fermée*. En effet, l'ensemble des courbes données partage la surface S en un certain nombre de surfaces ouvertes $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Sur chacune de ces surfaces S_i nous pouvons tracer un orbe Γ_i partageant S_i en deux surfaces dont l'une, S_i', a pour bord unique Γ_i et dont l'autre, S_i'', a pour bord, d'une part Γ_i, d'autre part l'ensemble des courbes frontières de S_i. Nous pouvons choisir Γ_i de telle sorte que S_i'' soit de genre 0 ou, lorsque le nombre de connexion de S_i est supérieur à 2, soit orientable et de genre 1.

Partageons Γ_i en deux arcs par deux points A_i et B_i. Nous identifions point par point les deux arcs A_iB_i de Γ_i. Nous pouvons couvrir la surface S_i' par un réseau R' sans courbe fermée et la surface S_i'' par un réseau R'' admettant les bords de S_i'' comme seules caractéristiques fermées. L'ensemble de S_i' et S_i'' forme une surface S_i couverte par un réseau qui n'admet pas d'autre caractéristique fermée que les bords de la surface S_i pourvu que les caractéristiques de R'' aient pour ensemble d'accumulation une partie des caractéristiques fermées.

Nous donnerons plus loin des exemples de surfaces de genre 0 couverte par des réseaux admettant un ensemble arbitraire de caractéristiques fermées. Nous pourrons donc toujours couvrir une surface S_i par un réseau satisfaisant aux conditions proposées.

En opérant de même sur chacune des surfaces S_i, on obtient sur la surface S

un réseau R qui admet un ensemble arbitraire de caractéristiques fermées disjointes à l'exclusion de toute autre courbe fermée.

E. *Réseau admettant un cycle limite unique dans un plan projectif.* — Le plan projectif est représenté sur l'intérieur d'un cercle dont les points diamétralement opposés sont identifiés. Le réseau R est représenté sur le cercle par l'ensemble φ des cordes portées par des droites concourantes en un point I extérieur au cercle.

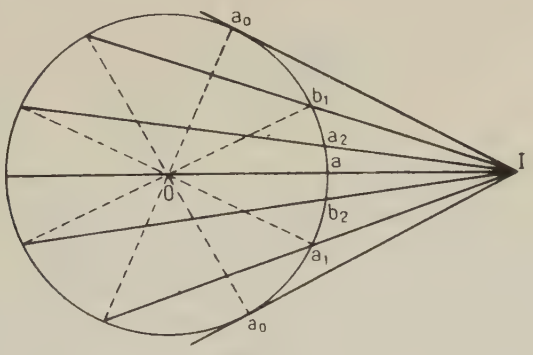


Fig. 6.

L'ensemble des caractéristiques de φ couvre successivement les arcs a_0b_0, b_1a_1, a_2b_2, ..., $a_{2p}b_{2p}$, b_{2p-1}, a_{2p+1}, ..., tels que chacun d'eux contient tous ceux qui le suivent et que les points a_i et b_i admettent un point limite unique en a sur le diamètre du cercle passant par I. Le diamètre passant en a correspond à une courbe fermée de R qui est l'ensemble d'accumulation de toutes les caractéristiques de R. Le réseau R admet deux points singuliers à chacun desquels aboutit une séparatrice unique, ces deux points correspondant sur le cercle aux points de contact des tangentes issues de I.

F. *Réseau admettant un cycle limite situé sur une surface non orientable de nombre de connexion égal à* 3. — Nous représentons la surface sur un cercle dont la circonférence est partagée en six arcs égaux deux à deux identifiés. On suppose que le réseau R est représenté par la famille φ des cordes dont les extrémités partagent dans le même rapport les deux arcs du cercle d'extrémité AB, les points A et B étant les extrémités de l'un des six arcs précédents. Le réseau R admet un cycle limite représenté sur le cercle par une seule corde : les courbes de φ traversant AB une infinité de fois en couvrant successivement une suite d'arcs a_nb_n tels que chacun d'eux est porté par le précédent et que sur la circonférence on ait $a_nb_n = \frac{1}{5} a_{n-1}b_{n-1}$; par suite, les points a_n et b_n admettent un point limite unique, la corde de la famille φ passant par ce point représente la caractéristique fermée de R.

Le réseau R admet un point singulier unique, qui est un col à quatre séparatrices, au sommet du contour formé par les six arcs de cercle.

La construction se généralise pour une surface non orientable d'ordre de connexion quelconque

$$a_1 b_1 = ab,$$

$$a_2 b_2 = ab'_2 = \frac{ab}{5},$$

$$a_3 b_3 = a'_3 b'_2 = \frac{ab'_2}{5}.$$

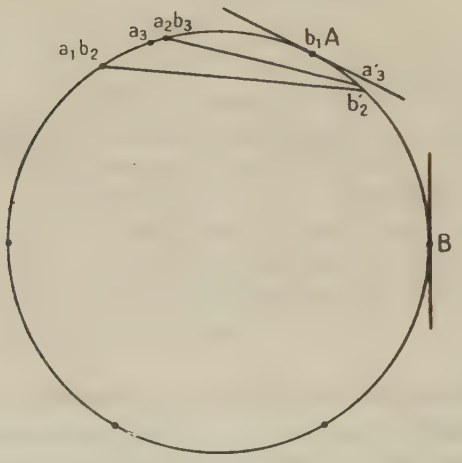


Fig. 7.

G. *Réseau tracé sur une surface de genre* o *admettant* α *bords*. — 1° $\alpha > 1$. Cas de figure $\alpha = 4$; le réseau n'admet que des cols à quatre séparatrices.

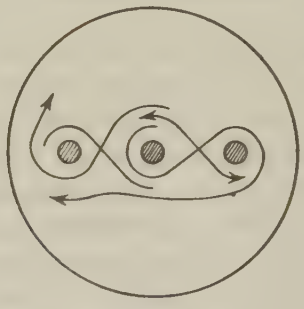


Fig. 8.

2° $\alpha = 1$. Il ne peut y avoir de réseau n'admettant pas de cols à une seule séparatrice.

Dans le cas de la figure le résau admet deux cols à une seule séparatrice.

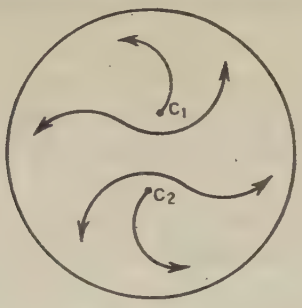


Fig. 9.

2. *Étude d'un réseau* R *particulier sur une surface* S *de genre* 1.

A. *Représentation de* S *et d'un orbe* Γ *tracé sur* S *sur un quadrillage doublement périodique.* — Si nous considérons deux orbes Γ_1, Γ_2 formant rétrosection sur S, on peut représenter la surface S à l'intérieur d'un carré ABCD dans lequel les côtés AB et DC correspondent à l'orbe Γ, et les côtés AD et BC à l'orbe Γ_2. On peut aussi représenter S sur un quadrillage plan infini doublement périodique d'élément le carré ABCD, un point quelconque de S n'appartenant ni à Γ_1, ni à Γ_2, ayant un correspondant et un seul à l'intérieur de chaque carré élémentaire.

Une courbe quelconque tracée sur S est alors représentée à l'intérieur de ABCD par un nombre fini ou infini d'arcs joignant deux points situés sur la frontière de ABCD, ou par une courbe toute entière intérieure au carré. Si la courbe n'a pas de point double, tous les arcs seront deux à deux disjoints. D'autre part, la courbe est aussi représentée sur l'ensemble du quadrillage par une famille de courbes continues déduites les unes des autres par les translations $\left(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}\right)$, où α et β sont des nombres entiers quelconques. Si la courbe est un cycle non homotope à un point, l'une quelconque des courbes de la famille précédente définie sur l'ensemble du quadrillage sera périodique de période minimum $\left(\alpha_1\overrightarrow{AB}+\alpha_2\overrightarrow{AD}\right)$, si le cycle est homotope à $(\alpha_1\Gamma_1+\alpha_1\Gamma_2)$.

Nous nous proposons d'étudier plus attentivement la *représentation d'un orbe* Γ.

1° Une courbe continue γ correspondant à Γ sur le quadrillage ne peut rencontrer une même droite correspondant à Γ_1 (ou à Γ_2) en deux points *m* et *n* tels que $\overrightarrow{mn}=(1+k)\overrightarrow{AB}$, $\left(\text{ou }\overrightarrow{AD}\right)$ où $k>0$. En effet, la translation $\overrightarrow{AB}$ remplacerait γ par une courbe γ′ et l'arc *mn* de γ par un arc *m′n′* de γ; arc qui rencontrerait l'arc *mn* de γ en un point qui correspondrait à un point multiple de Γ, ce qui est impossible puisque Γ est un orbe.

2° Si γ rencontre une droite correspondant à Γ_1 (ou à Γ_2), en deux points *mn*,

ou bien l'arc mn de γ ne traverse aucune droite du quadrillage correspondant à Γ_1 (ou à Γ_2), ou bien il traverse certaines de ces droites un nombre pair ou

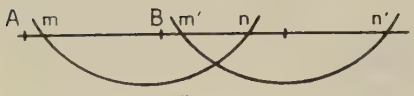


Fig. 10.

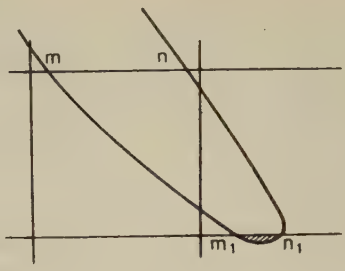


Fig. 11.

infini de fois; il existera alors un arc $m_1 n_1$ porté par l'arc mn de γ ayant ses deux extrémités sur une droite du quadrillage et ne rencontrant aucune autre droite du quadrillage. Cet arc $m_1 n_1$ sera situé tout entier à l'intérieur d'un même carré élémentaire, et limitera avec le segment $m_1 n_1$ une aire correspondant à une aire simplement connexe de S.

Il existe, par suite, sur S un orbe Γ' isotope de Γ rencontrant Γ_1 et Γ_2 aux mêmes points que Γ, exception faite des points correspondants sur Γ_1 (ou Γ_2) aux points m_1 et n_1.

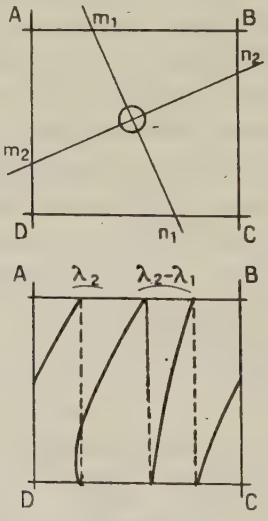


Fig. 12.

En recommençant la même opération, Γ *est remplacé par un orbe isotope* Γ_0 *tel qu'une courbe* γ_0 *correspondant à* Γ_0 *rencontre une droite du quadrillage en un point au plus.*

3° Nous considérons dans la suite un orbe Γ_0 associé à Γ par la transformation isotope définie au paragraphe 2.

Il n'existe pas sur Γ_0 de couple d'arcs m_1n_1 et m_2n_2 joignant respectivement deux points de Γ_1 sans rencontrer Γ_2 et deux points de Γ_2 sans rencontrer Γ_1. En effet, si un tel couple existait, il lui correspondrait à l'intérieur d'un carré élémentaire deux arcs se coupant, ce qui est impossible.

4° Nous supposons que Γ_0 rencontre Γ_1 en λ_2 points et Γ_2 en λ_1 points avec $\lambda_2 \geqq \lambda_1$, par exemple. Γ_0 est alors constitué par l'ensemble de $(\lambda_2 - \lambda_1)$ arcs joignant deux points de Γ_1, sans traverser Γ_1 ni Γ_2, et de $2\lambda_1$ arcs joignant un point de Γ_1 à un point de Γ_2 sans traverser Γ_1 ni Γ_2.

Sur le carré ABCD, Γ_0 sera représenté par $(\lambda_2 - \lambda_1)$ arcs joignant un point de AB à un point de DC. Puisque les arcs représentant Γ_0 sont disjoints il y aura alors λ_1 arcs joignant un point de AD à un point de AB (ou de DC) et λ_1 arcs joignant un point de BC à un point de DC (ou de AB). En outre, le $n^{\text{ième}}$ point rencontré à partir de A sur le contour polygonal ABC (ou BCD) sera nécessairement joint au $n^{\text{ième}}$ point rencontré sur le contour polygonal ADC (ou BAD).

Par suite, l'ordre dans lequel Γ_0 traverse Γ_1 et Γ_2 est déterminé lorqu'on connaît les valeurs λ_1 et λ_2.

Or si deux orbes Γ' *et* Γ'' *sont* homotopes, il en est de même des deux orbes Γ'_0 et Γ''_0 qu'on leur associe dans l'isotopie introduite au paragraphe 2. Ces deux orbes Γ'_0 et Γ''_0 peuvent être déformés isotopiquement en deux orbes passant par le point commun à Γ_1 et Γ_2 et auxquels correspondent deux courbes γ'_0 et γ''_0 joignant les mêmes sommets du quadrillage. Par suite, ces deux orbes sont isotopes *et les deux orbes* Γ' *et* Γ'' *sont isotopes*. D'où le théorème que l'on a déjà établi dans le cas général : *Deux orbes homotopes sur une surface de genre* 1 *sont isotopes*.

Corollaire. — *Pour qu'il existe un orbe* Γ *homotope à* $\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2$ *où* λ_1 *et* λ_2 *sont des nombres entiers, il faut et il suffit que* λ_1 *et* λ_2 *soient premiers entre eux.*

En effet, quels que soient λ_1 et λ_2 il existe toujours un cycle homotope à $\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2$ et sans point double, représenté sur le quadrillage par la diagonale du rectangle de côtés $\lambda_1\overrightarrow{AD}$ et $\lambda_2\overrightarrow{AB}$:

1° Si λ_1 et λ_2 sont premiers entre eux cette diagonale ne passe par aucun sommet du quadrillage et elle correspond à un orbe de S.

2° Si λ_1 et λ_2 ne sont pas premiers entre eux, la diagonale traverse $(\alpha - 1)$ sommets du quadrillage (si α est le p. g. c. d. de λ_1 et λ_2). Elle correspond alors, non à un orbe $\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2$, mais au produit de α fois un orbe $\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\Gamma_1 + \frac{\lambda^2}{\alpha}\Gamma_2\right)$ et tout cycle sans point double homotope à $(\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2)$ sera constitué par α orbes distincts homotopes à $\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\Gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha}\Gamma_2\right)$.

B. *Nous nous proposons d'étudier un réseau* R *sans point singulier couvrant une surface* S *de genre* 1.

Nous utilisons la représentation de S sur un quadrillage doublement périodique. Le réseau R est alors représenté par un réseau ρ doublement périodique. Nous prenons pour base du quadrillage deux orbes formant rétrosection dont l'un Γ_1 est un orbe sans contact avec R. Nous verrons plus loin qu'un tel orbe existe toujours.

1° Aucune caractéristique de ρ ne traverse en deux points une droite quelconque correspondant à Γ_1.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors dans le plan, une aire (A) simplement connexe, limitée par un arc *mn* de ρ et un segment *mn* correspondant à un arc de Γ_1. Considérons un orbe tracé dans le plan et constitué :

a. par un segment mn_0 contenant $\underset{\frown}{mn}$;

b. par un arc mn_0 sans contact avec ρ. Cet orbe a un indice nul par rapport à ρ puisqu'il limite une aire ne contenant aucun point singulier. Or le seul contact de cet orbe avec ρ est un contact extérieur avec ρ en n_0, puisque le segment mn_0 est sans contact avec ρ. C'est-à-dire que l'indice de cet orbe par rapport à ρ est $\left(+\frac{1}{2}\right)$. Comme d'autre part cet indice doit être o, nous aboutissons à une contradiction.

2° S'il existe un arc de ρ qui traverse successivement en trois points *m*, *n*, *p* une même droite D correspondant à Γ_2, nous allons montrer qu'il existe un orbe Γ'_2 homotope à Γ_2 formant rétrosection avec Γ_1 et présentant avec R deux contacts de moins que Γ_2.

a. Supposons que *n* soit entre *m* et *p* sur D, considérons un segment m_0p_0 contenant *mnp* et tel que $m_0p_0 \leqq$ AD. Il existe une déformation isotope du

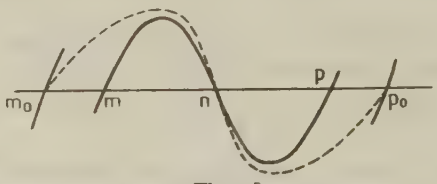


Fig. 13.

segment m_0np_0 sans contact avec ρ et voisin de l'arc *mnp* de caractéristique. Cet arc m_0np_0 comme l'arc de caractéristique *mnp*, rencontre en un point au plus une droite correspondant à Γ_1.

Cette déformation correspond à une déformation de l'orbe Γ_2 en un orbe Γ'_2 formant rétrosection avec Γ_1 et présentant avec R les mêmes contacts que Γ_2, exception faite des contacts de Γ_2 avec R représentés par les contacts du

segment *mp* avec ρ et ces contacts sont en nombre au moins égal à deux puisque aucun des deux segments *mn* et *np* ne peut être sans contact avec ρ.

b. Si le point *p* se trouve au contraire entre *m* et *n* (ou *m* entre *p* et *n*), l'arc *mnp* de ρ et le segment *mp* limite alors dans le plan une aire simplement connexe (A). Au delà du point *p* la caractéristique des points *mnp* pénètre dans cette aire (A). Cette caractéristique ne peut rester constamment à l'intérieur de (A) (1). Elle traverse nécessairement le segment *mp* en *q* et l'on peut faire jouer aux points *npq* le rôle des points *npq* au paragraphe précédent.

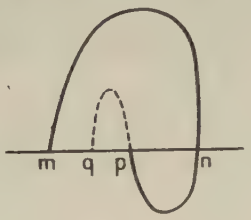


Fig. 14.

Nous supposerons donc dans la suite que les orbes Γ_1 et Γ_2 sont choisis de telle sorte que :

1° Γ_1 sans contact avec R et par suite aucune caractéristique de ρ ne traverse deux fois une droite correspondant à Γ_1 ;

2° Il n'existe pas de caractéristique de ρ traversant trois fois une même droite correspondant à Γ_2. En particulier une caractéristique tangente à une droite D correspondant à Γ_2 ne traverse pas D. Sinon une caractéristique voisine rencontrerait D en trois points.

C. *Nous allons montrer que lorsque* Γ_2 *n'est pas un orbe sans contact avec* R, *il existe au moins une caractéristique fermée.*

Les côtés AB et DC qui correspondent à Γ_1 sont sans contact avec ρ. Nous supposons pour fixer les idées, que la caractéristique de R qui passe par le point commun à Γ_1 et Γ_2 correspond à des arcs de courbes pénétrant dans le carré en B et D et extérieures au carré en A et C.

Soient *m* et *m'* les points de contact avec ρ de AD et BC qui sont respectivement le plus près de A et de B ; en *m* et *n* les contacts de la frontière du carré avec ρ sont, l'un extérieur et l'autre intérieur au carré. Si en *m*, par exemple, le contact est intérieur et en *m'* extérieur, les caractéristiques de ρ pénétrant dans ABCD sur le segment A*m* sortiront du carré sur un segment A*n* porté par AB (ou un contour polygonal AB*n*), la caractéristique du point *n* étant

(1) Nous établirons cette propriété dans un cas plus général à la quatrième Partie (p. 303).

tangente en m à AD. Si le contact intérieur se trouve en m', l'ensemble des caractéristiques pénétrant dans le carré sur le contour polygonal ABm', sort du carré en couvrant un segment An' porté par AD.

Dans l'un et l'autre cas, il existe sur S un orbe Γ_1' homotope à Γ_1, sans contact avec R et représenté dans le plan par un arc de courbe joignant mm' et voisin dans le premier cas de figure de l'ensemble des arcs : 1° arc mn de caratéristique; 2° contour polygonal ou segment nBm' ou nm';

dans le second cas de l'ensemble des arcs : 1° arc $m'n'$ de caractéristique; 2° segment $n'm$. Cet orbe Γ_1' forme rétrosection avec Γ_2. Nous pouvons lui faire jouer le rôle de Γ_1. Nous sommes alors ramenés à étudier le réseau ρ

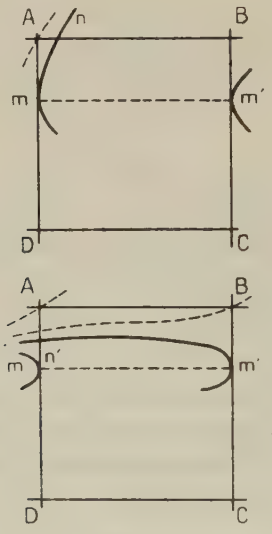


Fig. 15.

dans un carré ABCD tel que les côtés AB et DC soient sans contact avec ρ et les côtés AD et BC présentent un contact avec ρ en A, B, C et D. Nous supposons, pour fixer les idées, que les contacts en A et D sont intérieurs au carré et en B et C extérieurs.

La courbe de ρ tangente en A sort nécessairement du carré en un point n_0.

Ce point ne peut se trouver sur AB, puisque aucune caractéristique ne traverse AB en deux points. Il ne peut se trouver sur AD, puisque la caractéristique étant tangente à AD ne peut traverser la droite-support de AD. n_0 ne peut être, d'autre part, situé sur DC car la caractéristique tangente en D devrait traverser alors, soit AD, soit DC, ce qui est impossible. n_0 est donc sur BC.

Le segment Bn_0 est sans contact avec ρ. En effet, s'il n'en était pas ainsi ce segment présenterait avec ρ un nombre de contacts extérieurs autre que B égal au nombre des contacts intérieurs, c'est-à-dire qu'il existerait une

caractéristique de φ tangente intérieurement à BC, les deux branches de cette caractéristique ne peuvent traverser AB, donc l'une d'elles au moins traverserait BC, mais alors il existerait une caractéristique de φ traversant en trois points la droite portant BC, ce qui est impossible.

Considérons alors la courbe L de R qui admet un arc ON_0 représentée par l'arc An_0 de φ; cette courbe se prolonge au delà de N_0 par un arc N_0N_1 qui est représenté sur le carré par un arc n'_0n_1, le point n'_0 se trouvant sur le segment AD, le segment An'_0 étant comme Bn_0 sans contact avec φ ailleurs qu'en A. Le point n_1 comme n_0 se trouve nécessairement sur BC et n_1 est situé entre n_0 et C. On montre comme précédemment que le segment Bn_1 est sans contact avec φ.

Au delà de N_0, L est représentée sur le carré par une suite d'arcs $n'_{i-1}n_i$

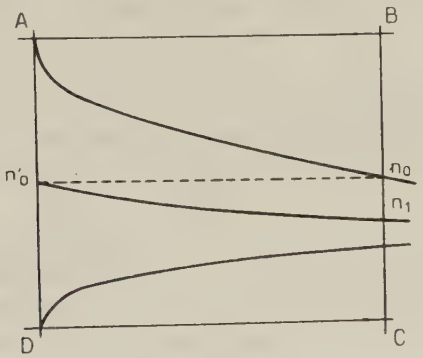


Fig. 16.

joignant un point de AD à un point de BC; les segments Bn_i sont tous sans contact avec φ et d'autre part on a

$$Bn_0 \subset Bn_1 \subset \ldots \subset Bn_i \subset \ldots .$$

Les points n_i forment donc une suite monotone sur BC. Cette suite est bornée par le premier contact de BC avec φ. Elle admet donc un point limite ν et la caractéristique de φ passant en ν traverse AD au point ν' correspondant au même point de Γ_2 que ν, donc correspond à une caractéristique de R fermée et homotope à Γ_1.

Nous voyons alors qu'entre deux contacts consécutifs de Γ_2 avec R, il passe au moins une caractéristique fermée de R homotope à Γ_1 et qui forme l'ensemble d'accumulation des caractéristiques voisines. En particulier, s'il existe sur S un orbe de pseudo-indice (1) non nul, on est assuré que tout orbe formant rétrosection avec un orbe sans contact présente un nombre fini de contacts avec φ et, par suite, que R admet des caractéristiques fermées.

(1) Dubois-Violette, *C. R. Acad. Sc.*, 224, 1947, p. 782-784.

QUATRIÈME PARTIE.

1. A. *Point d'accumulation d'une courbe* L *tracée sur* S *lorsque la courbe* L *n'est pas une courbe fermée et n'admet pas de point d'arrêt.*

Un point M *de* S *sera dit point d'accumulation d'une courbe* L *lorsque :* à l'intérieur de tout voisinage V de M, il existe un voisinage V_M de M qui contient un point N de L, n'appartenant pas à un arc MN porté par L et intérieur à V_M.

Si un point M n'est pas un point d'accumulation de L, on peut toujours trouver un voisinage V_M de M tel que si l'on suit la courbe L dans un sens donné, il existe un point m de L au delà duquel la courbe L est tout entière extérieure à V_M.

1° *Toute demi-courbe infinie* L *admet au moins un point d'accumulation.* En effet, s'il n'en était pas ainsi, étant donné un point M de S, il existerait un voisinage V de ce point, tel que la courbe L, au delà d'un point m, n'ait aucun point intérieur à V.

Comme S forme un ensemble compact, on peut la couvrir par un nombre fini de tels voisinages, soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$, correspondant à des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de S; il existera une suite $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de points de L au delà desquels la courbe L reste extérieure à chacun des voisinages $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Si m_i est le dernier point rencontré sur L à partir de l'origine, au delà de m_i, L est extérieure à l'ensemble des voisinages $V_1, V_2, \ldots, V_n$ et, ceux-ci couvrant la totalité de S, nous arrivons à une contradiction.

2° *Supposons maintenant que la courbe* L *appartienne à un réseau* R *de courbes.* Pour qu'un point M, non singulier pour R, soit un point d'accumulation de L, il faut et il suffit que tout arc $\alpha\beta$ contenant M et sans contact avec R soit traversé par L en un point autre que M.

En effet, les caractéristiques de R qui traversent un arc $\alpha\beta$ sans contact avec R passant par M couvrent en totalité un voisinage de M qui contient l'arc $\alpha\beta$. Si tout voisinage de M contient un point de L, tout arc $\alpha\beta$ contiendra donc un point de L. Réciproquement, tout voisinage de M contient un arc $\alpha\beta$ passant par M et sans contact avec R. Si tout arc $\alpha\beta$ contient un point de L, tout voisinage de M, contenant un arc $\alpha\beta$ contiendra un point de L.

3° Soit MM′ un arc de caractéristique ne passant par aucun point singulier de R.

Considérons deux arcs sans contact avec R, l'un $\alpha M\beta$ passant par M, l'autre $\alpha' M' \beta'$ passant par M′, puisque R est localement homéomorphe au voisinage de l'arc de caractéristique MM′ à un faisceau de droites parallèles.

Il existera deux arcs $\alpha_1 M \beta_1$ et $\alpha'_1 M' \beta'_1$ portés respectivement par $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, tels que toute caractéristique traversant l'un des arcs $\alpha_1 M$, $M\beta_1$, $\alpha'_1 M'$ ou $M'\beta'_1$ traverse $\alpha' M'$, $M'\beta'$, αM ou $M\beta$. Par suite, si M est un point d'accumulation pour une caractéristique L, M' sera aussi un point d'accumulation pour L. Tout point de la caractéristique de M sera, alors, un point d'accumulation de L, si M n'est pas un point singulier de R.

Si la caractéristique de M est une séparatrice Λ aboutissant à un col C de R, soient Λ_1 et Λ_2 les deux séparatrices aboutissant à C, l'une immédiatement à droite, l'autre immédiatement à gauche de Λ supposée orientée vers C. Soit $\alpha M \beta$ un arc sans contact avec R tel que α soit à droite de Λ et β à gauche

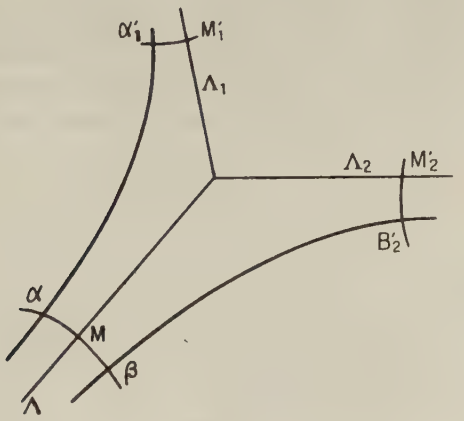


Fig. 17.

de Λ. Nous dirons que M est un point d'accumulation droit de L si une caractéristique L traverse tout arc tel que αM, à droite de L ; si L traverse tout arc tel que $M\beta$, nous dirons que M est un point d'accumulation gauche de L. Un point d'accumulation de L, peut être droit, gauche, ou les deux à la fois. Si M est un point d'accumulation droit de L, il en est de même pour tous les points de Λ et pour tous les points de Λ_1, le réseau R étant, à droite de l'ensemble Λ, Λ_1, localement homéomorphe à une famille de droites parallèles. Par suite, si M est un point d'accumulation pour une caractéristique L, l'ensemble des points d'accumulation de L contient l'une ou l'autre des caractéristiques constituées par la réunion de Λ et de l'une des séparatrices Λ_1 et Λ_2.

Nous supposons dans la suite que le réseau R n'admet pas d'autres points singuliers que des cols. Nous convenons, en outre, de considérer comme formant une seule caractéristique l'ensemble de deux séparatrices aboutissant au même col C et séparant le voisinage de C en deux régions dont l'une ne contient pas d'arc de séparatrice aboutissant à C. Toute caractéristique L de R est alors sans point d'arrêt. Si R n'est pas formé par un ensemble de courbes

fermé, *toute caractéristique* L *non fermée admet au moins* un point d'accumulation, donc au moins une caractéristique lieu de points d'accumulation, et par suite au moins *un point d'accumulation autre qu'un col.*

B. *Existence d'orbes sans contact pour un réseau n'admettant que des points singuliers qui sont des cols.*

Il sera commode dans la suite de considérer les points d'intersection des caractéristiques L avec un orbe Γ, sans contact avec R, et admettant un voisinage orientable sur S. Nous allons montrer tout d'abord qu'il existe toujours sur S un orbe sans contact avec R.

Dans la démonstration, nous remplaçons l'hypothèse que R n'admet que des points singuliers du type col, par l'hypothèse plus générale que R admet une demi-caractéristique L n'aboutissant à aucun point singulier.

Soit alors M un point d'accumulation de L. Il existe un arc $\alpha\beta$ passant par M

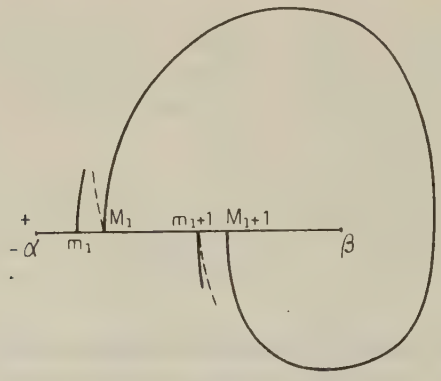


Fig. 18.

et sans contact avec R. Un tel arc est traversé par L une infinité de fois. Si l'on suit L les points d'intersection de L avec $\alpha\beta$ sont rangés sur L, dans l'ordre M_1, M_2, ..., M_i, ..., le nombre des arcs M_iM_{i-1} de L qui passent par un col de R est fini ou nul. En négligeant les premiers termes de la suite, nous obtenons donc une suite infinie M_1, M_2, ..., M_i, ..., de points de L, situés sur $\alpha\beta$ et tels qu'aucun des arcs M_iM_{i+1} ne rencontre $\alpha\beta$ ou ne passe par un col de R.

Considérons un arc M_iM_{i-1} de L. Une caractéristique voisine de L rencontre Γ en deux points, m_i, m_{i-1}, voisins de M_i, M_{i-1}. Si nous choisissons m_i suffisamment près de M_i, l'arc de caractéristique m_im_{i-1} est tout entier situé dans un voisinage de l'arc de caractéristique M_iM_{i-1} qui ne contient aucun point singulier de R et, d'autre part, les arcs de $\alpha\beta$ d'extrémités m_iM_i et $m_{i-1}M_{i-1}$ sont disjoints.

Nous avons alors sur l'arc $\alpha\beta$ l'une des deux dispositions suivantes :

$$\alpha m_i M_i m_{i-1} M_{i+1} \beta \quad \text{ou} \quad \alpha m_i M_i M_{i+1} m_{i+1} \beta.$$

1° Lorsque la première disposition se trouve réalisée, nous obtenons un orbe sans contact avec R par la réunion des deux arcs sans contact suivants :

a. Un arc $M_i m_{i+1}$ traversant une fois chacun des arcs de caractéristiques joignant un point de l'arc $m_i M_i$ porté par $\alpha\beta$ à un point de l'arc $m_{i+1} M_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$.

b. L'arc $M_i m_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$.

2° Si tout arc de caractéristique $M_i M_{i+1}$ présente, avec les arcs de caractéristique voisins la seconde disposition, considérons deux arcs $M_{i-1} M_i$ et $M_i M_{i+1}$ consécutifs. Supposons alors que M_i soit situé sur $\alpha\beta$ à l'extérieur de $M_{i-1} M_i$. Nous nous ramenons au premier cas étudié en remplaçant $\alpha\beta$ par un arc $\alpha\beta'$ porté par $\alpha\beta$ contenant $M_{i-1} M_{i+1}$ et non le point M_i.

3° Il reste donc à étudier le cas où sur $\alpha\beta$, M_i est situé entre M_{i-1} et M_{i-1}. Considérons deux caractéristiques voisines de L rencontrant $\alpha\beta$ en m_{i-1}, m_i,

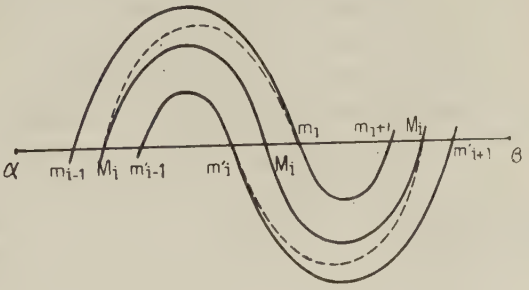


Fig. 19.

m_{i+1} et m'_{i-1}, m'_i, m'_{i+1} voisins respectivement de M_{i-1}, M_i et M_{i-1} tels que les arcs $m_{i-1} m_{i-1}$ et $m'_{i-1} m'_{i+1}$ de ces caractéristiques soient situés dans un voisinage de l'arc de caractéristique $M_{i-1} M_{i-1}$ ne contenant aucun point singulier de R. Si les points $m_i m'_i$ sont pris assez près de M_i, nous avons la disposition suivante sur $\alpha\beta$: $\alpha m_{i-1} M_{i-1} m'_{i-1} m'_i M_i m_i m_{i+1} M_{i+1} m'_{i+1} \beta$. Il existe alors un orbe, sans contact avec R, formé par la réunion de quatre arcs sans contact : *a*. arc $M_{i-1} m_i$ rencontrant une fois les caractéristiques qui traversent l'arc $M_i m_i$ de $\alpha\beta$; *b*. arc $m_i M_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$; *c*. arc $M_{i+1} m'_i$ rencontrant une fois les caractéristiques qui traversent l'arc $M_i m'_i$ de $\alpha\beta$; *d*. arc $m'_i M_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$.

Par suite, nous pouvons toujours déterminer un orbe Γ *sans contact avec* R.

D'autre part, si Γ est un orbe sans contact avec R, sans voisinage orientable sur S, il existe un orbe sans contact avec R, soit Γ', homotope à 2Γ, admettant un voisinage orientable et frontière, sur S, d'une aire homéomorphe à un ruban de Möbius dont la ligne médiane est le correspondant dans l'homéomorphisme de la courbe Γ. Il existe donc toujours un orbe Γ sans contact avec R et *admettant un voisinage orientable sur* S.

C. *Ensemble d'accumulation d'une demi-caractéristique issue d'un point de la frontière d'une aire* (A) *simplement connexe et située tout entière dans l'aire* (A).

Nous pouvons supposer (en effectuant au besoin une homéomorphie) que l'aire (A) est un cercle de circonférence frontière C. Nous pouvons dans le plan de (A), représenter par $y = \alpha$ une famille de droites (D) parallèles entre elles. Considérons une demi-caractéristique L située tout entière sur A et dont l'origine est un point M de C. L ne traverse aucune des droites (D) qui ne coupent pas C. Soit, alors, α_1 la borne supérieure précise des valeurs de α telles que L ait un point au moins sur la droite $y = \alpha$.

1° *Supposons que* L *n'ait aucun point sur la droite* (D_1), $y = \alpha_1$; la courbe L admet au moins un point d'accumulation sur cette droite. Nous allons montrer que ce point est unique.

Supposons, en effet, que L admette deux points P et P′ de (D_1) comme points

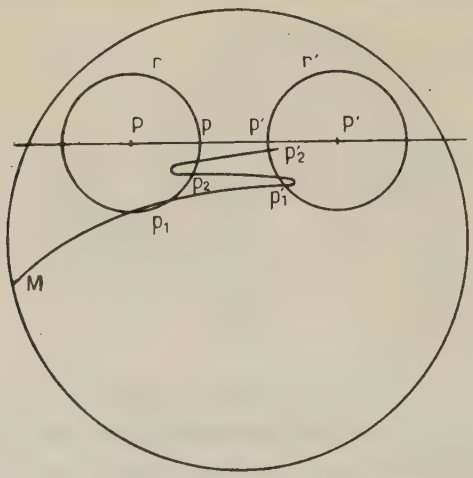


Fig. 20.

d'accumulation. Soient alors Γ et Γ′ deux orbes, ne rencontrant pas C, présentant un nombre fini de contacts avec R, et limitant sur (A) deux aires (a) et (a') simplement connexes disjointes contenant chacune l'un des points P et P′. De tels orbes existent toujours. La courbe L admet au moins un point dans (a) et un dans (a') donc L traverse Γ en un point P_1 et Γ′ en un point P'_1. Supposons, pour fixer les idées, que L admet un arc continu $MP_1P'_1$. Cet arc reste à une distance finie δ de P et de P′. Il existe donc un point de L, situé au delà de P'_1, à une distance de P inférieure à δ, et, par suite, un arc P'_1P_2 de L, traversant Γ en P_2. De même, il existe un arc $P_2P'_2$ traversant Γ′ en P'_2, et ainsi de suite. Nous définissons ainsi deux suites infinies de points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sur Γ et $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ sur Γ′.

Soit pp' les deux points situés à l'intersection de Γ et de Γ' avec le segment PP'. Les arcs MP_i (ou MP'_i) de L, et P_ip de Γ (ou P'_ip' de Γ') partagent la partie de (A) située au-dessous de D_1 en deux aires simplement connexes. Par suite, tous les points P_{i+j} sont situés sur l'arc P_ip de Γ. Les points P_i forment donc sur Γ une suite monotone et bornée.

D'autre part, chacun des arcs P_iP_{i+1} de Γ limite avec l'arc P_iP_{i+1} de L une (au moins une) aire simplement connexe. Lorsque cette aire ne contient pas de points singuliers de R, l'arc P_iP_{i+1} de Γ présente au moins un contact avec R. Or le nombre des points singuliers de R est fini; il y a par suite, une infinité d'arcs P_iP_{i+1} de Γ présentant un contact avec R, et le nombre de contacts de Γ avec R n'est pas fini. Nous arrivons donc à une contradiction.

Soit alors P le point d'accumulation unique de L sur D. P est un point limite de L, c'est-à-dire un point singulier de R auquel aboutit L.

2° *Supposons maintenant que* L *admette un point* M_1 *sur* D_1 et que ce point ne soit pas un point singulier, c'est-à-dire un point d'arrêt de L. L'arc MM_1 de L partage la partie de (A) inférieure à D en deux aires simplement connexes et, au delà de M_1, L reste constamment dans l'une, soit (A_1) de ces deux aires. En considérant la borne inférieure précise des valeurs de α telle que L rencontre la droite $y=\alpha$, au delà de M_1, nous retrouvons une étude semblable à celle que nous avons faite plus haut.

Il se peut qu'après un nombre fini d'opérations analogues, la courbe L aboutisse à un point singulier P de R. Si cette éventualité ne se produit pas, nous définissons une suite (A_1), (A_2), ..., (A_i), ... d'aires simplement connexes intérieures les unes aux autres et telles que chacune d'elles (A_i) contienne la totalité de L au delà d'un point M_i. Soit alors (A_0) la partie commune à toutes les aires (A_i). A_0 peut se réduire à un point qui constitue l'ensemble d'accumulation de L et est un point singulier de R. S'il n'en est pas ainsi, l'aire (A_0) admet une frontière Γ_0. Les points d'accumulation de L se trouvent nécessairement sur Γ_0. D'autre part, *tout point de* Γ_0 *est un point d'accumulation de* L. En effet, tout point m, qui n'est pas d'accumulation par L, admet un voisinage dans lequel L ne pénètre plus au delà d'un certain point de L, c'est-à-dire que ce voisinage, ou bien est extérieur aux aires (A_i) pour i suffisamment élevé, ou bien est intérieur à (A_0), c'est-à-dire que le point m ne peut pas être sur la frontière de (A_0).

3° *Nous nous proposons d'étudier la frontière* Γ_0 *de* (A_0). Lorsque (A_0) ne se réduit pas à un point, considérons une droite D qui a des points dans (A_0), D a un nombre fini de contacts avec R (sinon on peut toujours déformer D en une courbe infiniment voisine présentant un nombre fini de contacts avec R). Les points de (A_0) sur D sont les points de D communs à l'ensemble des (A_i). Je dis que ces points se répartissent en un nombre *fini* de segments disjoints (éventuellement réduits à des points isolés).

En effet, considérons la section de (A_i) par D. Cette section se compose de segments disjoints dont les extrémités sont des points de l'arc MM_i de L et, éventuellement, un point de C. L'arc M_iM_{i+1} de L rencontre D en un nombre non nul de points. Ce nombre, *a priori*, peut être fini ou infini. Si ce nombre est différent de 1, il existe au moins un arc de M_iM_{i+1} limitant, avec un segment de D, une aire (a) simplement connexe intérieure à l'aire $(A_i - A_{i+1})$. Il existe un contact de R avec D sur le segment frontière de (a) à moins que (a) ne contienne un point singulier de R. L'une ou l'autre de ces éventualités peut produire un nombre fini de fois. Par suite, sauf pour un nombre fini de valeurs de i, l'arc M_iM_{i+1}, de L rencontre D en un seul point et le nombre de segments de D intérieurs à (A_i) est égal au nombre des segments intérieurs à (A_{i+1}).

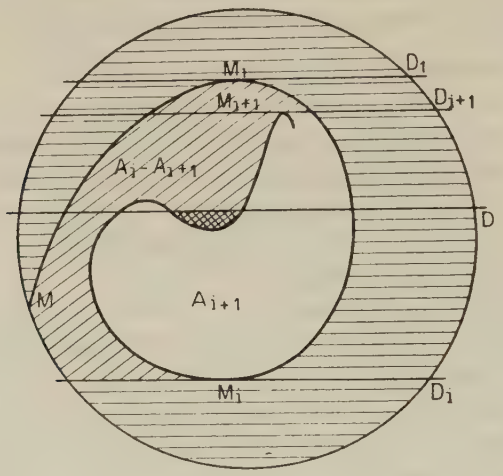


Fig. 21.

D'autre part, l'arc M_iM_{i+1} rencontre D en un nombre fini de points. En effet, un arc présentant un nombre fini de contacts avec un faisceau de droites parallèles rencontre une droite du faisceau en un nombre fini de points. Or, nous pouvons couvrir l'arc M_iM_{i+1} de L par un nombre fini de voisinages dans chacun desquels R est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles. Le segment de D, situé sur chacun de ces voisinages, rencontre l'arc correspondant de M_iM_{i+1} en un nombre fini de points, par suite, M_iM_{i+1} et D ont un nombre total de points communs qui est fini.

Le nombre des segments de D intérieurs à (A_0) s'obtient de proche en proche en passant de (A_i) à (A_{i+1}) par une somme algébrique finie de termes finis. Au delà d'une certaine valeur de i, cette somme ne varie pas. Les points de D appartenant à (A_0) ou à sa fontière Γ_0 couvrent donc un nombre fini de segments. Γ_0 *coupe* D aux points extrémités de ces segments c'est-à-dire *en nombre fini de points*.

a. Si Γ_0 ne contient aucun point singulier de R, on peut couvrir Γ_0 par un nombre fini de voisinages V dans chacun desquels R est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles. Si m est un point de Γ_0, c'est-à-dire un point d'accumulation de L, il en est de même pour tout point de la caractéristique de m. Par suite, sur un voisinage V, Γ_0 est formé par des arcs de caractéristiques. S'il y a une infinité de tels arcs disjoints, il existe une droite D qui rencontre Γ en une infinité de points. Nous avons montré plus haut que cette hypothèse est impossible. Par suite, la partie de Γ_0 située sur V est constituée par un nombre fini d'arcs caractéristiques. Les voisinages V couvrant Γ_0 étant eux-mêmes en nombre fini *la courbe* Γ_0 *sera une caractéristique fermée de* R.

b. Si la frontière de (A_0) contient des points singuliers de R, Γ_0 sera couvert par des voisinages aussi petits que l'on veut de chacun de ces points singuliers et par un nombre fini de voisinages dans lesquels R est homéomorphe à une famille de droites parallèles. Γ_0 est alors constitué par un nombre fini d'arcs de caractéristique joignant deux points singuliers de R.

Nous avons établi ainsi le résultat suivant : *une demi-caractéristique de* R, *qui reste constamment à l'intérieur d'une aire homéomorphe à un cercle, admet soit un point limite, soit une courbe limite qui est constituée par une caractéristique fermée de* R, *ou par l'ensemble d'un nombre fini d'arcs de caractéristiques joignant deux points singuliers de* R.

En particulier, *lorsque le réseau* R *n'admet ni caractéristique fermée, ni arc de caractéristique joignant deux points singuliers, ni point singulier autre que des cols* (au delà desquels on peut toujours prolonger une séparatrice par une autre), *aucune caractéristique ne pourra jamais demeurer à l'intérieur d'une aire simplement connexe quelconque.*

2. Nous supposons dans la suite que le réseau R n'admet pas d'autre point singulier que des cols et n'admet pas de caractéristiques fermées.

Nous nous proposons d'étudier l'aire couverte par une famille continue d'arcs de caractéristiques joignant deux points situés sur deux arcs d'un même orbe sans contact et ne passant par aucun col de R.

A. *Soit* Γ *un orbe, sans contact avec* R, *admettant sur* S *un voisinage orientable.* Nous distinguons les deux côtés de Γ sur S par les signes + et —.

Supposons qu'il existe un arc de caractéristique ayant ses extrémités M et N sur Γ, ne traversant pas Γ et ne passant par aucun point singulier de R. Nous pouvons supposer que l'arc MN aboutit en M à Γ_+. Il existe un voisinage de l'arc de caractéristique MN, où R est localement homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles. Par suite, un arc de caractéristique voisin de MN aboutit à Γ en m et n, au voisinage de M et N, et ne traverse pas Γ.

Faisons varier m sur Γ dans un sens constant de façon continue à partir de M, le point n varie dans un sens constant à partir de N. L'arc de caractéristique mn balaie sur S une aire (A) qui ne contient pas de point singulier de R. (A) ne se recouvre pas partiellement si les arcs Mm et Nn appartenant à Γ sont disjoints car, par suite de la constitution du réseau R, deux points de deux arcs distincts de caractéristiques ne peuvent pas coïncider en un point de S non singulier pour R. Nous pouvons, ainsi, déplacer m sur Γ jusqu'à la réalisation de l'une des éventualités suivantes :

1° Il existe un point m_0 limite des points m et tel que la demi-caractéristique issue de Γ_+ en m_0 ne traverse pas Γ. Ce cas fera l'objet d'une étude détaillée plus loin.

2° On aboutit à un point m_0 tel que l'arc $m_0 n_0$ correspondant soit constitué par deux arcs m_0C et Cn_0 de séparatrices. Au delà de m_0, les arcs de caractéristiques issus de Γ_+ ne retraversent pas Γ au voisinage de n_0 sans avoir auparavant rencontré Γ.

3° Si l'arc MN aboutit en N à Γ_-, et si aucune des deux premières éventualités

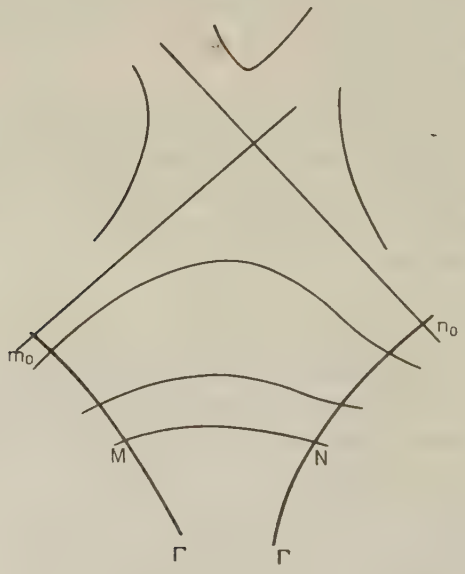


Fig. 22.

ne se présente, nous pouvons faire décrire à m toute la courbe Γ_+ jusqu'à ce que m vienne coïncider avec M. n vient alors coïncider avec N. Mais n ne peut coïncider avec N que si m coïncide avec M, par suite, n décrit Γ une fois et une seule.

Puisque le réseau R est au voisinage de tout point non singulier homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles, l'arc mn de caractéristique balaie sur S une aire S′ sans frontière qui coïncide avec S supposée connexe. Le réseau R n'admet alors pas de point singulier. La surface S est donc d'ordre de connexion 2. Elle est homéomorphe à un tore ou à une surface de Klein.

4° Si l'arc MN aboutit en N à Γ_+ et si aucune des deux premières éventualités ne se produit, nous pouvons déplacer m sur Γ tant que les deux arcs Mm et Nn restent disjoints. Supposons tout d'abord, que les points m et n se déplacent sur Γ en sens contraire (ce qui se produit si l'orbe formé par l'arc MN de Γ et par l'arc de caractéristique MN admet sur S un voisinage orientable). Nous déplaçons m jusqu'à ce que m et n viennent se confondre en m_0; dans ce cas, s'il n'existe pas de caractéristique fermée passant par m_0, Γ présente en m_0 un contact avec R. Ces deux éventualités étant contraires aux hypothèses, ce cas ne se présente jamais.

Les points m et n se déplacent nécessairement dans le même sens sur Γ et l'orbe constitué par l'arc MN, et l'arc de caractéristique MN n'admet pas de voisinage orientable sur S. Nous déplaçons m jusqu'en N; les deux arcs de caractéristiques mn et NM coïncident. L'ensemble des arcs de caractéristique sortant de Γ_+ couvre alors une surface S_1 admettant un bord Γ_+. Si l'on identifie les points de Γ_+ on transforme S_1 en une surface close S′ couverte par un réseau R_1 admettant un point singulier unique au point correspondant à Γ_+. Ce point a pour indice + 1, la surface S′ a pour nombre de connexion 1 et la surface S_1 est homéomorphe à un bonnet croisé. Soit S_2 l'ensemble des points de S non intérieurs à S_1 si l'on identifie sur S_2 les points de Γ qui sont les extrémités d'un même arc de caractéristique mn situé sur S_1, on remplace la partie du réseau R situé sur S_2 par un réseau R_2. Une caractéristique de R_2 est constituée par l'ensemble des arcs, appartenant à une même caractéristique de R, situés sur S_2. Par suite, pour chercher les points d'accumulation situés sur S_2 d'une caractéristique de R on pourra étudier les points d'accumulation de la caractéristique correspondante de R_2.

B. Il nous reste maintenant à étudier le cas où il existe un point m_0 limite de m tel que la demi-caractéristique issue en m_0 de Γ_+, ne rencontre pas Γ. Il existe, de même, un point n_0 limite des points n; la demi-caractéristique d'origine n_0, située au voisinage de n_0 du même côté de Γ que l'arc mn au voisinage de n, ne rencontre pas non plus Γ.

L'ensemble des arcs de caractéristiques issus de Γ_+ sur Mm_0 aboutissant à Γ sur Nn_0 et ne traversant pas Γ couvre, sur S, une aire (A) ne contenant aucun point singulier de R. Cette aire (A) ne traverse pas Γ, puisque aucun des arcs de caractéristiques couvrant (A) ne traverse Γ. Nous avons déjà vu que (A) ne se recouvre pas partiellement sur S. L'aire (A) est donc simplement connexe. Elle admet pour frontière l'arc de caractéristique MN, les arcs Mm_0 et Nn_0

appartenant à Γ, les demi-caractéristiques d'origine m_0 et n_0 et situées au voisinage de m_0 et n_0 du même côté de Γ que l'arc MN au voisinage de M et N et, éventuellement, un certain nombre de caractéristiques de R prises en totalité. En particulier, si une séparatrice appartient à la frontière de (A), il en sera de même de l'une des deux séparatrices qui la prolongent au delà du col.

Théorème. — *Tout arc intérieur à* (A) *joignant deux points situés sur la frontière de* (A) *et n'appartenant ni à l'arc de caractéristique* MN, *ni aux deux arcs* Mm_0 *et* Nn_0 *de* Γ, *présente au moins un contact avec* R.

Soient a un point de MN et b un point appartenant à une caractéristique frontière de (A), autre que l'arc MN. Il existe un arc ab sans contact avec R et

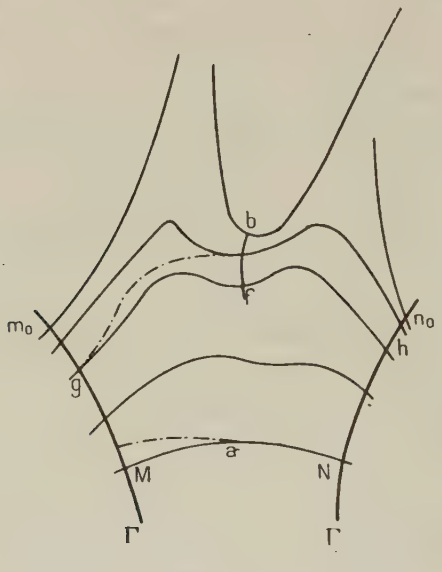


Fig. 23.

intérieur à (A). En effet, il existe toujours un arc $b\alpha$ sans contact avec R et intérieur à (A). Cet arc rencontre en f une caractéristique de R qui traverse l'arc Mm_0 de Γ en g et l'arc Nn_0 de Γ en h. Il existe alors deux arcs ab sans contact avec R et infiniment voisins des deux sommes d'arcs : 1° arc de caractéristique aM, arc Mg appartenant à Γ, arc de caractéristique gf, arc sans contact fb porté par $b\alpha$; 2° arc de caractéristique aN, arc Nh appartenant à Γ, arc de caractéristique hf, arc fb porté par $f\alpha$.

Considérons deux points b_1 et b_2 sur la frontière de (A) non situés sur MN, ni sur Γ. On peut joindre b_1a et b_2a par deux arcs sans contacts, n'ayant d'autre point commun que a [on pourra prendre, soit pour b, une somme d'arc 1° et pour b_2 une somme d'arc 2°, soit l'inverse en choisissant les points f_1

et f_2 associés à b_1 et b_2 sur un même arc de caractéristique intérieur à (A)]. L'arc $b_1 a b_2$ constitué par l'ensemble de ces deux arcs sans contact présente en a un contact avec R.

Tout arc $b_1 b_2$ intérieur à (A) forme avec $b_1 a b_2$ un orbe (ou un ensemble d'orbes) d'indice nul. Par suite, le nombre de contacts avec R de tout arc $b_1 b_2$ intérieur à (A) est de même parité que le nombre des contacts de l'arc $b_1 a b_2$ précédemment défini, c'est-à-dire est impair. Tout arc intérieur à (A) joignant deux points situés sur une caractéristique frontière de (A) présente alors au moins un contact avec R.

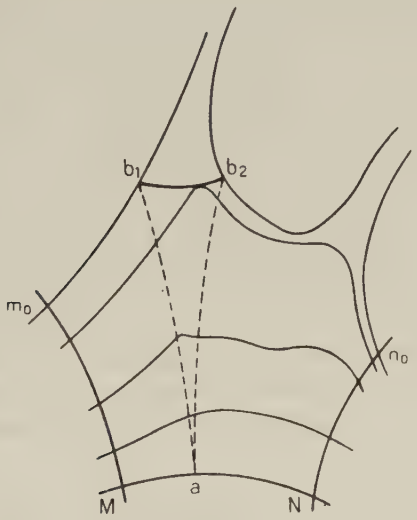


Fig. 24.

Il résulte de ce théorème qu'*il est impossible qu'une demi-caractéristique de* R *appartienne tout entière à la frontière de* (A). Nous donnons une démonstration par l'absurde.

Une demi-caractéristique L par hypothèse admet au moins un point d'accumulation P sur S. Il existe toujours sur S un arc $P_1 P P_2$ sans contact avec R puisque au voisinage de P, R est localement homéomorphe à un faisceau de droites parallèles. L rencontre une infinité de fois cet arc $P P_1 P_2$ en des points $1_1, 1_2, \ldots, 1_i$. Si L appartient en totalité à la frontière de (A), chaque point 1_i appartient à la frontière de (A), donc limite un arc contigu intérieur à (A). Chacun de ces arcs présente au moins un contact avec R d'après le théorème précédent, c'est-à-dire que l'arc $P_1 P P_2$ que nous avons supposé sans contact doit présenter un nombre infini de contacts avec R. Nous aboutissons donc à une contradiction.

La frontière de (A) comprend donc, outre deux arcs de Γ et l'arc MN, un arc $m_0 n_0$ appartenant à une seule caractéristique de R.

Nous pouvons tirer de l'étude précédente les conclusions suivantes : étant donné un orbe sans contact avec R de voisinage orientable sur S, *si nous considérons l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de* Γ_+ *par exemple, nous nous trouverons nécessairement dans l'un des cas suivants :*

1° *Aucune de ces demi-caractéristiques ne traversent* Γ. Nous verrons plus loin que ce cas ne peut jamais se présenter.

2° *Toutes les demi-caractéristiques retraversent* Γ *en aboutissant à* Γ_+ *et aucune d'entre elles n'est une séparatrice.*

Dans ce cas, Γ partage S en deux sufaces ouvertes dont l'une, S_1, est homéomorphe à un bonnet croisé. Le réseau R sur S_1 est homéomorphe au réseau obtenu en considérant une couronne circulaire couverte par des segments de rayons et en identifiant les points diamétralement opposés sur l'une des circonférences frontière de la couronne circulaire. Si l'on considère alors les demi-caractéristiques issues des points de Γ_-, la seconde éventualité envisagée ne peut se produire et la troisième n'aura lieu que si S est homéomorphe à l'ensemble des deux bonnets croisés (donc S est non orientable de nombre de connexion 2) et si R n'admet aucun point singulier.

3° Γ *est partagé en un nombre fini d'arcs par des points* $m_1, m_2, \ldots, m_i$, *tels que la demi-caractéristique issue de* Γ_+ *en* $m\alpha$ *aboutisse à un col de* R *avant d'avoir traversé* Γ. *Si les demi-caractéristiques issues de* Γ *sur un arc* $m_\alpha m_{\alpha+1}$ *ne rencontrent pas toutes* Γ *en couvrant un arc continu, aucune d'entre elles ne retraverse* Γ.

Remarque. — Si Γ n'est pas un orbe sans contact, mais présente un nombre fini de contacts avec R, en $a_1, a_2, \ldots, a_p$, il peut y avoir des arcs de caractéristique ne traversant pas Γ ayant une extrémité en un point b_β de Γ_+ et aboutissant en un point a_γ. Les points a_γ, b_β, m_α partagent Γ en un nombre fini d'arcs tels que si les demi-caractéristiques issues de Γ_+ sur un de ces arcs ne retraversent pas toutes Γ sur un arc continu, aucune d'elle ne retraverse Γ.

Nous arrivons à un résultat analogue en considérant non pas un orbe Γ, mais un arc présentant un nombre fini de contacts avec R.

3. Nous introduisons dans ce chapitre une hypothèse supplémentaire (h) et nous étudions les réseaux R satisfaisant à (h).

Nous disons que l'hypothèse (h) *est satisfaite, sur la surface* S, *par le réseau* R, *si tout point de* S *est un point d'accumulation pour une caractéristique, au moins, de* R.

D'autre part, nous disons que *l'hypothèse* (h) *est satisfaite sur un orbe* Γ *si tout point de* Γ *est un point d'accumulation pour une caractéristique, au moins, de* R.

Nous montrerons, d'ailleurs, plus loin, que, si la condition (h) est satisfaite

sur un orbe sans contact, elle est satisfaite sur la surface S. Inversement, si la condition (h) est satisfaite sur S, elle est évidemment satisfaite sur tout orbe, et, en particulier, elle est satisfaite sur au moins un orbe sans contact avec R puisque nous avons vu que l'on peut toujours trouver un tel orbe sur S.

A. Théorème. — *Lorsque l'hypothèse* (h) *est satisfaite sur un orbe* Γ *admettant un voisinage orientable, ne passant par aucun col de* R *et sans contact avec* R, *toute demi-caractéristique issue d'un point quelconque de* Γ *retraverse* Γ.

Nous avons vu que Γ_+ et Γ_- sont décomposables en un nombre fini d'arcs tels que les demi-caractéristiques dont l'origine est sur un de ces arcs retraversent ou non simultanément Γ. Supposons alors qu'il existe un arc $\alpha\beta$ de Γ, tel qu'aucune des demi-caractéristiques issues de $\alpha\beta_+$ ne retraverse $\alpha\beta$.

Un arc de caractéristique ayant ses extrémités sur $\alpha\beta$, s'il en existe, aboutira à $\alpha\beta$. Un tel arc MN appartiendra à une caractéristique constituée, outre l'arc MN, par deux demi-caractéristiques issues en M et N de $\alpha\beta_-$ et qui ne retraverseront pas $\alpha\beta$. Par suite, aucune caractéristique n'aura plus de deux points commun avec $\alpha\beta$ et aucun point de $\alpha\beta$ ne pourra être point d'accumulation d'aucune caractéristique de R, c'est-à-dire que l'hypothèse (h) ne sera pas vérifiée sur Γ.

Donc, si l'hypothèse (h) est vérifiée sur Γ toute demi-caractéristique, issue d'un point de Γ, retraverse Γ une infinité de fois, puisque aucune caractéristique n'est une courbe fermée.

Remarque importante. — Nous avons vu que si une demi-caractéristique issue d'un point M de Γ ne retraverse pas un arc $\alpha\beta$ contenant M, l'autre demi-caractéristique issue de M traversera, au plus, une fois, l'arc $\alpha\beta$. C'est-à-dire que *deux demi-caractéristiques appartenant à la même caractéristique ont le même ensemble d'accumulation sur* S.

B. Théorème. — *Lorsque l'hypothèse* (h) *est vérifiée sur un orbe* Γ *admettant un voisinage orientable, ne passant par aucun col de* R, *et sans contact avec* R, *toute caractéristique de* R *traverse* Γ.

Nous supposerons, tout d'abord, que R n'admet pas d'arc de caractéristique joignant deux cols. Γ_+ d'une part, Γ_- d'autre part, sont partagés en un nombre fini d'arcs par les premiers points de rencontre avec Γ des différentes séparations de R suivies à partir des cols, soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$; les points m_1, $m_2, \ldots, m_i$ sont situés sur Γ_+, $m_{i+1}, \ldots, m_n$ sur Γ_-. Nous supposons, en outre, que ces points sont rangés dans l'ordre où on les rencontre sur Γ_+ et sur Γ_-.

Les demi-caractéristiques issues de Γ sur l'un des arcs, $m_\alpha m_{\alpha+1}$ retraversent Γ en couvrant un autre de ces arcs. L'ensemble des arcs de carac-

téristiques issus de l'arc $m_\alpha m_{\alpha+1}$ et aboutissant sur l'arc $m_\beta m_{\beta+1}$ sans avoir traversé Γ, forme un ruban de courbes, couvrant sur S une aire (B) homéomorphe à l'intérieur d'un rectangle plan ; cette aire (B) admet comme frontière, outre les arcs $m_\alpha m_{\alpha+1}$ et $m_\beta m_{\beta+1}$ portés par Γ, un arc de caractéristique joignant m_α à m_β (ou à $m_{\beta+1}$) et un arc de caractéristique joignant $m_{\alpha+1}$ à $m_{\beta+1}$ (ou à m_β). Chacun de ces arcs de caractéristiques est constitué par l'ensemble de deux arcs de séparatrices puisque l'arc $m_\alpha m_\beta$, par exemple, passe par un col et un seul.

Les différentes aires $(B)_\lambda$ couvertes par les différents rubans de caractéristiques ne se recouvrent pas partiellement. D'autre part, tout arc de séparatrice joignant un col au point m_α correspondant appartient à la frontière des deux aires $(B)_{\lambda_1}$ et $(B)_{\lambda_2}$ couvertes par les arcs de caractéristiques issus des points des arcs $m_{\alpha-1}m_\alpha$ et $m_\alpha m_{\alpha+1}$ (sauf si $\alpha = i$ ou $i+1$).

L'ensemble des aires $(B)_\lambda$ couvre alors sur S une surface sans frontière, et, puisque S est supposée connexe, l'ensemble des aires $(B)_\lambda$ couvre S en totalité. Par suite, l'ensemble des caractéristiques traversant Γ coïncide avec la totalité des caractéristiques de R.

Remarque I. — Nous avons vu précédemment que toute demi-caractéristique issue de Γ retraverse Γ. Par suite, toutes les caractéristiques de R traversent Γ une infinité de fois.

Remarque II. — Nous avons supposé que R n'admet pas d'arc de séparatrice joignant deux cols. Si nous supprimons cette hypothèse, mais que nous supposons toujours que R n'admet pas de caractéristique fermée, nous pouvons remplacer le réseau R par un réseau R′ en identifiant tous les points d'un arc de caractéristique joignant deux cols C_1C_2. Pour le réseau R′ il existe un orbe Γ′ sans contact ne passant par aucun col, admettant un voisinage orientable et, par suite, il existe pour R un orbe Γ ne rencontrant pas l'arc C_1C_2 de caractéristique, admettant un voisinage orientable et sans contact avec R. Toutes les caractéristiques de R′ traverseront une infinité de fois Γ′ et, par suite, toutes les caractéristiques de R traverseront une infinité de fois Γ.

C. Théorème. — *Toute caractéristique de* R *traverse tout arc mn porté par un orbe* Γ, *sans contact avec* R, *ne passant par aucun col de* R *et admettant un voisinage orientable sur* S.

Nous établirons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *L'ensemble des caractéristiques qui traversent l'arc mn est identique à l'ensemble des caractéristiques qui traversent un arc continu* $\mu\nu$ *de* Γ, *arc contenant l'arc mn et au moins un autre arc de* Γ *dont une extrémité est en m ou n.*

Il y a au plus un nombre fini α de séparatrices de R qui traversent l'arc mn. Nous prenons sur chacune d'elles le premier point de rencontre avec mn lorsque l'on suit la séparatrice à partir du col.

Ces α points partagent alors mn_+ et mn_- en un certain nombre d'arcs. Soient dans l'ordre où ils se présentent sur mn, $m_1, m_2, \ldots, m_i$ les points situés sur mn_+ et $m_{i+3}, m_{i+4}, \ldots, m_\alpha$ les points situés sur mn_-. Nous convenons de désigner par m_0 et m_{i+1} les points m et n considérés comme appartenant à mn_+ et par m_{i+2} et $m_{\alpha+1}$ les points m et n considérés comme appartenant à mn_-.

Nous avons déjà vu (p. 309, A) que toute demi-caractéristique issue d'un point de mn retraverse mn si l'hypothèse (h) est vérifiée sur Γ.

L'une au moins des quatre demi-caractéristiques issues des points m et n n'est pas une séparatrice et n'admet pas d'arc joignant mn. En effet, s'il existe un arc de caractéristique joignant m et n, les demi-caractéristiques prolongeant cet arc mn au delà de m et de n ne sont pas deux séparatrices, car il

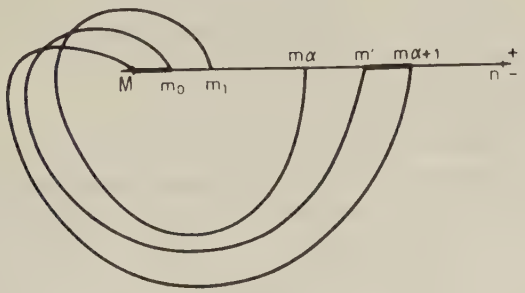


Fig. 25.

existerait alors deux séparatrices, car il existerait alors un arc de caractéristique joignant deux cols. D'autre part, s'il n'existe pas d'arc de caractéristique joignant m et n, une demi-caractéristique issue de m et une demi-caractéristique de n, au moins, ne sont pas des séparatrices.

Supposons, par exemple, que la demi-caractéristique de m_0 (c'est-à-dire la demi-caractéristique issue de mn_- en m) ne soit pas une séparatrice et n'aboutisse pas en n. La demi-caractéristique de m_1, retraverse mn en m_α et les demi-caractéristiques issues des points de l'arc $m_1 m_0$ retraversent mn en couvrant un arc continu $m_\alpha m'$ porté par l'un des deux arcs $m_{\alpha-1} m_\alpha$ ou $m_\alpha m_{\alpha+1}$. Supposons, pour fixer les idées, que l'arc $m_\alpha m'$ soit porté par $m_\alpha m_{\alpha+1}$.

Comme la demi-caractéristique de m_0 n'est pas une séparatrice et n'aboutit pas à n, le point m' est distinct du point $m_{\alpha+1}$ et, le réseau R étant homéomorphe à un faisceau de droites parallèles au voisinage de l'arc de caractéristique $m_0 m$, il existera un arc $m'\mu'$ porté par l'arc $m' m_{\alpha+1}$ de mn tel que les demi-caractéristiques issues des points de $m'\mu'$ traverseront un arc continu $m\mu$

contigu à mn sur Γ. L'ensemble des caractéristiques traversant mn est le même que l'ensemble des caractéristiques traversant l'arc μn de Γ.

Nous pouvons faire le même raisonnement à partir de l'arc μn. On obtient ainsi une suite d'arc $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$, ..., $\mu_h\nu_h$ portés par Γ tels que

$$\mu_h\nu_h \supset \mu_{h-1}\nu_{h-1}.$$

L'ensemble des caractéristiques traversant $\mu_h\nu_h$ est identique à celui des caractéristiques traversant l'arc mn initial.

Si les caractéristiques traversant mn ne couvrent pas Γ en totalité, il existe un arc continu $\mu'\nu'$, contenant tous les arcs $\mu_h\nu_h$, qui est le plus grand des arcs continus couverts en totalité par l'ensemble des caractéristiques traversant mn.

Un raisonnement identique à celui que l'on a fait plus haut, montre l'existence d'un arc contenant $\mu'\nu'$ et couvert en totalité par les caractéristiques traversant $\mu'\nu'$ c'est-à-dire par l'ensemble des caractéristiques traversant mn.

Nous arrivons donc à une contradiction et l'ensemble des caractéristiques traversant mn couvre l'orbe Γ en totalité. Par suite, une caractéristique quelconque de R traverse l'arc mn.

Par suite, si l'hypothèse (h) *est vérifiée sur un orbe* Γ *sans contact toute caractéristique de* R *traverse un arc quelconque porté par* Γ *et, par suite, la courbe* Γ *appartient au lieu des points d'accumulation d'une caractéristique quelconque de* R.

D. Soit P un point appartenant à l'ensemble d'accumulation (E) de L. Si P n'est pas situé sur une séparatrice, tous les points de la caractéristique de P appartiendront à (E). Si P est situé sur une séparatrice Λ qui se prolonge au delà du col par deux séparatrices Λ_1 ou Λ_2, l'ensemble (E) contiendra tous les points de Λ et l'une au moins des deux séparatrices Λ_1 et Λ_2. Si P est un point d'accumulation de L simultanément à droite et à gauche, les deux séparatrices Λ_1 et Λ_2, appartiennent à l'ensemble E.

Si l'hypothèse (h) est vérifiée sur Γ une caractéristique L quelconque traverse tout arc de Γ; par suite, tout point de Γ est un point d'accumulation à la fois à droite et à gauche pour L. Alors l'ensemble des points situés sur une caractéristique de R appartient à l'ensemble (E) qui contient tous les points de S.

Nous avons donc le résultat suivant :

S'il existe un orbe Γ *sans contact avec* R, *ne passant par aucun point singulier de* R_1, *admettant un voisinage orientable sur* S, *et sur lequel l'hypothèse* (h) *est vérifiée, une courbe quelconque de* R *admet tout point de* S *comme point d'accumulation.*

En particulier, chaque fois que l'hypothèse (h) est vérifiée sur tout S, une courbe quelconque de R admet tout point de S comme point d'accumulation (1).

Ce sera en particulier le cas du réseau décrit (p. 284, B).

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'hypothèse (h) *soit vérifiée sur* S *est que tout point d'un orbe* Γ *sans contact soit un point d'accumulation pour au moins une séparatrice de* R.

La condition est nécessaire, puisque si (h) est vérifiée, tout point de Γ est un point d'accumulation pour une caractéristique quelconque de R. Or nous avons vu que deux demi-caractéristiques appartenant à une même caractéristique ont le même ensemble d'accumulation, tout point de Γ est, par suite, un point d'accumulation, pour toute demi-caractéristique et, en particulier, pour toute séparatrice.

Il est, d'autre part, immédiat que la condition est suffisante.

Par suite, une condition nécessaire et suffisante pour que (h) soit vérifiée est qu'il existe au moins une séparatrice de R traversant un arc quelconque porté par Γ.

CINQUIÈME PARTIE.

Nous considérons dans la suite des réseaux (R) qui ne sont pas assujettis à satisfaire l'hypothèse (h).

Nous allons montrer que toutes les caractéristiques de R ont le même ensemble d'accumulation sur S et que toute caractéristique de R rencontre un orbe Γ sans contact avec R, ne passant par aucun point singulier de R et admettant un voisinage orientable sur S. Nous établirons pour cela, successivement, les points suivants :

1° Si l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points d'un arc $\alpha\beta_+$ de Γ_+ forme un ruban qui ne se ramifie pas (c'est-à-dire qu'aucune des demi-caractéristiques n'aboutit à un col), aucune des demi-caractéristiques du ruban ne retraverse $\alpha\beta$ si la surface S a un nombre de connexion différent de 2.

2° L'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de $\alpha\beta_-$ est alors constitué par la réunion d'un nombre fini de rubans ne se ramifiant pas. Nous étudierons dans la suite chacun de ces rubans c'est-à-dire que nous serons

(1) En mécanique, les mouvements récurrents se rencontrent fréquemment. Un mouvement est dit récurrent si une trajectoire admet chacun de ses points comme point d'accumulation. Lorsque le lieu des trajectoires est une surface S, les trajectoires forment sur S un réseau R. Si ce réseau n'admet pas de points singuliers auxquels aboutissent une infinité de trajectoires, nous pouvons affirmer qu'une trajectoire quelconque passe aussi près que l'on veut d'un point arbitraire de S.

ramenés au cas où l'ensemble des caractéristiques traversant $\alpha\beta$ forme un ruban doublement infini ne se ramifiant pas.

3° Nous montrerons alors que l'on peut faire correspondre au réseau R un réseau R′ tracé sur une surface S′ homéomorphe à S, de telle façon que les courbes de R correspondent à celles de R′ de façon biunivoque, à l'exception des caractéristiques de R intérieures ou frontières d'un ruban ne se ramifiant pas, dont l'ensemble correspond à une courbe unique de R′.

1. Théorème. — *S'il existe un arc $\alpha\beta$ de Γ tel que l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de $\alpha\beta$ forme un ruban qui ne se ramifie pas, aucune des demi-caractéristiques du ruban ne retraverse $\alpha\beta$, si le nombre de connexion de* S *est différent de* 2.

1° Supposons tout d'abord que l'ensemble de toutes les demi-caractéristiques issues de Γ_+ forme un ensemble ne se ramifiant pas.

Si une demi-caractéristique retraverse Γ il en sera de même pour toutes les demi-caractéristiques. Nous avons vu que les demi-caractéristiques considérées couvrent alors toute la surface S. Celle-ci a pour nombre de connexion 2, puisque R n'a pas de point singulier.

Si nous supposons que la surface S a un nombre de connexion différent de 2 (ou plus généralement que le réseau R admet des points singuliers), il existe au moins une demi-caractéristique issue de Γ_+ qui aboutit à un col.

2° D'autre part, si $\alpha\beta$ est contenu dans un arc $\alpha'\beta'$ de Γ tel que l'ensemble des demi-caractéristiques issues de $\alpha'\beta'_+$ ne se ramifie pas, il suffit d'établir la propriété énoncée pour le ruban issu de $\alpha'\beta'_+$ car elle sera alors vérifiée *a fortiori* pour $\alpha\beta_+$. Nous supposons que l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de tout arc de Γ contenant $\alpha\beta_+$ se ramifie.

3° Supposons alors qu'il existe un arc de caractéristique MN aboutissant en M sur $\alpha\beta_+$ et en N sur $\alpha\beta$.

Si l'on considère un point m variable sur $\alpha\beta$, la demi-caractéristique issue en m de $\alpha\beta_-$ retraverse Γ en un point m_1. Lorsque m se déplace de façon continue et dans un sens constant sur l'arc $\alpha\beta$ de Γ, m_1 se déplacera de façon continue et dans un sens constant sur un arc $\alpha_1\beta_1$ de Γ; l'arc orienté mm_1 de Γ est une fonction continue du point m.

4° Il est impossible que l'arc MN aboutisse en N sur $\alpha\beta_+$.

Supposons en effet qu'il en soit ainsi, lorsque le point m coïncide avec M, le point m'_1 coïncide avec N et l'arc mm'_1 avec l'arc MN. Lorsque m est en N, m_1^+ est en M. Par suite, lorsque m varie de M à N, il existe, nécessairement, une position de m telle que l'arc mm_1 de Γ soit nul. La demi-caractéristique issue en m de Γ_+ revient donc se superposer à elle-même, ce qui n'est possible que si elle admet un point d'arrêt qui est un col auquel aboutit une séparatrice

unique ou si elle aboutit à un col et peut être prolongée par une courbe fermée. Nous avons supposé qu'aucune demi-caractéristique issue de $\alpha\beta_+$ n'aboutit à un col; par suite, il n'est pas nécessaire d'utiliser l'hypothèse que R n'a pas de courbe fermée pour affirmer qu'un arc de caractéristique issu d'un point de $\alpha\beta_+$ ne peut aboutir que sur $\alpha\beta_-$.

5° L'arc MN aboutit donc en N sur $\alpha_1\beta_1$ et se prolonge au delà de N par une demi-caractéristique issue de $\alpha\beta_+$. L'arc $\alpha_1\beta_1$ a une partie commune avec $\alpha\beta$, mais aucun des points α et β ne peut être intérieur à l'arc $\alpha_1\beta_1$. En effet, si l'arc $\alpha\beta$ ne couvre pas la totalité de Γ, il existe un arc $(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)$ contenant $\alpha\beta$ tel que l'ensemble des demi-caractéristiques issues de $(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)_-$ ne se ramifie pas, hypothèse que nous avons exclue. Si, d'autre part, l'arc $\alpha\beta$ couvre la totalité de Γ, la demi caractéristique issue de Γ_+ en α aboutit à un col et, par suite, le point α ne peut pas être intérieur à l'arc $\alpha_1\beta_1$.

L'arc $\alpha_1\beta_1$ ne peut pas non plus coïncider avec $\alpha\beta$, car le réseau R admettrait une ou deux courbes fermées selon que α coïncide avec α_1 ou avec β_1.

Par suite, l'arc $\alpha_1\beta_1$ est porté par l'arc $\alpha\beta$ et a au plus une extrémité commune avec $\alpha\beta$. Mais alors, les demi-caractéristiques issues de $\alpha\beta_+$ retraverseront successivement des arcs $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, ..., $\alpha_n\beta_n$ tel que chacun d'eux soit contenu dans celui qui le précède. Ces arcs admettront alors un arc limite $\alpha'\beta'$ (qui peut se réduire à un point) et par les points $\alpha'_1\beta'$ passeront une ou deux caractéristiques fermées de R. Comme nous avons supposé que R n'admettait pas de courbes fermées, nous arrivons à une impossibilité.

Nous voyons donc que si le réseau R admet des points singuliers, aucune des demi-caractéristiques issues des points d'un arc $\alpha\beta_+$ porté par un orbe sans contact Γ, ne retraverse $\alpha\beta$ si l'ensemble de ces demi-caractéristique forme un ruban ne se ramifiant pas.

Si l'ensemble des demi-caractéristiques issues de $\alpha\beta_+$ ne se ramifie pas, l'ensemble des caractéristiques traversant $\alpha\beta$ forme un nombre fini de rubans de caractéristiques ne se ramifiant pas. En effet, le nombre de séparatrices de R étant fini, un nombre au plus fini d'entre elles traversent $\alpha\beta$. Elles aboutissent nécessairement sur $\alpha\beta$ et aucune ne retraverse $\alpha\beta$, puisque aucune demi-caractéristique issue de $\alpha\beta_+$ ne retraverse $\alpha\beta$. Par suite, un nombre au plus fini de points de $\alpha\beta$ appartiennent à une séparatrice et ces points partagent $\alpha\beta$ en un nombre fini d'arcs $m_i m_{i+1}$ tels que l'ensemble des caractéristiques traversant l'un d'eux forme un ruban ne se ramifiant pas.

Nous étudions, dans la suite, chacun de ces rubans, c'est-à-dire que nous considérons le cas où les caractéristiques traversant $\alpha\beta$ forment un ruban ne se ramifiant pas. Une caractéristique du ruban traverse alors $\alpha\beta$ en un seul point.

2. *Étude des réseaux* R *ne satisfaisant pas* (h). — A. Considérons une représentation de S sur une aire plane Σ dont la frontière est un polygone π à

un seul sommet et $2q$ côtés, correspondant deux par deux à un ensemble d'orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ de S qui présentent un nombre de contacts au plus fin avec R. Au réseau R correspond sur Σ un réseau ρ.

Une demi-caractéristique de R ne peut pas correspondre à un arc de ρ ne rencontrant pas π, puisque ρ comme R n'admet ni points singuliers autres que des cols, ni caractéristiques fermées (1). Par suite, une caractéristique de R est représentée sur Σ par une infinité d'arcs de ρ d'extrémités sur π.

1° Si R ne satisfait pas à l'hypothèse (h), il existe au moins un ruban de caractéristiques de R ne se ramifiant pas. Aucun point d'une caractéristique intérieure à un tel ruban ne sera point d'accumulation pour aucune caractéristique de R. Un nombre au plus fini de caractéristiques intérieures à un ruban seront tangentes à l'un des orbes Γ_i. Nous avons vu qu'un ruban ne couvre jamais deux arcs sans contact ayant une partie commune. Nous pouvons donc remplacer un ruban par un nombre fini de rubans tels qu'aucune des caractéristiques intérieures à l'un d'entre eux ne soit tangente à aucun des orbes Γ_i et ne passe pas le point de S commun à tous les orbes Γ_i.

Soit alors une caractéristique L_0 de R intérieure à un ruban. Elle rencontrera les orbes Γ_i en une suite de points $\ldots, M_{-n}, \ldots, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, où l'on suppose les points rangés dans l'ordre où on les rencontre sur L_0. Considérons pour fixer les idées le point M_0 sur l'orbe Γ_i représenté par le point m_0 sur π. Une caractéristique L, intérieure au ruban, que l'on fait varier de façon continue dans un sens constant à partir de L_0 sera représentée par une série d'arcs de ρ dont l'un rencontrera π en un point m qui décrit dans un sens constant un arc porté par π et d'origine m_0. Cet arc m_0m ne peut couvrir la totalité de π, puisqu'en particulier, il ne peut contenir aucun des points images sur π des points $M_{-n}, \ldots, M_{-1}, M, \ldots, M_n$. Par suite, le plus grand arc continu contenant m_0 que couvriront les courbes de ρ correspondant aux caractéristiques de R appartenant au ruban étudié sera un arc $\alpha_0 m_0 \beta_0$ où les points α_0 et β_0 correspondront à des points a_0 et b_0 situés sur les caractéristiques frontières du ruban.

Un ruban de R sera alors représenté par l'ensemble des arcs de ρ joignant les points situés sur deux arcs de π, $\alpha'_p\beta'_p$ et $\alpha''_p\beta''_p$, où $\alpha'_i\alpha''_i$ sont les deux points correspondant au point a_i sur une caractéristique frontière, $\beta'_i\beta''_i$ les deux points correspondant au point b_i sur l'autre caractéristique frontière du ruban.

2° Nous avons déjà vu que deux arcs $\alpha'_p\beta'_p$ (ou $\alpha''_p\beta''_p$) et $\alpha'_q\beta'_q$ sont sans partie commune, nous allons montrer, en outre, que *ces arcs sont disjoints*, exception faite éventuellement des points correspondant à un point de contact de π avec ρ. Supposons, en effet, que deux points α_p et α_{p+2} coïncident en un point

(1) ρ ne peut donc admettre de caractéristique non fermée à l'intérieur d'une aire simplement connexe (p. 303).

autre qu'un contact de π avec ρ; le ruban considéré admet une caractéristique frontière fermée, ce qui est impossible. Supposons alors qu'un point β_p coïncide avec un point α_{p+r}, le point $\beta_{p+\lambda r}$ coïncide de même avec le point $\alpha_{p+(\lambda+1)r}$. Les arcs $\alpha_p\beta_p$, $\alpha_{p+r}\beta_{p+r}$, ..., $\alpha_{p+\lambda r}\beta_{p+\lambda r}$, ... couvriront un arc continu de π ne pouvant contenir π en totalité. La suite des points $\alpha_{p+\lambda r}$ est donc sur π monotone, infinie et bornée et admet un point limite α qui correspond à un point a sur S. La caractéristique de R passant par a ne peut être qu'une courbe fermée, puisque le $r^{\text{ième}}$ point de rencontre à partir de a de cette caractéristique avec l'ensemble des orbes Γ_i coïncide avec a. Nous aboutissons donc à une contradiction et, lorsque R n'admet pas de caractéristique fermée, les arcs de π traversés par des arcs de ρ correspondant à des arcs de caractéristiques appartenant à un ruban de R sont deux à deux disjoints.

3° *Les points d'accumulation d'une caractéristique intérieure à un ruban coïncident avec les points d'accumulation des caractéristiques frontières du ruban.*

Nous avons vu que si m est un point d'accumulation d'une caractéristique L de R, tout point de la caractéristique passant en m sera point d'accumulation de L. Il suffit donc ici de montrer que les points des orbes Γ_i qui sont points d'accumulation pour une caractéristique intérieure à un ruban sont les mêmes que les points d'accumulation pour une caractéristique frontière du ruban. Or, dire que m sur Γ_i est point d'accumulation d'une courbe intérieure au ruban signifie que tout arc de π contenant un point image de m contient une infinité d'arcs $\alpha'_p\beta'_p$ ou $\alpha''_p\beta''_p$. Par suite, m sera ou non point d'accumulation, simultanément, pour toute les caractéristiques appartenant à un même ruban.

B. Un ruban de R est représenté sur Σ par des arcs de courbe couvrant des arcs de π, $\alpha'_p\beta'_p$ et $\alpha''_p\beta''_p$, où p varie par valeurs entières de $(-\infty)$ à $(+\infty)$. Soit (E) l'ensemble des points de π qui ne sont intérieurs à aucun des arcs $\alpha'_p\beta'_p$ et $\alpha''_q\beta''_q$. Nous nous proposons d'établir une correspondance point par point entre les points de (E) et les points d'un cercle C, correspondance respectant l'ordre des points (si l'on considère trois points M_1, M_2, M_3 de E et leurs trois correspondants μ_1, μ_2, μ_3, tout point situé sur l'arc M_1M_2 ne contenant pas M_3 sur π a pour correspondant sur C un point situé sur l'arc $\mu_1\mu_2$ ne contenant pas μ_3).

Posons :

$$\alpha'_0\beta'_0=\lambda_0, \qquad \alpha''_0\beta''_0=\lambda_1, \qquad \ldots,$$

$$\alpha'_p\beta'_p=\lambda_{4p-2}, \qquad \alpha''_p\beta''_p=\lambda_{4p-1}, \qquad \alpha'_{-p}\beta'_{-p}=\lambda_{4p}, \qquad \alpha''_{-p}\beta''_{-p}=\lambda_{4p+1} \qquad (p>0).$$

Nous voulons établir entre les points de π et les points de C, une correspondance continue associant à l'ensemble des points intérieurs ou frontière de l'un des arcs λ_p un point unique de C.

Soit M un point quelconque de (E), [(E) n'est jamais vide puisque (E) contient au moins les points frontières des arcs λ_p] et μ un point quelconque

de C. Nous faisons correspondre M à μ. Nous sommes alors ramenés à établir une correspondance entre deux segments de droite soit ox et oy, que l'on peut supposer de longueur 1. Sur le segment $(0, 1)$ porté par ox, on a une infinité dénombrable de segments disjoints $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$.

Considérons l'intervalle λ_0 d'extrémité $\alpha_0\beta_0$, nous posons $y(\lambda_0) = \frac{1}{2}$. Si l'un des intervalles $0\alpha_0$ (ou $\beta'_0 1$) est vide d'intervalles λ_p, on établit une correspondance linéaire entre cet intervalle et l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}, 1\right)$ de oy. Sinon dans chacun des deux intervalles $0\alpha_0$ et $\beta'_0 1$ on considère celui des λ_p d'indice minimum, soit λ_1^1, λ_1^2 ces deux intervalles. L'un d'eux coïncidera certainement avec λ_1. Pour λ_1^1 nous posons $y = \frac{1}{2^2}$ pour λ_1^2, $y = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$. Nous

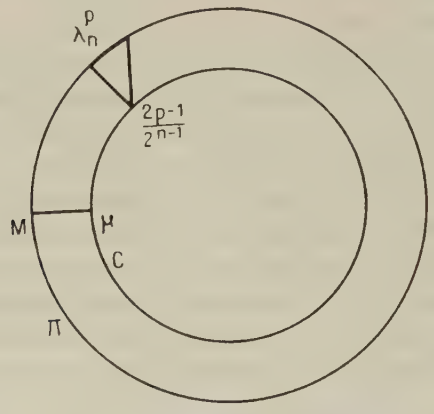


Fig. 26.

recommençons dans chacun de 2^2 intervalles $0\lambda_1^1$, $\lambda_1^1\lambda_0$, $\lambda_0\lambda_1^2$, $\lambda_1^2 1$ en considérant les λ_p d'indice minimum dans chacun des intervalles considérés et en leur attribuant le milieu de l'intervalle correspondant sur oy. En opérant ainsi de proche en proche, à la $n^{\text{ième}}$ opération, on considère les intervalles $\lambda_n^1, \ldots, \lambda_n^{2^n}$ et l'on pose

$$y\left(\lambda \frac{p}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} + (p-1)\frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}.$$

L'intervalle λ_n se trouve toujours parmi les λ'_i d'indice inférieur ou au plus égal à n.

D'autre part, chaque fois que l'on aura un intervalle $\lambda_n^i\lambda_n^{i+1}$ vide d'intervalles λ_p, on établira une correspondance linéaire entre les points de cet intervalle et les points de oy compris entre $y(\lambda_n^i)$ et $y(\lambda_n^{i+1})$.

On définit par ce procédé une fonction $y(x)$, qui fait correspondre π à C, et qui est :

1° Définie. Tout point du segment $(0, 1)$ sur ox se présente comme

appartenant soit à un intervalle λ_p soit à un segment compris entre λ_n^i et λ_n^{i-1}, soit enfin comme limite d'une suite d'intervalle λ_p. Dans les deux premiers cas nous avons défini directement la valeur $y(x)$. Dans le 3e cas, $y(x)$ sera définie par une coupure dans l'ensemble des nombres $\frac{1}{2^i}$.

2° Monotone.

3° Continue, car à deux valeurs voisines de x correspondent deux valeurs de y qui sont voisines ou identiques.

Dans cette correspondance, nous voyons que *tout point de* E *a un correspondant unique sur* C *et que tout point de* C *correspond à un point de* E *unique ou à deux points de* E *frontières d'un même intervalle* λ_p.

C. Nous nous proposons maintenant d'*étendre la correspondance précédente entre* C *et* π, *en établissant une correspondance continue entre les points de l'aire* (A) *intérieure à* C *et les points de* Σ *situés sur des arcs de* ρ *aboutissant sur* π *en des points de* E.

Nous allons définir, sur l'aire (A), un réseau ρ' formé d'arcs continus joignant deux points de C correspondant sur π aux deux extrémités d'un arc de ρ.

Les séparatrices de ρ et ses caractéristiques tangentes à π, partagent Σ en un certain nombre d'aires simplement connexes Σ_i. Dans chaque aire Σ_i, ρ est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles et formé d'arcs joignant deux points situés sur deux arcs continus $a_i'b_i'$ et $a_i''b_i''$ de π. Si aucun des arcs $a_i'b_i'$ de π n'appartient en totalité à un arc λ_p, nous associons point par point aux séparatrices et caractéristiques de ρ tangentes à π des courbes partageant (A) en des aires (A_1), (A_2), ..., (A_j) dont la frontière correspond respectivement à la frontière de Σ_1, Σ_2, ..., Σ_j.

Si un arc $a_i'b_i'$ appartient en totalité à un arc λ_p, nous ferons correspondre aux deux arcs de caractéristiques frontières de l'aire Σ_i un seul arc de courbe γ dans (A) joignant les deux points de C correspondant aux deux arcs $a_i'b_i'$ et $a_i''b_i''$ de π. Si les caractéristiques frontières de Σ_i passent toutes deux par un col de ρ, nous faisons correspondre les deux cols à un même point de ρ. L'aire Σ_i correspond dans ce cas à une aire (A_i) nulle.

Soit une aire Σ_i correspondant à une aire (A_i) non nulle, les deux arcs $a_i'b_i'$ et $a_i''b_i''$ de π qui sont frontières de Σ_i peuvent être disjoints ou avoir une extrémité commune b_i' coïncidant avec b_i''.

Dans le premier cas, Σ_i admet comme frontières deux arcs de courbe de ρ. Nous pouvons établir un homéomorphisme entre Σ_i et l'intérieur d'un carré ABCD de côté 1 dont deux côtés opposés AB et DC correspondent aux deux arcs de courbe de ρ frontière de Σ_i et dont les deux autres côtés AD et BD correspondent aux arcs $a_i'b_i'$ et $a_i''b_i''$ de π. Nous associons deux points

de $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$, extrémités d'un même arc de ρ, à deux points $m'm''$ de AD et BC tel que $Am' = Bm''$. Le réseau ρ est alors homéomorphe au faisceau f des segments parallèles aux côtés AB et DC d'extrémités sur AD et BC.

L'aire (A) sera de même homéomorphe à l'intérieur A'B'C'D' d'un carré de côté 1 dont deux côtés A'B' et D'C' correspondent aux courbes de ρ' frontières de A_i et dont les deux autres côtés A'D' et B'C' correspondent aux arcs de C frontière de A_i. Nous associons deux points correspondant à deux extrémités d'un même arc de ρ sur C, dans la correspondance établie plus haut entre C et π, à des points $\mu'\mu''$ tel que $A'\mu' = B'\mu''$. Nous pouvons alors couvrir A_i par un réseau ρ' homéomorphe au faisceau f' des segments parallèles aux côtés A'B' et D'C' d'extrémités sur A'D' et B'C'.

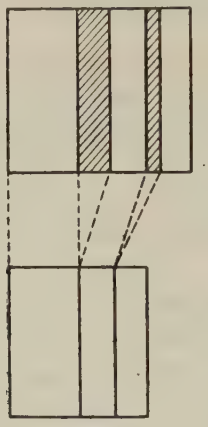


Fig. 27.

Nous établissons alors entre les carrés ABCD et A'B'C'D' la correspondance suivante : nous faisons correspondre à un point m' de AD le point μ' de A'D' tel que les pré-images de m' et μ' sur π et C sont deux points correspondants de π et C. D'autre part, nous ferons correspondre au segment de f d'extrémité m' le segment de f' d'extrémité μ', la correspondance se faisant avec conservation de la longueur.

Il résulte de la correspondance entre les carrés ABCD et A'B'C'D' une correspondance entre Σ_i et A_i qui est continue et telle que tout point de Σ_i ait un correspondant unique sur A_i alors que tout point de A_i correspond, soit à un point unique de Σ_i situé sur une caractéristique aboutissant sur C en un point intérieur de E, soit à deux points de Σ_i situés sur deux caractéristiques aboutissant sur C aux extrémités d'un arc λ_p et à une infinité de points dont les caractéristiques couvrent l'arc λ_p.

Lorsque les deux arcs $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$ ont une extrémité commune, on établit de la même façon une correspondance entre Σ_i et A_i à partir d'une correspondance entre deux familles de segments parallèles situées sur deux triangles équi-

latéraux de côtés 1 dont la base appartient à la famille des segments parallèles et dont les autres côtés correspondent aux arcs frontières de Σ_i et A_i portés par π et C.

Nous opérerons de même avec les différentes aires Σ_i et A_i en prenant la précaution suivante : on établit un homéomorphisme entre un arc de courbe aboutissant d'une part à un point singulier de ρ ou ρ', et d'autre part à π ou C et un segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. De même, on établit un homéomorphisme entre un arc de caractéristique frontière d'une aire Σ et d'extrémités sur π, et un segment 0, 1. Ces homéomorphismes sont utilisés dans la correspondance entre ρ et ρ' et les familles de segments parallèles dans les triangles équilatéraux ou les carrés.

Considérons alors l'ensemble des aires Σ_i qui constituent Σ et l'ensemble des

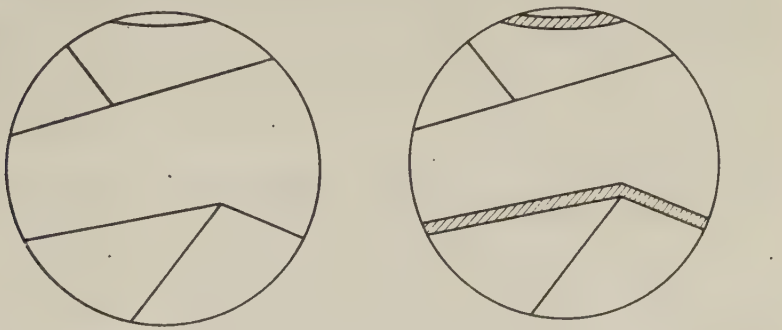


Fig. 28.

aires (A_i) qui couvrent (A). Nous avons établi une correspondance point par point entre Σ et (A), c'est-à-dire, finalement, entre S et (A). Dans cette correspondance, tout point de S, non situé sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$, correspond à un point unique à l'intérieur de (A), alors que tout point de (A) correspond soit à un point unique de S n'appartenant pas au ruban considéré, soit à une infinité de points de S intérieurs au ruban et à un couple de points situés chacun sur une caractéristique frontière du ruban.

Un couple d'arcs de π correspondant à un même arc de courbe sur S correspond sur C, soit à un couple d'arcs, soit à un couple de points. Comme C est un cercle, *il existe au moins un couple d'arcs de* π *correspondant à un même arc de* S *qui correspond à un couple d'arc sur* C. C sera donc partagé en un certain nombre d'arcs correspondant deux par deux à un même arc de S. Aux $2q$ arcs de π correspondant aux orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ correspondent alors $2q_1$ arcs sur C ($q_1 \leq q$, certains des orbes Γ_i pouvant *a priori* être couverts en totalité par le ruban considéré).

Si nous identifions alors deux à deux les arcs de C correspondant à un même arc de S, nous remplaçons l'aire (A) et le réseau ρ' par une surface S' et un

réseau R′ : toute caractéristique de R correspond à une caractéristique unique de R′ et une caractéristique de R′ correspond à une courbe unique de R n'appartenant pas au ruban considéré ou à l'une quelconque des courbes intérieure ou frontière du ruban considéré.

En particulier, nous pouvons prendre une représentation de S sur un polygone π dont le sommet sera un point de S n'appartenant, ni à l'intérieur, ni à la frontière du ruban considéré, ce qui est toujours possible puisque la section de S par une courbe fermée comprend, outre des points intérieurs au ruban, un ensemble ayant la puissance du continu. Nous sommes alors assurés qu'aucun des orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ n'est tout entier intérieur au ruban. Chacun de ces orbes correspond sur C à deux arcs non nuls et par suite la surface S′ est homéomorphe à S.

A un point de S *qui est point d'accumulation pour une caractéristique* L *de* R *correspond un point* M′ *qui est point d'accumulation pour la caractéristique* L′ *de* R *correspondant à* L. En effet, si M est un point d'accumulation de L′, L′ traverse en un point différent de M tout arc $\alpha'\beta'$ sans contact avec R′ passant par M′. Cette condition est vérifiée puisque L traverse l'arc correspondant à $\alpha'\beta'$ sur S, arc qui passe par M.

Réciproquement, si M′ est un point d'accumulation pour une courbe L′, peut-on dire que M est un point d'accumulation pour L ?

Si M n'est ni intérieur au ruban considéré, ni frontière de ce ruban tout arc sans contact avec R passant par M correspond à un arc sans contact avec ρ' passant par M′. M est alors point d'accumulation pour L.

Mais si M est intérieur au ruban considéré, un arc sans contact avec R passant par M correspond à un arc passant par M′ qui peut coïncider avec un arc de ρ'. Dans ce cas, M n'est pas point d'accumulation pour L.

Enfin, si M est frontière du ruban, M′ correspond à un arc MM_1 de S et L traversera tout arc contenant cet arc MM_1, et sans contact avec S. L'ensemble d'accumulation de L admet, alors, l'un au moins des points M et M_1. Si M′ est point d'accumulation à droite et à gauche pour L′, c'est-à-dire si L′ traverse une infinité de fois chacun des arcs $\alpha'M'$ et $M'\beta'$, les deux points M_1 et M_2 seront point d'accumulation pour L sur S.

D. Le réseau R admet un nombre au plus fini de rubans admettant une séparatrice frontière ou une caractéristique frontière tangente à l'un des orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$; en effet une même caractéristique ne peut appartenir à la frontière de plus de deux rubans et il y a un nombre fini de séparatrices et de caractéristiques tangentes à l'un des orbes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$. D'autre part, nous considérons comme formant un seul ruban deux rubans admettant une caractéristique frontière commune qui ne serait ni tangente à l'un des orbes Γ_i, ni une séparatrice. Nous pouvons alors avec un nombre fini d'opérations comme celle que nous venons d'étudier remplacer la surface S et le réseau R par une

surface homéomorphe S_1 et un réseau R_1 n'admettant pas de rubans ayant une frontière commune.

Considérons alors l'ensemble des rubans disjoints de R_1 : ils couvrent, sur un ensemble d'orbes Γ_i' rendant S_1 simplement connexe, une infinité dénombrable d'arcs disjoints. Nous pouvons appliquer une fois de plus la transformation précédemment définie, cette fois pour la totalité des rubans de R_1. Nous remplaçons ainsi S_1 par une surface homéomorphe S′ couverte par un réseau R′ n'admettant pas de rubans, c'est-à-dire sur laquelle l'hypothèse (h) est vérifiée.

Par suite :

1° Toutes les caractéristiques de R′ ont le même ensemble d'accumulation constitué par la totalité de S′.

2° Il en résulte que *toutes les caractéristiques de* S *ont le même ensemble d'accumulation* constitué par les points de S non intérieur à un ruban ne se recouvrant pas partiellement (c'est-à-dire, dans le cas où $q \neq 2$, ne se ramifiant pas).

3° *La section de cet ensemble par une courbe fermée quelconque* Γ *non homotope à* o *tracée sur* S *a la puissance du continu* puisqu'on peut établir une correspondance entre les points de cet ensemble sur Γ et les points d'une courbe fermée sur S′.

3. *Étude des réseaux* R *dans le cas général.* — Dans l'étude des ensembles d'accumulation des caractéristiques de R nous nous sommes limités, dans ce qui précède, au cas suivant : 1° les points singuliers de R sont tous des cols et 2° il n'y a pas de courbe fermée appartenant à R.

Nous allons maintenant considérer un réseau R dans le cas le plus général. Cette étude nous permettra de voir l'intérêt du cas particulier précédent, puisque les résultats obtenus dans ce cas nous permettront l'étude complète du cas général.

A. Nous avons déjà vu que tout point singulier P de R a un indice fini et qu'il existe un orbe homotope à o, présentant un nombre fini de contacts avec R, situé dans un voisinage arbitrairement petit de P et entourant P. Si nous considérons l'ensemble des caractéristiques aboutissant à P, plusieurs cas peuvent se produire :

1° Aucune caractéristique de R n'aboutit à P qui est un centre, c'est-à-dire que R admet une infinité de courbes fermées, homotopes à o, entourant le point P;

2° Un nombre fini de caractéristiques aboutit à P qui est un col;

3° Une infinité de caractéristiques aboutit à P, mais parmi elles il y en a un nombre au plus fini tel que les caractéristiques de R, infiniment voisines.

n'aboutissent pas toutes à P. Ce seront à ces caractéristiques que nous réserverons dans la suite le terme de séparatrice, jusqu'ici employé dans un sens plus large, et nous dirons qu'une telle *séparatrice* est *associée au point* P.

Soit P un point singulier du dernier type. Parmi les caractéristiques aboutissant à P se trouve un nombre au plus fini (comme le nombre total des séparatrices) de séparatrices associées à d'autres points singuliers de R. L'ensemble de ces séparatrices et des séparatrices associées à P partage l'ensemble des caractéristiques aboutissant à P en un nombre fini de pinceaux ne se ramifiant pas, de frontières à deux séparatrices pour chaque pinceau.

Si une courbe intérieure à un tel pinceau issu de P aboutit à un point singulier Q de R, il en sera de même de toutes les courbes du pinceau qui admettront comme ensemble d'accumulation les points P et Q. Sinon, les courbes du pinceau couvrent, sur S, une aire A ne se recouvrant pas partiellement et admettent le même ensemble d'accumulation que les courbes frontières. Dans les deux cas, on peut établir une correspondance entre S et R d'une part et une surface S′ homéomorphe à S et un réseau R′ d'autre part, correspondance biunivoque et bicontinue, à l'exception d'une courbe de R′ qui correspond à l'ensemble de toutes les courbes du pinceau.

Par suite, on ramène l'étude du cas général à celle du cas où les points singuliers de R sont des cols ou des centres.

B. Nous n'avons, jusqu'ici, fait aucune hypothèse sur l'existence de caractéristiques fermées.

S'il n'y a pas de caractéristiques fermées, il ne peut y avoir de centre et nous sommes ramenés au cas complètement étudié.

Si R admet un nombre fini de caractéristiques fermées nous pouvons par étranglement de ces courbes nous ramener à l'étude d'un ou plusieurs réseaux $R_1, R_2, \ldots, R_p$ n'admettant pas de caractéristique fermée et présentant des points singuliers provenant des caractéristiques disparues, qui ne seront ni des cols, ni des centres. Nous savons alors nous ramener au cas de réseaux R sans autres points singuliers que des cols et qui n'auront pas de caractéristiques fermées.

Il reste donc à étudier le cas où R admet une infinité de caractéristiques fermées. Nous avons vu que ces *courbes se répartissent nécessairement* en un nombre fini de familles d'orbes *isotopes* entre eux.

Si certaines de ces familles sont constituées par un nombre fini d'orbes, nous les feront disparaître par étranglement puis nous ramènerons à l'étude de réseaux R n'ayant d'autres points singuliers.

Considérons alors une famille d'orbes isotopes entre eux en nombre infini. Nous partageons cette famille en un nombre fini de familles $g_1, g_2, \ldots, g_m$ telles que deux orbes d'un même g_i limitent sur S une surface homéomorphe à

une couronne circulaire ne contenant pas de points singuliers de R. L'ensemble des aires comprises entre deux orbes variables de g_i couvre sur S une aire connexe A_i; si A_i couvre S en totalité, R présente deux centres qui sont chacun entourés d'une infinité de courbes de g dont il forment la limite; S est alors de genre o.

Si A_i ne couvre pas S en totalité, A_i couvrira soit une aire homéomorphe à une couronne circulaire de frontière deux orbes Γ_1 et Γ_2 de g_i, soit une aire homéomorphe à l'intérieur d'un cercle dont le centre o correspond à un point singulier de R du type centre et où les correspondants des orbes de g_i sont des cercles de centre o.

Nous pouvons alors pour étudier R, d'une part considérer le réseau sur les aires A_i, d'autre part, lorsque ces aires ne couvrent pas S en totalité, établir une correspondance entre les points de S non inférieurs aux A_i et les points d'une surface close S', correspondance qui sera biunivoque et bicontinue, exception faite des points de la frontière des A_i pour lesquels deux points de S peuvent avoir un même correspondant sur S'.

L'étude du cas général de R *se ramène finalement, d'une part à l'étude du cas complètement étudié* où R n'admet pas de caractéristiques fermées et où tous les points singuliers sont des cols, *d'autre part à l'étude d'un réseau* R *situé sur une couronne circulaire* (dont un cercle limite peut être de rayon nul), *réseau admettant comme caractéristiques particulières une infinité de cercles concentriques aux cercles frontières de la couronne.*

La section d'un rayon de la couronne par les différents cercles du réseau forme un ensemble de points fermé, car la courbe limite d'une famille de cercles de R est un cercle de R. Inversement, tout ensemble formé linéaire de points donne par rotation une famille de cercles pouvant appartenir à un réseau R.

Lorsque l'ensemble de points ne couvre pas la totalité du rayon de la couronne circulaire, tout contigu $\alpha\beta$ à l'ensemble est traversé une infinité de fois par une caractéristique qui passe en un des points de $\alpha\beta$. Une telle caractéristique a pour ensemble d'accumulation les deux cercles de R qui passent en α et β.

Les résultats précédents se conservent lorsque l'aire A_i a pour frontières des points limites au lieu de cercles.

SYSTÈMES MARKOVIENS ET STATIONNAIRES.
CAS DÉNOMBRABLE

Par M. Paul LÉVY.

INTRODUCTION.

1. L'origine du présent travail a été une conversation, au cours du symposium de Berkeley (août 1950), avec M. K. L. Chung, qui a attiré mon attention sur un problème non résolu, qui m'a d'abord paru facile à résoudre, et qui sera résolu par le théorème II.6.1 du présent travail. Mais la démonstration de ce théorème n'est simple que pour les systèmes sans états instantanés. Son extension aux systèmes à états instantanés oblige à distinguer plusieurs cas, et nous avons été conduit finalement à proposer une classification des processus étudiés, qui distingue sept types, dont quatre pour les systèmes sans états instantanés et trois pour les systèmes à états instantanés.

Les principaux résultats ont été résumés dans quatre Notes présentées à l'Académie des Sciences (P. Lévy [3]: *voir* la bibliographie à la fin du présent travail) (1).

Les théorèmes fondamentaux de la théorie dont il s'agit ont été exposés, dès 1936, pour le cas des chaines, par A. Kolmogoroff [1] et [2], et depuis, par W. Doeblin [1] et [2], et, pour le cas du paramètre continu, par J. L. Doob [1] et [2] (2). Le présent travail contient quand même un grand nombre de résultats nouveaux et il nous a paru utile de présenter un exposé d'ensemble qui puisse être lu même par des lecteurs n'ayant aucune connaissance préalable du sujet. Nous évitons de renvoyer aux Mémoires de Kolmogoroff dont l'un ne contient que des énoncés sans démonstration et dont l'autre est rédigé en russe.

(1) Je voudrais m'excuser ici d'un malentendu, dû sans doute à ma difficulté à suivre une conversation en anglais, qui m'avait fait croire que la littérature du sujet était presque inexistante, et présenter d'abord comme nouveaux des résultats qui ne l'étaient qu'en partie.

(2) *Voir* aussi W. Feller [1]. Ce travail ne concerne pas uniquement le cas dénombrable, mais contient des théorèmes généraux qu'il applique en particulier à ce cas. Il ne suppose pas la stationnarité.

Dans tout ce travail, nous avons cherché à dépasser aussi vite que possible le point de vue de Bernoulli, c'est-à-dire celui de l'étude des probabilités de passage, pour arriver à l'étude des propriétés probables ou presque sûres de la fonction aléatoire $H(t)$ ou, dans le cas des chaînes, de la suite $\{H_n\}$. Certaines de ces propriétés ont déjà été considérées par A. Kolmogoroff, W. Doeblin, et J. L. Doob. Mais nous adoptons plus systématiquement le point de vue indiqué et montrons que, dans certains cas, la démonstration la plus simple d'une propriété des probabilités de passage repose sur la loi forte des grands nombres. Bien entendu, il ne s'agit pas de contester qu'il soit logique de définir d'abord les probabilités de passage et que la manière naturelle de formuler analytiquement notre problème repose sur leur introduction.

Le chapitre I est consacré aux chaînes de Markoff (cas du paramètre discontinu). C'est surtout un rappel de résultats connus de A. Kolmogoroff et W. Doeblin; il y a cependant quelques remarques nouvelles, utiles pour la suite.

Dans le chapitre II, nous commençons l'étude du cas du paramètre continu. Nous y indiquons la classification déjà mentionnée plus haut; les différents types de processus que nous introduisons se distinguent essentiellement les uns des autres par la nature de l'ensemble des points de discontinuité. La fin du chapitre est consacrée à l'étude des systèmes sans états instantanés. Nous ne faisons que résumer au paragraphe II.7 une question traitée par J. L. Doob, relative aux équations différentielles de Kolmogoroff, et donnons au paragraphe II.8 la démonstration de deux théorèmes généraux qui semblent nouveaux. Après quelques remarques sur les propriétés presque sûres de $H(t)$ et l'étude de quelques exemples, nous terminons ce chapitre par l'esquisse d'une théorie générale de ce que nous appelons les états fictifs. Elle est nécessaire pour arriver à une définition infinitésimale des processus analogue à celle qui résulte pour le cas fini des équations différentielles de Kolmogoroff; mais il n'est pas certain qu'on puisse arriver à un résultat réellement satisfaisant.

Le chapitre III est consacré à l'étude des systèmes à états instantanés. Ceux pour lesquels les probabilités de passage sont mesurables forment deux types, le cinquième et le sixième. Nous indiquons la forme la plus générale des processus de ces deux types, et montrons que les théorèmes généraux du paragraphe II.8 restent applicables. Il ne saurait en être de même pour le septième type, qui introduit des probabilités de passage non mesurables. Nous nous contentons d'en indiquer un exemple qui généralise un exemple de J. L. Doob [1] et une nouvelle généralisation dont il y a lieu de se demander si elle ne comprend pas tous les processus de ce type; ce serait un théorème analogue à celui qui a été démontré pour le sixième type. Nous n'avons pas résolu cette question.

2. Notations; notions générales communes au cas des chaines et au cas continu. — Le système étudié sera désigné par $\mathcal{S}_r$ s'il y a un nombre fini r d'états possibles et par $\mathcal{S}_\omega$ s'il y en a une infinité dénombrable. Les différents états seront désignés par A_h, A_k, ..., les indices étant supposés entiers. Pour des exemples particuliers, il pourra être commode de les faire varier de zéro à l'infini, ou de $-\infty$ à $+\infty$, ou même de considérer des systèmes de deux indices. Pour la théorie générale, leur nombre importe seul.

Le résultat des expériences s'exprime, dans le cas des chaines, par une suite d'indices H_n, dans le cas continu, par une fonction $H(t)$ égale à l'instant t à l'indice de l'état réalisé à cet instant.

La loi de l'évolution ou loi du *processus stochastique*, supposé markovien et stationnaire, est bien définie par les *probabilités de passage*. Dans le cas continu nous les désignerons par

$$P_{h,k}(t) = \Pr\{H(t_2) = k / H(t_1) = h\} \qquad (t = t_2 - t_1 \geq 0).$$

Ces fonctions doivent vérifier les conditions bien connues

$(\mathcal{I})$ $$P_{h,k}(0) = \delta_{h,k},$$

$(\mathcal{P})$ $$P_{h,k}(t) \geq 0,$$

$(\mathcal{T})$ $$\sum_k P_{h,k}(t) = 1,$$

$(\mathcal{C})$ $$P_{h,k}(s+t) = \sum_j P_{h,j}(s) P_{j,k}(t) \qquad (s, t \geq 0),$$

dont la première est inutile si l'on ne considère que les valeurs positives de t, ce qui suffit pour définir le processus ([3]). Remarquons tout de suite qu'il n'en résulte pas nécessairement que $P_{h,k}(+0)$ existe et ait la valeur $\delta_{h,k}$.

Inversement, tout système de fonctions $P_{h,k}(t)$ vérifiant ces conditions définit un processus markovien et stationnaire. La définition d'un processus est donc exactement équivalente à la définition d'un système de fonctions $P_{h,k}(t)$, définies pour $t > 0$ et vérifiant les conditions $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$.

Pour définir une *fonction aléatoire* $H(t)$, il faut se donner une condition supplémentaire, qui sera en principe une condition initiale, relative à un instant t_0 qu'on peut supposer pris pour origine. Elle sera alors de la forme

$$\Pr\{H(0) = h\} = w_h,$$

avec $w_h \geq 0$ et $\Sigma w_h = 1$, et les probabilités absolues seront

$$W_k(t) = \Pr\{H(t) = k\} = \sum_h w_h P_{h,k}(t).$$

([3]) Les lettres par lesquelles nous représentons ces équations sont les initiales des mots : *initial, positif, total, Chapman.*

Ainsi, pour un même processus, on aura une infinité de fonctions aléatoires particulières. Il faut remarquer que chacune de ces fonctions conserve le caractère markovien, mais n'est en général pas stationnaire. Remarquons aussi que, bien qu'il soit souvent commode de considérer un instant initial, il peut arriver que la fonction soit prolongeable à gauche et définie de $-\infty$ à $+\infty$; tel sera précisément le cas si elle est stationnaire.

Toutes ces remarques s'appliquent en particulier au cas des chaînes; il n'y a qu'à remplacer la variable continue t par l'entier n. Nous écrirons dans ce cas $P_{h,k}^{(n)}$ au lieu de $P_{h,k}(n)$ et $W_k^{(n)}$ au lieu de $W_k(n)$.

CHAPITRE I.

Les chaînes stationnaires de Markoff.

I.1. Le point de vue de Bernoulli. — Dans le cas des chaînes, toutes les probabilités de passage sont bien définies par la seule donnée des probabilités

$$p_{h,k} = P_{h,k}^{(1)},$$

assujetties à vérifier les équations $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{C})$. Les autres $P_{h,k}^{(n)}$ s'en déduisent par l'un ou l'autre des systèmes d'équations de récurrence

$$(\mathcal{R}_1) \qquad P_{h,k}^{(n+1)} = \sum_j P_{h,j}^{(n)} p_{j,k}$$

$$(\mathcal{R}_2) \qquad P_{h,k}^{(n+1)} = \sum_j p_{h,j} P_{j,k}^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui sont des cas particuliers de $(\mathcal{C})$. On vérifie sans peine que toutes les conditions $(\mathcal{R})$, $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C})$ sont alors vérifiées pour les coefficients obtenus de cette manière. On peut même observer que cette vérification est inutile; il existe sûrement un processus markovien et stationnaire bien défini par l'itération de l'opération élémentaire définie elle-même par la donnée des $p_{h,k}$.

Pour les probabilités absolues, on a un système unique d'équations de récurrence

$$(\mathcal{R}) \qquad W_k^{(n+1)} = \sum_j p_{j,k} W_j^{(n)}.$$

Dans le cas d'un système $\mathcal{S}_r$, on obtient la solution générale de ces équations en cherchant d'abord des solutions de la forme

$$W_k^{(n)} = c_k s^n.$$

En portant cette forme dans les équations $(\mathcal{R})$, on obtient un système de r équations indépendantes de n; en annulant leur déterminant, on obtient une équation en s, de degré r. A chaque racine d'ordre ρ correspondent ρ systèmes distincts de solutions, soit tous de la forme $c_h s^n$, soit de la forme plus générale $P_h(n)s^n$, les $P_h(n)$ étant des polynomes de degrés $< \rho$. En combinant toutes ces solutions, on obtient la solution générale de $(\mathcal{R})$.

Pour chaque h fixe, les $P_{h,k}^{(n)}$ sont des solutions de $(\mathcal{R})$. On obtient ainsi r solutions linéairement indépendantes: on le vérifie immédiatement pour $n = 0$. Comme elles sont bornées, on voit que n'importe quelle solution reste finie, quand n augmente indéfiniment. Donc, pour toutes les racines de l'équation en s, on a $|s| \leq 1$ et, si $|s| = 1$, le degré des polynomes $P_h(n)$ est toujours nul. On en déduit immédiatement :

a. Les $P_{h,k}^{(n)}$, considérés comme fonctions de n, ne peuvent comprendre que trois sortes de termes : des constantes, des termes périodiques et des termes s'annulant comme des exponentielles pour n infini (c'est-à-dire que tous les $W_k^{(h)}$ seront majorés par $c\tau^n$, où $s < \tau < 1$, c étant une constante convenablement définie).

b. Les moyennes

$$Q_{h,k}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} P_{h,k}^{(\nu)} \tag{I.1}$$

ont, pour n infini, des limites $P_{h,k}$ et les $P_{h,k}$ vérifient les conditions $(\mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{S})$, écrites en supprimant l'indice n.

c. Pour que les fonctions $P_{h,k}^{(n)}$ elles-mêmes tendent vers ces limites, il faut et il suffit qu'elles n'aient pas de termes périodiques.

d. On déduit de $(\mathfrak{S})$ que 1 est racine de l'équation en s. Il y a donc au moins une solution formée de constantes, c'est-à-dire qu'au moins une des fonctions aléatoires déduites du processus est stationnaire.

Enfin un raisonnement très simple, dû à M. Fréchet ([1], p. 108), montre que :

e. Les termes périodiques ont nécessairement des périodes entières et $\leq r$. En d'autres termes, elles correspondent à des racines (autres que l'unité) d'équations binomes $s^\rho = 1$ (ρ entier ≤ 1).

Les méthodes et les résultats précédents ne sont pas tous applicables aux systèmes $\mathcal{S}_\omega$. En ce qui concerne les méthodes, observons que cela n'a plus de sens de dire que, quand on a le nombre voulu de solutions linéairement indépendantes, on a la solution générale du système d'équations $(\mathcal{R})$. La méthode de M. Fréchet pour démontrer la propriété *e* n'est absolument pas susceptible de généralisation. En ce qui concerne les résultats, il suffit d'un exemple simple pour montrer que certains d'entre eux sont en défaut. Considérons, en

effet, un processus pour lequel on ait $p_{h,k}=0$ si $k \leq h$; alors la suite des H_n est constamment croissante et, quels que soient h et k, il vient un moment où $P_{h,k}^{(n)}=0$. Donc les $P_{h,k}$ existent, mais sont tous nuls et ne vérifient pas la condition $(\mathfrak{C})$, et l'énoncé d devient complètement faux.

La manière la plus naturelle d'étudier ces questions, si l'on veut rester au point de vue de Bernoulli, est d'appliquer au système $(\mathcal{R})$ les méthodes connues de la théorie des équations intégrales; il s'agit au fond de représenter la fonction φ_h de l'entier k par une combinaison linéaire de fonctions fondamentales. On arrive ainsi à l'énoncé a, sauf en ce qui concerne la rapidité de la convergence vers une limite des solutions sans termes périodiques. On en déduit immédiatement b et c, à cela près que $(\mathfrak{C})$ est remplacé par

$$(\mathfrak{C}') \qquad \sum_k P_{h,k} \leq 1.$$

Nous n'insisterons pas ici sur ces questions, désirant arriver aussi vite que possible au second point de vue, qui nous donnera entre autres une démonstration très simple de l'énoncé b, modifié comme il vient d'être dit, et nous conduira aussi, mais moins simplement, à définir toutes les possibilités concernant l'allure asymptotique des $P_{h,k}^{(n)}$.

Rappelons d'autre part que, dans A. Kolmogoroff [1] et [2], est énoncé en particulier (en termes un peu différents de ceux que nous employons) le résultat suivant :

Quels que soient h et k, il existe une certaine progression arithmétique $n=n_0+\nu\rho$ (ρ entier ≥ 1; $\nu=0, 1, 2, \ldots$) telle $P_{h,k}^{(n)}$ soit nul si n n'appartient pas à cette progression et tende vers une limite (positive ou nulle) si n, appartenant à cette progression augmente indéfiniment. La démonstration n'étant donnée que dans le second Mémoire, rédigé en russe, nous ne savons pas sur quelle méthode elle repose. En tout cas les différentes distinctions introduites dans d'autres énoncés du premier Mémoire, dont nous parlons plus loin, s'introduisent bien naturellement, comme nous le verrons, si l'on utilise les méthodes qui reposent sur la loi forte des grands nombres.

I.2. Groupes; groupes finaux (4), semi-finaux, et de passage; groupes cycliques. — Pour faciliter le langage, nous dirons qu'un événement est *possible*, ou qu'il

(4) C'est à dessein que nous écrivons *finaux*, bien que la forme théoriquement correcte de ce pluriel soit *finals*. L'usage conduit souvent à abandonner certaines formes grammaticales irrégulières, et qui, par suite, choquent l'oreille s'il ne s'agit pas de mots assez usuels pour que l'oreille y soit habituée. Il ne semble y avoir aucune raison de sauver le pluriel *finals*.

D'autre part, nous avons hésité à employer le mot *groupe* dans un sens différent de celui qu'il a généralement en analyse. Le terme *groupement* employé par M. Fréchet présente un autre inconvénient : dans le langage courant, il signifie *répartition en groupes*. Le mot *classe* employé par certains auteurs étrangers est peut être préférable.

peut se produire, lorsque sa probabilité est positive et cela au moins pour certains choix des données qui peuvent être indéterminées.

Nous dirons que deux états A_h et A_k sont *échangeables* quand le passage de A_h à A_k est possible (c'est-à-dire qu'il existe au moins un n pour lequel $P_{h,k}^{(n)} > 0$), ainsi que le passage de A_k à A_h.

Nous dirons qu'un ensemble G d'états est un *groupe* si deux quelconques de ses états sont échangeables et si aucun état n'appartenant pas à G n'est échangeable avec ceux de G. Un groupe est défini par un seul de ses éléments; c'est la réunion de cet élément et de tous ceux qui sont échangeables avec lui.

Un groupe G est *final* si, un état du groupe étant réalisé, le système ne peut pas sortir du groupe; en d'autres termes si, pour tous les $A_h \in G$ et $A_l \notin G$, $p_{h,l} = 0$ et, par suite, $P_{h,l}^{(n)} = 0$ pour tout $n > 0$. Il peut ne comprendre qu'un seul état A_h qui alors ne peut que se succéder à lui-même, indéfiniment, (c'est-à-dire que $p_{h,h} = 1$). Un groupe non final peut aussi se réduire à un seul état A_h; alors $0 < p_{h,h} < 1$.

Désignons par γ_h la probabilité que le système, s'il est initialement dans l'état A_h d'un groupe G, reste indéfiniment dans des états de ce groupe. Les γ_h sont tous égaux à un pour un groupe final, tous < 1 pour un groupe non final. D'ailleurs, si A_h et A_k appartiennent au même groupe, on a évidemment

$$\gamma_h \geq P_{h,k}^{(n)} \gamma_k$$

et, comme au moins un des $P_{h,k}^{(n)}$ est positif, les γ_h sont tous nuls ou tous positifs, donc, si le groupe n'est pas final, tous nuls ou tous compris entre zéro et un. Le groupe sera dit *de passage* dans le premier cas et *semi-final* dans le second (5).

Nous verrons que tous ces cas existent réellement et que, pour un groupe semi-final, la borne inférieure des α_h peut être positive ou nulle; leur borne supérieure est nécessairement un.

Un groupe peut, d'autre part, être *cyclique* ou *acyclique*. On dit qu'il est cyclique d'ordre r s'il se décompose en un certain nombre r de sous-ensembles ou *sous-groupes*, $G_1, G_2, \ldots, G_r$, tels que, si $H_n \in G_\rho$, on ait nécessairement $H_{n+1} \in G_{\rho+1}$ ($r > 1$; $\rho = 1, 2, \ldots, r$; si $\rho = r$, G_{r+1} désigne G_1); en d'autres termes, il y a entre ces sous-groupes une permutation circulaire non aléatoire, le hasard n'intervenant à chaque opération que pour le choix d'un état dans le sous-groupe imposé.

Cette distinction est indépendante de la précédente. Si l'on a défini un groupe acyclique d'une des trois catégories distinguées d'abord (final, semi-final ou de passage), on n'a qu'à remplacer chaque état A_h par r états $A_h^{(\rho)}$ ($\rho = 1$,

(5) Nous introduisons une terminologie nouvelle. Dans le cas des systèmes $\mathfrak{S}_r$, il n'y a pas de groupes semi-finaux et il n'y avait pas d'inconvénient, pour la théorie de ces systèmes, à confondre les notions de groupe de passage et de groupe non final.

2, ..., r) qui se succéderont dans l'ordre des ε croissants avant qu'un tirage au sort ait à choisir l'état $A_k^{(1)}$ qui doit succéder à $A_h^{(r)}$. On obtient ainsi un groupe cyclique de la même catégorie que le groupe initial.

I.3. Théorèmes sur les groupes finaux ergodiques. — 1° Théorème I.3.1. — *Si le système se trouve initialement dans un état du groupe* G, *ou bien il est presque sûr que les états de ce groupe sont tous réalisés une infinité de fois, ou bien il est presque sûr qu'aucun ne l'est* (6).

Nous dirons que le groupe G est *ergodique* dans le premier cas et *non ergodique* dans le second. Le système (S_r ou S_ω) lui-même est ergodique si tous ses éléments constituent un seul groupe ergodique. Dans le premier cas, nous dirons que le groupe est *cycliquement ergodique* s'il est cyclique et *régulièrement ergodique* dans le cas contraire (7).

Démontrons maintenant le théorème énoncé. Soit α_h la probabilité que le système, partant de l'état A_h, le reprenne au moins une fois; elle est positive, puisque le système, en quittant l'état A_h, ne peut prendre qu'un état A_k du groupe et peut, si $k \neq h$, revenir à A_h, en une ou plusieurs opérations. La probabilité que le système reprenne au moins n fois l'état A_h est alors α_h^n. Si alors $\alpha_h = 1$, la probabilité α'_h que le système reprenne une infinité de fois l'état A_h est aussi égale à un. Si $\alpha_h < 1$, α'_h, évidemment $\leqq \alpha_h^n$ (quel que soit n) est nul. Donc chaque α'_h est égal, soit à zéro, soit à un.

Il reste à montrer que $\alpha'_h = 1$ pour un état du groupe entraîne $\alpha'_k = 1$ pour tous les autres. Comme il y a une suite presque sûrement infinie de racines $N_0 = 0$, N_1, N_2, ... de $H_n = h$, dire que le passage de A_h à A_k est possible, c'est dire qu'il y a une probabilité positive $\beta_{h,k}$ qu'un intervalle $(N_{\rho-1}, N_\rho)$ contienne une racine de $H_n = k$. Cette probabilité est évidemment indépendante de ρ, puisque le processus est stationnaire, et du passé, puisqu'il est markovien. On se trouve donc dans le cas classique de Bernoulli. La circonstance indiquée (réalisation de l'état A_k pour au moins un n compris entre $N_{\rho-1}$ et N_ρ) se produit donc presque sûrement une infinité de fois (8), C. Q. F. D.

2° Théorème I.3.2. — *Si le système se réduit à un groupe final ergodique, le rapport des fréquences de deux états quelconques* A_k *et* A_h *tend presque sûrement vers la limite* $\frac{\beta_{h,k}}{\beta_{k,h}}$.

(6) *Cf.* A. Kolmogoroff [1].

(7) Nous nous excusons d'abandonner aussi bien la terminologie de M. Fréchet que celle de A. Kolmogoroff qui appelle *classe récurrente* ce que nous appelons *groupe ergodique*. Il nous semble que l'essentiel, pour définir le caractère ergodique, n'est pas l'existence d'une limite (vraie ou au sens de Cesaro) indépendante de h, mais le fait que, presque sûrement, le système reprenne une infinité de fois n'importe lequel des états possibles. Dans le cas des espaces continus, c'est de même que, presque sûrement, la trajectoire traverse une infinité de fois n'importe quel domaine donné.

(8) Le même raisonnement montre qu'on aboutit à une contradiction en supposant qu'un état n'appartenant pas à un groupe final puisse être réalisé une infinité de fois.

Nous pouvons évidemment faire abstraction des états autres que A_h et A_k : alors la suite des H_n se décompose en suites partielles $S_1, S_2, \ldots$, de termes consécutifs égaux à h, alternant avec des suites $S'_1, S'_2, \ldots$ de termes égaux à k. Désignons respectivement par L_ν et L'_ν les longueurs des suites S_ν et S'_ν (c'est-à-dire leurs nombres de termes). En conservant les notations du 1°, on a évidemment

$$\Pr\{L_\nu = r\} = \beta_{h,k}(1-\beta_{h,k})^{r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{I.3.1}$$

et, par suite, en supprimant l'indice ν,

$$E\{L\} = \frac{1}{\beta_{h,k}}, \qquad \sigma^2\{L\} = \frac{1-\beta_{h,k}}{\beta_{h,k}}, \tag{I.3.2}$$

et des formules analogues pour les L'. Toutes ces variables aléatoires sont d'ailleurs indépendantes; on est encore dans le cas de Bernoulli.

Les nombres des réalisations des événements A_h et A_k, à un instant quelconque, sont toujours de la forme

$$U_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_\nu + \theta L_{\nu+1},$$
$$U'_n = L'_1 + L'_2 + \ldots + L'_\nu + \theta' L'_{\nu+1}$$

($\theta, \theta' = 0$ et ≤ 1). Si ν est très grand, les derniers termes sont négligeables et les nombres considérés sont des infiniment grands presque sûrement équivalents à $\nu E\{L\}$ et $\nu E\{L'\}$. Compte tenu de (I.3.2), le théorème énoncé en résulte.

3° *Remarques.* — *a.* On peut préciser le théorème I.3.2 en appliquant les principaux théorèmes connus sur le cas de Bernoulli: loi des écarts, loi du logarithme itéré. C'est pour rendre cette application plus facile pour le lecteur que nous avons indiqué l'expression $\sigma^2\{L\}$.

Il faut remarquer que ces applications introduisent explicitement la variable ν, c'est-à-dire le nombre des séries partielles de chaque espèce. On peut aussi chercher la loi dont dépend U_n au moment où U_n atteint une valeur donnée $\rho + 1$, c'est-à-dire au moment où $n = N_\rho$. Pour cela il vaut mieux partir de la remarque que l'augmentation de U_n quand n varie de $N_{\rho-1}$ à N_ρ a pour valeur probable

$$\beta_{h,k} E\{L'\} = \frac{\beta_{h,k}}{\beta_{k,h}}.$$

Ces augmentations étant indépendantes, on en déduit une nouvelle démonstration du théorème I.3.2, et il devient facile de le préciser dans le sens indiqué. On en déduit ensuite aisément les lois dont dépendent U_n et U'_n lorsque leur somme est donnée.

Si l'on fait abstraction des états autres que A_h et A_k, cette somme n'est autre que n. Si au contraire on en tient compte, le problème n'est plus aussi simple.

Nous verrons, en effet, que le rapport $\frac{U_n}{n}$, c'est-à-dire la fréquence de l'état A_h, a une limite presque sûre, qui peut être positive ou nulle; le problème ne se présente pas du tout de la même manière dans les deux cas.

b. Si le système ne se réduit pas à un seul groupe final ergodique, il y a plusieurs cas à distinguer. Dans tous les cas, la conclusion relative à la limite du rapport $\frac{U'_n}{U_n}$ est immédiate, le seul cas non trivial ayant été traité. Il peut naturellement arriver que U_n et U'_n restent tous les deux nuls et l'on ne peut pas parler de ce rapport. Dans tous les autres cas, il a presque sûrement une limite et cette limite est en général aléatoire, la loi dont elle dépend dépendant de l'état initial. Si U_n et U'_n restent tous les deux finis, mais sans borne supérieure certaine (une telle borne ne peut d'ailleurs être que un), il peut arriver que l'ensemble des valeurs possibles pour cette limite soit l'ensemble des nombres rationnels positifs; il est facile de donner des exemples de cette circonstance. Enfin U_n et U'_n ne peuvent devenir tous les deux infinis en même temps que si A_h et A_k appartiennent à un même groupe ergodique; il ne faut pas oublier dans ce cas que la probabilité α_l que le système atteigne ce groupe dépend de l'état initial A_l et que, si $\alpha_l < 1$, le rapport considéré a une probabilité $1 - \alpha_l$ d'être de la forme $\frac{0}{0}$, et seulement une probabilité α_l de tendre vers la limite indiquée ci-dessus.

4° *Limites des fréquences.* — Plaçons-nous toujours dans le cas d'un système réduit à un groupe ergodique unique et choisissons un état A_0 comme dénominateur commun. Désignons par $N_1, N_2, \ldots$, la suite des n pour lesquels $H_n = 0$ et par c_h le nombre probable des réalisations de l'état $A_h (h \neq 0)$ entre deux réalisations consécutives de A_0.

On a évidemment, en posant $c_0 = 1$,

$$E\{N_\rho - N_{\rho-1}\} = \sum_0^\infty c_h = S,$$

et il y a deux cas à distinguer suivant la nature de la série Σc_h. Comme c_h est la fréquence relative des états A_h et A_0, tous les c_h sont multipliés par un même nombre positif et fini si l'on change l'état choisi pour dénominateur commun; cette distinction est donc indépendante de ce choix.

Si alors S est fini, la loi forte des grands nombres montre que $\frac{N_\rho}{\rho}$ tend presque sûrement vers S, quand ρ augmente indéfiniment. Donc la fréquence de l'état A_0, qui est la valeur de $\frac{\rho}{n}$ pour $N_\rho \leq n < N_{\rho+1}$, tend presque sûrement vers $\frac{1}{S}$ et celle de n'importe quel état A_h tend presque sûrement vers $\frac{c_h}{S}$. Au contraire si S est infini, toutes ces fréquences tendent presque sûrement vers zéro.

Nous dirons que le groupe final considéré est *fortement ergodique* dans le premier cas et *faiblement ergodique* dans le second. Ces définitions nous paraissent naturelles, puisque dans le second cas, s'il est bien presque sûr que chaque état est réalisé une infinité de fois, la portée de ce fait est diminuée par la rareté de ces réalisations (⁹). Naturellement, dans chacun des cas, le groupe peut être cyclique ou non cyclique.

5° *Remarques.* — *a.* La question se pose tout naturellement, pour les groupes fortement ergodiques, de préciser la loi forte de la même manière qu'au 3°, *a*. Ce problème oblige à introduire une nouvelle distinction, suivant que le second moment

$$\sigma^2 = \sigma^2\{N_p - N_{p-1}\} = E\{(N_p - N_{p-1})^2\} - S^2$$

est fini ou infini. Dans le premier cas, l'écart réduit $\frac{N_p - S_p}{\sigma\sqrt{p}}$ est asymptotiquement une variable laplacienne réduite, et l'on peut le borner supérieurement par la loi du logarithme itéré. Il n'en est pas de même dans le second cas; il peut arriver, par exemple, que $N_p - S_p$ soit asymptotiquement de la forme $cp^{\alpha}X$, α étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, et X dépendant d'une loi stable d'exposant $\frac{1}{\alpha}$. Comme il est bien connu, des circonstances très variées peuvent être réalisées dans ces conditions.

b. Il existe naturellement des processus de *types mixtes* pour lesquels le système peut, en partant d'un état initial A_0, évoluer de plusieurs manières différentes et, par suite, arriver à l'un ou l'autre de plusieurs groupes qui ne soient pas du même type. Il semble inutile d'insister sur cette extension triviale.

I.4. Exemples. — Il est bien évident, dans le cas d'un système S_r, qu'il y a nécessairement au moins un état réalisé une infinité de fois et que cet état doit appartenir à un groupe final fortement ergodique. Nous nous proposons de montrer par des exemples qu'au contraire, pour les systèmes S_∞, toutes les circonstances prévues par la théorie sont possibles.

1° Il peut n'y avoir aucun groupe final. Tel est le cas d'un système à évolution

(⁹) Dans le premier cas, les fréquences limites étant positives, A. Kolmogoroff appelle ce cas *cas positif*. Nous préférons ne pas abuser du mot *positif*, quand il ne dispense pas le lecteur de rechercher les définitions pour savoir ce qui est positif. D'autre part, F. G. Foster [1], réunit le type faiblement ergodique et le type non ergodique en un seul type, qu'il appelle type *dissipatif*. Ses systèmes *semi-dissipatifs* sont des systèmes *composés*, c'est-à-dire ne se réduisant pas à un seul groupe; un groupe n'est jamais semi-dissipatif. Pour l'étude des systèmes composés, il nous paraît préférable de mettre avant tout ce caractère composé en évidence.

irréversible où, par exemple, les H_n ne peuvent varier qu'en croissant (c'est-à-dire que $p_{h,k}=0$ si $k<h$). Si en plus $p_{h,h}=0$, il n'y a aucun groupe. Si, au contraire, les $p_{h,h}$ sont >0 et <1, chaque état A_h forme un groupe de passage.

On peut généraliser beaucoup cet exemple en considérant une infinité de groupes de passage $G_1, G_2, \ldots$ tels que le système ne puisse quitter un de ces groupes que pour un groupe d'indice plus élevé.

2° Considérons un système comprenant un état A_0 et d'autres états répartis en familles $F_h (h=1, 2, \ldots)$. Si le système est initialement à l'état A_0, il y aura une probabilité α_h que l'état suivant appartienne à F_h; dans ce cas, après un séjour dans F_h de longueur L_h presque sûrement finie, il reviendra à l'état A_0 (nous appelons longueur le nombre des états successifs). On peut donner à $E\{L_h\}=\mu_h$ n'importe quelle valeur positive. Il suffit de constituer F_h par un état A_h pour lequel

$$p_{h,0}=\frac{1}{\mu_h}, \qquad p_{h,h}=1-\frac{1}{\mu_h}$$

(on peut aussi définir F_h de manière à associer à une valeur donnée de μ_h des valeurs arbitrairement grandes de $\sigma_h=\sigma\{L_h\}$. Au contraire, si μ_h n'est pas entier, σ_h a une borne inférieure positive. Si μ_h est entier, on peut annuler σ_h en supposant F_h formé de μ_h états qui se succèdent dans un ordre déterminé).

On a alors $c_h=\alpha_h\mu_h$ et $S=1+\Sigma\alpha_h\mu_h$. Il est facile de rendre cette série convergente ou divergente, donc de former des processus fortement ou faiblement ergodiques. Il est facile aussi, dans ce second cas, d'en former pour lesquels les c_h tendront vers zéro ou, au contraire, augmenteront indéfiniment avec h. On peut, plus généralement, réaliser n'importe quelle suite de valeurs positives données. On aurait pu être tenté de croire qu'on peut ranger les différents états dans l'ordre des c_h décroissants. Il en est évidemment ainsi dans le cas d'un groupe fortement ergodique; on voit que cela n'est pas toujours vrai pour un groupe faiblement ergodique.

3° Considérons maintenant un système défini par

$$p_{h,0}=\alpha_h, \qquad p_{h,h-1}=1-\alpha_h \qquad (h=0, 1, \ldots; 0\leq\alpha_h<1).$$

Il constitue évidemment un groupe unique à moins que tous les α_h d'indices assez grands ne soient nuls. La probabilité que, en partant de $H_0=0$, on ait $H_\nu=\nu$ pour $\nu=1, 2, \ldots, h$, est

$$\beta_h=(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\ldots(1-\alpha_{h-1}).$$

Les β_h forment donc une suite non croissante, variant depuis un jusqu'à une limite positive ou nulle β; *à cela près, elle est absolument quelconque.*

Il y a manifestement deux cas à distinguer :

Premier cas : la série $\Sigma\alpha_h$ est convergente, donc $\beta>0$. — Il y a donc une proba-

bilité positive β que la suite des H_n soit constamment croissante, c'est-à-dire que l'on ait indéfiniment $H_n = \nu$. La probabilité que cette série croissante soit au contraire interrompue par un retour à l'état A_0 est $1 - \beta$. La probabilité qu'il y ait ainsi n retours est $(1-\beta)^n$; la probabilité qu'il y en ait une infinité est nulle. Il est, par suite, presque sûr que la suite des H_n finit par augmenter indéfiniment, après un nombre de retours à A_0 dont la valeur probable, d'après un calcul fait plus haut [formule (1.3.2)], est $\frac{1}{\beta}$. Le système est donc non ergodique.

Deuxième cas : la série $\Sigma\alpha_h$ *est divergente, donc* $\beta = 0$. — Alors, la suite des H_n ne peut pas augmenter indéfiniment; il y a presque sûrement, tôt ou tard, un retour à l'état A_0, et, par suite, une infinité; le système est ergodique.

Entre deux retours à l'état A_0, un autre état A_h ne peut être réalisé qu'une fois et a une probabilité β_h de l'être. Son nombre probable de réalisations est donc $c_h = \beta_h$ et le système est fortement ergodique si la série $\Sigma\beta_h$ est convergente et faiblement ergodique si cette série est divergente. Les deux cas sont effectivement possibles.

Une variante de l'exemple précédent s'obtient en prenant

$$p_{h,h} = 1 - \gamma_h, \qquad p_{h,0} = \gamma_h \alpha_h, \qquad p_{h,h-1} = \gamma_h(1-\alpha_h), \qquad \text{avec } 0 < \gamma_h < 1.$$

Alors, l'état A_h pourra se répéter et le nombre probable de ces répétitions, avant le passage à un des états A_0 et A_{h-1}, est $\mu_h = \frac{1}{\gamma_h}$. Alors, $c_h = \beta_h \mu_h$, formule analogue à celle relative à l'exemple donné au 2° ci-dessus.

4° *Exemple de groupe semi-final.* — Modifions l'exemple du 3° en supposant, qu'en plus des états A_0, A_1, ..., il y ait un ou plusieurs autres états, formant une famille F, d'où le retour aux états A_h ($h = 0, 1, \ldots$) ne soit plus possible. Posons

$$\alpha_h = \alpha'_h + \alpha''_h \qquad \text{et} \qquad p_{h,F} = \alpha'_h, \qquad p_{h,0} = \alpha''_h, \qquad p_{h,h-1} = 1 - \alpha_h$$

($p_{h,F}$ indiquant la probabilité du passage direct de A_h à la famille F). Supposons que α''_h soit positif pour une infinité de valeurs de h, et qu'au moins un α'_h soit positif. Alors les états A_h d'indices positifs ou nuls forment un groupe G qui n'est pas final. Si la série $\Sigma\alpha_h$ est divergente, c'est un groupe de passage, que le système doit quitter tôt ou tard pour atteindre F. Mais si la série $\Sigma\alpha_h$ est convergente, il y a, comme tout à l'heure, une probabilité positive β que H_n augmente indéfiniment sans retour à A_0, ce qui suffit pour conclure que G est un groupe semi-final.

Si d'ailleurs $\beta' < 1 - \beta$ est la probabilité d'un retour à A_0, il y a une probabilité $\beta\beta'^n$ que l'augmentation indéfinie de H_n se produise après exactement n

retours à A_0 et une probabilité totale $\frac{\beta}{1-\beta'}$ qu'elle finisse par se produire. De même, si $\beta''=1-\beta-\beta'$ est la probabilité d'une fuite vers F sans retour préalable à A_0, la probabilité totale d'une telle fuite est $\frac{\beta''}{1-\beta'}$.

Le principe de Bayes permet d'obtenir autrement ces probabilités. Les deux seules circonstances finalement possibles ayant chaque fois des probabilités β et β'' de se produire sans nouveau retour à A_0, leurs probabilités totales sont respectivement

$$\frac{\beta}{\beta+\beta''},\quad \frac{\beta''}{\beta+\beta''}\qquad(\beta+\beta''=1-\beta').$$

5° *Remarque générale sur les groupes semi-finaux.* — Soit λ_h la probabilité que le système, placé initialement dans un état A_h d'un groupe semi-final G, reste indéfiniment dans ce groupe. Par définition des groupes semi-finaux, $0<\lambda_h<1$, pour tous les états du groupe. Dans l'exemple qui précède, λ_h tend vers un pour h infini, tandis que la borne inférieure des λ_h est positive.

On peut modifier cet exemple de manière à annuler cette borne inférieure. L'indice h variera de $-\infty$ à $+\infty$, l'ensemble des états possibles comprenant le groupe G des états A_h, et la famille F; nous prendrons

$$p_{h,\mathrm{F}}=\alpha'_h,\qquad p_{h,-h}=\alpha''_h,\qquad p_{h,h+1}=1-\alpha_h\qquad(\alpha_h=\alpha'_h+\alpha''_h)$$

et supposerons $\alpha''_h=0$ (donc $\alpha_h=\alpha'_h$) pour $h\leq 0$. S'il existe des h arbitrairement grands pour lesquels $\alpha''_h>0$, et que les α_h soient tous <1, G est bien un groupe. Si au moins un des α'_h est positif, il n'est pas final; si, de plus la série $\sum_0^\infty \alpha_h$ est convergente, l'augmentation indéfinie des H_n est possible et c'est un groupe semi-final. Cela n'empêche pas de supposer que certains des α'_h, d'indices négatifs, forment une suite infinie ayant pour limite un. Comme évidemment $\lambda_h<1-\alpha'_h$, la borne inférieure est bien zéro.

Au contraire, *leur borne supérieure est toujours un.* C'est une conséquence immédiate d'un théorème général connu (*cf.* P. Lévy [1], p. 129) : *si une propriété de la suite* $\{H_n\}$ *a une probabilité,* γ, *si* γ_n *désigne la nouvelle évaluation de cette probabilité quand on connaît tous les* H_ν *d'indices* $\leq n$, *les ensembles de suites* $\{H_n\}$ *définis, l'un par la propriété considérée, l'autre par* $\lim\gamma_n=1$, *coïncident, à un ensemble de probabilité nulle près.* Ici, la propriété considérée est que tous les H_n soient des indices d'états de G; γ est positif; γ_n est la valeur de λ_h pour $h=H_n$. Il existe donc une suite partielle de λ_h qui tend vers un et, si le système peut rester indéfiniment dans G, c'est en parcourant les états d'une telle suite.

6° *Autres exemples.* — Comme au 4°, nous allons former un groupe G non final, en partant d'un groupe final G′ et en modifiant certains des $p_{h,k}$ de manière à permettre la

fuite vers une famille F d'où le retour à G soit impossible. Pour simplifier, nous ne modifierons que les $p_{1,k}$, en les multipliant par un facteur q compris entre zéro et un; la probabilité disponible $1-q$ sera celle du passage de A_1 à F. Dans ces conditions, il est bien évident que si G' était un groupe ergodique, les retours successifs à l'état A_1 finiront par entraîner le passage à F; G est alors un groupe de passage. Dans le cas contraire, il y a une probabilité positive d'échapper au retour à A_1 et G est semi-final.

Opérons maintenant d'une manière analogue sur r groupes finaux G'_ν qui deviendront des groupes de passage ou semi-finaux $G_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, r)$; après l'état $A_1^{(\nu)}$ distingué dans G_ν, il y aura seulement une probabilité q_ν que le système reste dans G_ν; mais supposons que, dans le cas contraire, au lieu de passer à une nouvelle famille F, il passe dans un autre des états $A_1^{(\rho)}$; désignons par $q_{\nu,\rho} (\rho \neq \nu)$, la probabilité du passage de $A_1^{(\nu)}$ à $A_1^{(\rho)}$; si l'on pose

$$q_{\nu,\nu} = q_\nu, \qquad \text{on doit avoir} \qquad \sum_\rho q_{\nu,\rho} = 1.$$

Dans ces conditions, les G_ν deviennent des sous-groupes, qui s'échangent suivant une loi bien définie par les $q_{\nu,\rho}$. Supposons que l'ensemble forme un groupe unique G. Si tous les G'_ν étaient ergodiques, il est bien évident que G le sera aussi. Mais si un ou plusieurs G'_ν étaient non ergodiques, il est possible que le système reste indéfiniment dans un des G_ν correspondants, et cette circonstance finira presque sûrement par se produire; G est aussi un groupe non ergodique. Cela était bien évident; ceux qui rendent leur proie finissent par la perdre définitivement, si tout le monde ne fait pas de même.

Si les G_ν sont en nombre infini, une nouvelle circonstance est possible. Il peut arriver que les $q_{\nu,\rho}$ définissent une évolution non ergodique, qui fasse apparaître comme possible une augmentation indéfinie de l'indice ν. Si alors les G'_ν étaient tous ergodiques, cette augmentation finira presque sûrement par se produire. Dans le cas contraire, il pourra arriver qu'un des G_ν garde sa proie; mais, si la probabilité de cette circonstance est le terme général d'une série convergente, il reste encore possible que le système quitte successivement tous les G_ν et que ν augmente indéfiniment. Ainsi G a plusieurs manières bien différentes d'être non ergodique.

I.5. Retour au point de vue de Bernoulli. — 1° *Existence des limites en moyenne des* $P_{h,k}^{(n)}$. — Si $U_{k,n}$ désigne le nombre des termes égaux à k dans la suite H_1, H_2, ..., H_n et si $Q_{h,k}^{(n)}$ est défini comme au I.1.*b*, on a évidemment

$$Q_{h,k}^{(n)} = E\left\{\frac{1}{n} U_{k,n} \middle/ H(o) = h\right\}.$$

On sait que, quand des variables aléatoires bornées ont une limite presque sûre, leur valeur probable tend vers cette limite. Or nous avons vu que la fréquence $\frac{1}{n} U_{k,n}$ a une limite presque sûre, positive ou nulle, quand A_k appartient à un groupe ergodique, et si le système est, pour n assez grand, dans les états de ce groupe. Dans tous les autres cas, cette fréquence tend évidemment vers zéro au moins presque sûrement. Donc, dans tous les cas, il y a une limite presque sûre Φ_k, pouvant être aléatoire. Par suite,

$$Q_{h,k}^{(n)} \to P_{h,k} = E\{\Phi_k / H(o) = h\}.$$

Donc : *la probabilité de passage* $P^{n}_{h,k}$ *a, pour n infini, une limite au sens de Cesaro et cette limite* $P_{h,k}$ *est la valeur probable de* Φ_k, *dans l'hypothèse* $H(o) = h$.

Si A_h et A_k appartiennent à un même groupe final, $P_{h,k}$ a une valeur P_k, indépendante de h, positive seulement dans le cas d'un groupe fortement ergodique. Si A_l n'appartient pas à ce groupe et que α_l soit la probabilité de l'atteindre en partant de A_l, on a évidemment $H_{l,k} = \alpha_l P_k$. Dans tous les autres cas, les limites $P_{h,k}$ sont nulles.

Nous attirons l'attention sur le raisonnement qui précède. Il peut paraître naturel de commencer par l'étude approfondie du point de vue de Bernoulli. On voit qu'il peut arriver aussi qu'un théorème, qui n'est pas du tout évident au point de vue de Bernoulli, soit un corollaire immédiat d'un théorème lui-même facile à démontrer et même, à notre avis, presque intuitif, si l'on est habitué à la loi forte des grands nombres.

2° *Limites des* $P^{n}_{h,k}$ *dans le cas d'un groupe acyclique.* — Il est bien évident que, si A_h et A_k appartiennent à un groupe cyclique (d'ordre $r > 1$) et fortement ergodique, $P^{n}_{h,k}$ ne peut être positif que si n est de la forme $n_0 + \nu r$ (ν entier, n_0 dépendant de h et k) et, pour ces valeurs, tend au moins en moyenne vers $rP_k > 0$: donc dans ce cas, $P^{n}_{h,k}$ ne tend pas vers P_k. Si A_k appartient seul à un tel groupe, il peut arriver aussi que $P^{(n)}_{h,k}$ n'ait pas de limite. Nous nous proposons de montrer que ; *dans tous les autres cas,* $P^{(n)}_{h,k}$ *tend, pour n infini, vers une limite* (évidemment égale à la limite en moyenne $P_{h,k}$).

Nous allons d'abord nous placer dans le cas où A_h et A_k appartiennent à un même groupe ergodique et acyclique, c'est-à-dire démontrer que :

Théorème I. 5. — *Si* A_h *et* A_k *appartiennent à un même groupe* G, *ergodique et acyclique,* $P^{n}_{h,k}$ *tend, pour n infini, vers* P_k.

Ce théorème une fois démontré, il sera facile de conclure dans tous les cas.

3° *Remarques préliminaires.* — Ce théorème est connu dans le cas d'un système S_r (*voir* W. Doeblin [1], n° 5). Rappelons seulement que sa démonstration repose sur le fait que, d'après l'équation de Chapman, les $P^{n-n'}_{h,k}$ sont des moyennes pondérées des $P^{n}_{l,k}$. Il en résulte une réduction indéfinie de l'intervalle de variation possible de ces probabilités pour (k fixe et n croissant), à laquelle on ne peut échapper que dans le cas cyclique.

Rappelons aussi que, pour reconnaître si l'on est dans le cas cyclique, il suffit de considérer un seul état, par exemple A_0. Si $P^{(n)}_{0,0}$ n'est positif que pour des valeurs de n ayant r pour plus grand commun diviseur, A_0 appartient à un groupe cyclique d'ordre r. Cela est évident, et d'ailleurs bien connu (*cf.* A. Kolmogoroff [1]).

4° Ne nous occupons d'abord que de l'état A_0. Supposons-le réalisé initialement, et désignons par $N_0 = 0, N_1, N_2, \ldots$, la suite, presque sûrement infinie, des racines de $H_n = 0$. Toutes les différences $X_\nu = N_\nu - N_{\nu-1}$ dépendent de la même loi. Comme elles sont indépendantes, la donnée de cette loi détermine celles des N_ν et, par suite, toutes les probabilités

$$P_{0,0}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \Pr\{N_\nu = n\}.$$

La réciproque est vraie aussi (*cf.* A. Kolmogoroff [1]); mais nous n'aurons pas à l'utiliser.

D'après ces remarques, nous pouvons nous borner à l'étude d'un type simple de chaînes. Pourvu que n'importe quelle loi possible pour les X (compte tenu du fait que G est ergodique et acyclique) soit réalisée pour au moins une chaîne de ce type, la conclusion relative aux $P_{0,0}^{(n)}$ sera générale. Cela ne nous empêchera pas d'introduire dans nos raisonnements les autres $P_{h,k}^{(n)}$; mais la conclusion relative au cas où $h = k = 0$ pourra seule être généralisée.

Prenons, comme type simple, celui défini au I.4.3°, dans le cas ergodique, où $\beta = 0$. On a donc

$$\Pr\{X = h\} = \gamma_h = \beta_{h-1} - \beta_h \geqq 0 \qquad \left(\sum_1^\infty \gamma_h = 1\right).$$

Le groupe G étant supposé acyclique, les valeurs possibles de X, c'est-à-dire les h pour lesquels $\gamma_h = \alpha_{h-1}\beta_{h-1} > 0$, n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ([10]). Remarquons tout de suite que, dans ces conditions, on peut déterminer un nombre m tel que les valeurs possibles inférieures à m soient aussi sans diviseur commun. Remarquons, d'autre part, que

$$(I.5.1) \qquad P_{0,k}^{(n)} = 0 \quad (n < k), \qquad P_{0,k}^{(n)} = \beta_k P_{0,0}^{(n-k)} \leqq \beta_k \quad (n \geqq k).$$

Choisissons un nombre r, supérieur à m et qui devra, en outre, être assez grand pour vérifier des conditions qui seront indiquées plus loin. Extrayons de la suite des H_n une suite partielle H'_ν, comprenant tous les termes $\geqq r$ et ceux-là seulement. Pour cette suite, il y a au plus $r+1$ valeurs possibles, formant un groupe acyclique. Elle est d'ailleurs markovienne et stationnaire. Le théorème à démontrer étant déjà connu dans ce cas, les probabilités de passage $P_{h,k}^{\prime(n)}$ relatives à cette chaîne ont pour n infini une limite $P'_{h,k} = P'_k$ et il

([10]) Cela n'empêche pas que ces valeurs possibles peuvent appartenir toutes à une progression arithmétique $h = h_0 + \nu\rho$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$); seulement h_0 et ρ devront être premiers entre eux. La suite des N_ν aura alors un caractère cyclique, mais non celle des H_n.

résulte du fait que cette limite est aussi une limite presque sûre de la fréquence de l'état A_k que

$$(I.5.2) \qquad P'_k = \frac{P_k}{P_0 + P_1 + \ldots + P_r} = \frac{\beta_k}{S_r} \qquad \left(S_r = \sum_0^r \beta_h \right)$$

(puisque $P_k = \beta_k P_0$; $\beta_0 = 1$).

Désignons par $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{A}'_n$ les hypothèses $H_n \leqq r$ et $H_n > r$ et leurs probabilités par $1 - \eta$ et η. Dans l'hypothèse $\mathfrak{A}_n$ et en supposant toujours $H_0 = 0$, la probabilité de $H_n = k \leqq r$ est

$$(I.5.3) \qquad P''^{(n)}_{0,k} = \frac{1}{1-\eta} P^{(n)}_{k,0}.$$

Dans cette hypothèse, H_n figure dans la suite des H'_ν avec un rang *aléatoire* ν et

$$P''^{(n)}_{0,k} = E\{ P'^{(\nu)}_{0,k} \}.$$

Or, on peut choisir $\bar{\nu}$ assez grand pour que $\nu \geqq \bar{\nu}$ entraîne

$$| P'^{(\nu)}_{0,k} - P'_k | < \varepsilon,$$

puis $\bar{n}$ assez grand pour que $n > \bar{n}$ entraîne

$$Pr\{ \nu < \nu' \} < \varepsilon \quad (11).$$

On a alors

$$| P''^{(n)}_{0,k} - P'_k | < 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire que, pour n infini, $P''^{(n)}_{0,k}$ tend vers P'_k.

Il reste à montrer que, pour r assez grand,

$$P'_k - P_k \quad \text{et} \quad \mathrm{Max} | P''^{(n)}_{0,k} - P^{(n)}_{0,k} |$$

peuvent être rendus arbitrairement petits. Il en résultera bien qu'en prenant d'abord r, puis n assez grand, $P^{(n)}_{0,k} - P_k$ (qui ne dépend pas de r) peut être rendu arbitrairement petit, donc que $P^{(n)}_{0,k}$ tend, pour n infini, vers P_k.

Pour cela, il faut distinguer deux cas.

Premier cas : $S = \sum_0^\infty \beta_h$ *est fini.* — C'est le cas fortement ergodique. D'après (I.5.1), on a

$$Pr\{ \mathfrak{A}'_n \} = \sum_{r+1}^{\infty} P^{(n)}_{0,k} \leqq \sum_{r+1}^{\infty} \beta_k ;$$

donc, pour r assez grand, on peut rendre cette probabilité inférieure, quel que

(11) Le rang n de $H'_{\bar{\nu}}$ dans la suite des H_n est en effet une variable aléatoire presque sûrement finie. Il n'y a qu'à choisir $\bar{n}$ de manière que

$$Pr\{ n > \bar{n} \} < \varepsilon.$$

soit n, à un nombre arbitrairement petit et, d'après (I.5.3), il en est de même de $|P''^{(n)}_{0,k} - P^{(n)}_{0,k}|$. D'autre part, d'après (I.5.2), $P'_k = \frac{\beta_k}{S_r}$ tend pour r infini vers $P_k = \frac{\beta_k}{S}$, ce qui termine la démonstration.

Deuxième cas : la série $\sum \beta_h$ *est divergente.* — C'est le cas faiblement ergodique. Les P_k sont tous nuls et les P'_k tendent vers zéro. Donc, pour r assez grand, $P'_k \leq P'_0 < \varepsilon$ et, pour n assez grand, compte tenu de (I.5.3),

$$P^{(n)}_{0,k} \leq P''^{(n)}_{0,k} < \varepsilon,$$

de sorte que le résultat est encore vrai dans ce cas.

5° La démonstration du théorème énoncé est maintenant immédiate. Le résultat obtenu pour $P^{(n)}_{0,0}$ s'étend naturellement à $P^{(n)}_{k,k}$, qui tend vers P_k. Si N_1 désigne la première racine de $H_n = k$ et si $H_0 = h \neq k$, on a

$$P^{(n)}_{h,k} = \sum_1^n \Pr\{N_1 = \nu\} P^{(n-\nu)}_{k,k}.$$

On peut déterminer $\bar{\nu}$ et $\bar{n}$ de manière que

$$\Pr\{N_1 > \bar{\nu}\} < \varepsilon,$$
$$|P^{(n)}_{k,k} - P_k| < \varepsilon \qquad (n > \bar{n}).$$

Alors, pour $n > \bar{\nu} + \bar{n}$, on a

$$|P^{(n)}_{h,k} - P_k| < 2\varepsilon, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6° Le théorème I.5 étant ainsi démontré, il n'y a aucune difficulté à conclure dans tous les autres cas.

a. Si A_k n'appartient pas à un groupe ergodique, le système partant de A_h a une probabilité α d'atteindre A_k au moins une fois. Dans ce cas, il y a presque sûrement une racine N de $H_n = k$ qui est la dernière réalisation de cet état. Pour tout n assez grand, on a

$$P\{N = n\} \leq \Pr\{N \geq n\} < \varepsilon, \qquad \text{donc} \quad P^{(n)}_{h,k} < \alpha\varepsilon \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $P^{(n)}_{h,k}$ tend vers zéro.

b. Si A_h et A_k appartiennent à un groupe cyclique d'ordre r et ergodique, la suite des $H_{n_0+\nu r}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) constitue une suite du type acyclique. Si l'on détermine n_0 de manière que $P^{(n_0+\nu r)}_{h,k}$ soit positif (au moins pour certains ν), le théorème I.5 nous montre que $P^{(n)}_{h,k}$, sûrement nul si $n - n_0$ n'est pas multiple de r, tend, pour $n - n_0 = \nu r$ et ν infini, vers une limite qui ne peut être que rP_k (puisqu'en tout cas P_k est la limite en moyenne).

c. Si A_k appartient seul à un groupe ergodique G, α_h désignant toujours la probabilité que le système partant de A_h atteigne G, il est évident, si le groupe G n'est pas cyclique, que $P_{h,k}^{(n)}$ tend vers $H_{h,k} = \alpha_h P_k$. Si le groupe est cyclique d'ordre r, on ne sait pas à l'avance de quelle manière le système atteindra le groupe, c'est-à-dire quelle sera la valeur de n_0 ($n_0 = 1, 2, \ldots, r$) pour laquelle les $P_{h,k}^{(n_0+\nu r)}$ pourront être positifs. On peut évidemment répartir comme on veut la probabilité entre ces r possibilités; donc, $\varphi(n)$ étant une fonction de la variable entière n, non négative, de période r et de moyenne dans une période égale à 1, on peut définir des processus pour lesquels

$$\lim[P_{h,k}^{(n)} - \alpha_h P_k \varphi(n)] = 0.$$

Naturellement, si le groupe G est faiblement ergodique, c'est-à-dire si $P_k = 0$ et aussi si $\alpha_h = 0$, $P_{h,k}^{(n)}$ tend vers zéro. Si, au contraire, G est cyclique d'ordre r et fortement ergodique et que, de plus, α_h soit positif, $P_{h,k}^{(n)}$ sera *en général* asymptotiquement périodique, c'est-à-dire différera infiniment peu d'une fonction $\alpha_h P_k \varphi(n)$, $\varphi(n)$ étant périodique (de période r), non négatif, en moyenne égale à un.

A cela près, cette fonction est quelconque. En effet, si le système arrive au groupe G, nous ne saurons pas toujours à l'avance comment il y arrivera. Nous pouvons supposer, par exemple, que l'état qui suit immédiatement A_h ne puisse qu'appartenir à un des r sous-groupes de G, ou à un ensemble d'états d'où il ne puisse pas revenir à G; nous pouvons répartir la probabilité comme nous le voulons entre ces $h+1$ possibilités, c'est-à-dire que, sans autre restriction que $0 \leq \alpha_h \leq 1$ et les conditions triviales indiquées pour $\varphi(n)$, nous pouvons prendre n'importe quelle détermination de α_h et $\varphi(n)$.

On remarque qu'en particulier $\varphi(n)$ peut avoir une période sous-multiple de r, ou même être constant (c'est pour cela que, dans le cas considéré, $P_{h,k}^{(n)}$ n'est qu'*en général* asymptotiquement périodique).

7° *Résumé des principaux résultats. — a. La limite en moyenne* $P_{h,k}$ *existe toujours. Elle est de la forme* $\alpha_{h,k} P_k$, P_k *étant positif si* A_k *appartient à un groupe* G *fortement ergodique et dans ce cas seulement;* $\alpha_{h,k}$ *est la probabilité du passage de* A_h *à ce groupe.*

b. Pour qu'il y ait des oscillations asymptotiquement périodiques, il faut que le groupe G *soit cyclique et fortement ergodique; il suffit que, de plus,* A_k *appartienne aussi à ce groupe. S'il n'y a pas de telles oscillations,* $P_{h,k}^{(n)}$ *tend vers* $P_{h,k}$. *S'il y en a,* $P_{h,k}(t)$ *est la somme d'un terme périodique, à période entière et de moyenne* $P_{h,k}$, *et d'un terme tendant vers zéro.*

CHAPITRE II.

Le cas continu.
Notions générales et étude des systèmes sans états instantanés.

II.1. Les coefficients λ_h et μ_h. — Désignons par $\Phi_h(t)$ la probabilité que le système, s'il est initialement dans l'état A_h, y reste constamment pendant l'intervalle de temps (o, t). C'est évidemment une fonction non croissante et, de plus on a, quels que soient τ positif et n entier positif

$$\Phi_h(n\tau) = [\Phi_h(\tau)]^n.$$

Il en résulte évidemment que $\Phi_h(t)$ est de la forme

$$\Phi_h(t) = e^{-\lambda_h t} \tag{II.1.1}$$

($\lambda_h \geqq o$; les valeurs limites o et $+\infty$ ne sont pas exclues.

Nous attirons l'attention sur le fait que ce résultat simple, bien connu et dont il est inutile de rappeler les nombreuses applications, ne suppose rien d'autre que le caractère markovien et stationnaire de l'évolution. La signification du coefficient λ_h est d'ailleurs très simple : $\lambda_h dt$ est, à $O(dt^2)$ près, la probabilité qu'il y ait au moins un changement d'état pendant l'intervalle de temps $(t, t+dt)$, si $H(t) = h$ [12].

Nous désignerons par T le temps au bout duquel le système quitte l'état initial A_h. La loi dont dépend la variable auxiliaire $U = \lambda_h T$ ne dépend d'aucun paramètre. C'est la première loi de Laplace. On sait que $E\{U\} = 1$. Donc la durée probable de chaque séjour du système dans l'état A_h est

$$E\{T\} = \mu_h = \frac{1}{\lambda_h}. \tag{II.1.2}$$

Nous dirons que ce coefficient μ_h est la *vie probable* de A_h.

Si $\lambda_h = o$ (donc $\mu_h = \infty$), l'état A_h est un *état final*. Si le système arrive à cet état, son évolution est terminée.

Si $\lambda_h = \infty$ (donc $\mu_h = o$), A_h est un *état instantané*; si λ_h est fini, l'état A_h sera dit *stable* (sa *stabilité* est mesurée par μ_h).

---

(12) Ces coefficients, avec d'autres notations, ont été considérés par J. L. Doob [1], qui les définit par la formule $P'_{h,h}(+o) = -\lambda_h$. Nous pensons qu'il y a intérêt à les introduire directement. Mais, dans la suite, nous supposerons connue la définition du processus par les fonctions $P_{h,k}(t)$, qui a été rappelée dans l'introduction et qui donne sans doute la seule base possible, en tout cas la plus naturelle, pour l'étude générale des processus markoviens et stationnaires.

Nous appellerons *variable du type* U, ou simplement désignerons par U_1, U_2, ..., des variables dépendant de la première loi de Laplace. Elles joueront naturellement dans la suite un rôle important.

II.2. États instantanés et états fictifs. — Les états instantanés jouent un rôle essentiel pour l'étude de certains processus. Ainsi il peut arriver que $P_{h,k}(t)$ ait une valeur P_k indépendante aussi bien de h que de t. Alors les valeurs successives de $H(t)$ résulteront d'expériences absolument indépendantes les unes des autres et, s'il y a plusieurs états effectivement possibles, il ne peut pas arriver que toutes les expériences faites pendant un intervalle fini, si petit soit-il, donnent toutes le même résultat. Donc, $H(t)$ ne peut pas rester constant pendant un tel intervalle; tous les états sont instantanés.

Il arrive d'autres fois que l'introduction d'états instantanés semble résulter d'une mauvaise définition du processus et qu'il vaille mieux les éliminer. Ainsi, supposons que les états A_h se succèdent nécessairement dans l'ordre des h croissants, que $\mu_1 = 0$, μ_0 et μ_2 étant positifs. Si le système est initialement dans l'état A_0, l'état A_1 aura une existence instantanée à l'instant $T = \mu_0 U$. D'ailleurs, la probabilité que T ait une valeur donnée t est nulle; donc $P_{0,1}(t) = 0$, et naturellement, tous les autres $P_{h,1}(t)$ sont nuls aussi, pour tout t positif. Donc, non seulement l'état A_1, à cause de son caractère instantané, est inobservable, mais il ne joue aucun rôle dans la définition du processus par les fonctions $P_{h,k}(t)$. Il vaut mieux l'éliminer et considérer que le système passe directement de l'état A_0 à l'état A_2.

D'une manière générale, nous dirons qu'un état A_l est un *état fictif* s'il n'intervient pas dans la définition du processus par les fonctions $P_{h,k}(t)$, c'est-à-dire si $P_{h,l}(t) = 0$ quels que soient $t > 0$ et l. Si l'on veut éliminer les états fictifs, on a évidemment le droit de le faire ([13]). Mais nous verrons que, dans des cas moins simples que celui qui vient d'être indiqué, il peut être utile d'introduire des états fictifs, nécessairement instantanés, pour définir le fonctionnement du processus. Naturellement un état fictif ne peut être qu'instantané. En effet, pour un état stable, on a

$$P_{h,h}(t) \geqq e^{-\lambda_h t} > 0,$$

de sorte qu'un tel état ne peut pas être fictif. Par contre, l'exemple indiqué au début du présent paragraphe montre qu'un état instantané peut n'être pas fictif.

([13]) S'il y en a au plus une infinité dénombrable, leur réunion conserve le caractère d'état fictif. S'il y en a une infinité non dénombrable, ou bien leur réunion F conserve le caractère fictif, c'est-à-dire que $P_{h,F}(t) = 0$ quels que soient $t > 0$ et h; ou bien elle le perd, mais en même temps le système étudié cesse d'être un système S_ω à une infinité dénombrable au plus d'états réellement possibles. Ce qui est dit dans le texte est donc toujours exact pour les systèmes S_ω.

II.3. Systèmes sans états instantanés. La durée d'une évolution donnée pour un tel système. — 1° Pour un système sans état instantané, chaque état A_h est, à l'intérieur d'un intervalle donné $(0, t)$, presque sûrement réalisé sur un ou plusieurs intervalles $(i_h, i'_h, \ldots)$, ou n'y est pas réalisé. Désignons par $\mathcal{E}'_t$ la réunion de tous ces intervalles ouverts, et par $\mathcal{E}_t$ l'ensemble complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des points où $H(t)$ est discontinu. Il est nécessairement mesurable. Montrons que : *sa mesure* $\mathbf{m}$ *est presque sûrement nulle*. En effet, dans le cas contraire, elle aurait une valeur probable positive μ. Or $\frac{\mu}{t}$, qui est la probabilité qu'un point θ choisi au hasard entre zéro et t appartenant à $\mathcal{E}_t$, peut se calculer en choisissant θ avant la détermination de $H(t)$, ce qui donne

$$\mu = \int_0^t \Pr\{t \in \mathcal{E}_t\}\, dt = 0.$$

Donc $\mathbf{m}$ est presque sûrement nul ([14]), C. Q. F. D.

Donc : *t est exactement la somme des temps passés par le système dans les différents états.*

2° Proposons-nous maintenant d'étudier le temps T qu'il faut au système pour parcourir une succession donnée d'états. Leur ordre est évidemment indifférent. Il nous suffit de connaître, pour chaque indice h, le nombre de réalisations n_h de l'état A_h. Le temps total passé dans cet état est alors de la forme $\mu_h S_h$, S_h désignant la somme de n_h variables indépendantes du type U. Elle dépend d'une loi bien connue de Pearson. Il nous suffira de rappeler que

$$\Pr\{S_h < s\} = \int_0^s \frac{e^{-u} u^{n_h - 1}}{(n_h - 1)!}\, du \qquad (s > 0,\ n_h > 0)$$

et que

$$E\{S_h\} = \sigma^2\{S_h\} = n_h.$$

On a ensuite évidemment

$$T = \Sigma \mu_h S_h,$$

tous les S_h étant indépendants les uns des autres.

3° Théorème II.3.1. — T *est presque sûrement fini ou infini en même temps que sa valeur probable* $a = \sum n_h \mu_h$.

Ce théorème est évident dans le cas où l'un au moins des n_h est infini (on peut d'ailleurs le vérifier en appliquant à la somme S_h le raisonnement qui va

([14]) Nous supposons bien entendu que le théorème de Fubini soit applicable. Nous n'insisterons pas ici sur ce point; nous reviendrons sur la légitimité de cette application dans un cas analogue (II.6.2°).

être appliqué à la somme T). Il est évident aussi dans le cas où a est fini (si la variable aléatoire positive T n'était pas presque sûrement finie, sa valeur probable serait infinie).

Supposons donc a infini, mais tous les n_h finis et supposons d'abord tous les μ_h au plus égaux à un. Posons

$$T_h=\sum_1^h \mu_k S_k, \qquad a_h=E\{T_h\}, \qquad b_h=\sigma\{T_h\}.$$

On a

$$b_h^2=\sum_1^h n_k\mu_k^2\leq\sum_1^h n_k\mu_k=a_h,$$

d'où, puisque a_h augmente indéfiniment avec h, $b_h=o(a_h)$. Dans ces conditions, quelque petit que soit ε et quelque grand que soit s, l'inégalité de Tchebycheff montre que, pour h assez grand,

$$Pr\{T_h\leq s\}<\varepsilon,$$

et, comme T_h ne peut que croître avec h, il en résulte bien que sa limite T est presque sûrement infinie.

Il reste à montrer que le résultat subsiste si certains des μ_h sont <1. Remplaçons-les par 1, ce qui ne peut que diminuer T, T_h, a et a_h. Mais a reste infini; en effet, ou bien on n'a changé qu'un nombre fini de termes $n_h\mu_h$, et cela ne peut pas changer la nature de la somme, ou bien on en a changé une infinité; alors les termes réduits sont ≥ 1 et la somme est encore infinie. Le résultat obtenu dans le cas précédent montre alors que, malgré la diminution de certains termes, T est presque sûrement infini (c'est-à-dire que T_h augmente indéfiniment avec h). Cela est vrai *a fortiori* sans cette modification.

4° *Remarque.* — Il est utile, pour la suite, d'attirer l'attention sur le cas particulier du théorème précédent mentionné au début de la démonstration : *Un même état* A_h, *non instantané, ne peut pas être réalisé une infinité de fois en un temps fini.*

5° *L'image moyenne d'une succession donnée d'états.* — Nous appellerons ainsi la figure obtenue en remplaçant chacun des intervalles $i_h^{(\nu)}$ où $H(t)=h$ par un intervalle $\bar{i}^{(\nu)}$ ayant pour longueur la longueur probable μ_h de $i_h^{(\nu)}$. L'ordre de ces intervalles ne sera pas changé et il n'y aura toujours aucun vide entre eux; en d'autres termes, chacun de ces intervalles aura pour extrémité de gauche le point dont l'abscisse est la longueur totale des intervalles placés à sa gauche. En d'autres termes encore, l'ensemble complémentaire $\bar{\mathcal{E}}$ sera de mesure nulle.

Il y a naturellement une correspondance biunivoque (aléatoire) entre l'axe des t et son image; on peut la définir avec précision en supposant que, quand t décrit $i_h^{(\nu)}$, $\bar{t}$ soit une fonction linéaire croissante de t et décrive $\bar{i}_h^{(\nu)}$. Alors $\bar{t}$ est une fonction continue $\varphi(t)$ de t, toujours croissante, et qui varie avec t de zéro à l'infini. La relation $\bar{t} = \varphi(t)$ fait correspondre $\mathfrak{E}$ à l'ensemble $\bar{\mathfrak{E}}$ des points de discontinuité de $H(t)$.

6° Théorème II.3.2. — *Dans le cas où $\Sigma n_h \mu_h$ est fini, T dépend d'une loi absolument continue, à densité de probabilité positive de zéro à l'infini.*

Nous supposons bien entendu un au moins des n_h positifs; nous ne restreignons rien en supposant que ce soit n_0. Alors $T = \mu_0 U + T'$, T' étant non négatif et indépendant du premier terme ([15]). Ce premier terme dépendant d'une loi absolument continue à densité de probabilité positive dans $(0, \infty)$, il en est de même de la somme dans l'intervalle $(\mathrm{Min}\,T', \infty)$. Il reste donc à montrer que T (et *a fortiori* $T' \leq t$) peut être inférieur à un nombre τ arbitrairement petit.

Choisissons d'abord un nombre h assez grand pour que

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} n_k \mu_k = a - a_h < \frac{\tau}{4},$$

et, par suite,

$$\Pr\left\{(T - T_h) \leq \frac{\tau}{2}\right\} > \frac{1}{2} \qquad \left(T_h = \sum_{1}^{h} \mu_k S_k\right).$$

D'autre part, pour que $T_h < \frac{\tau}{2}$, il suffit que chacune des variables t qui interviennent dans cette somme soit $< \tau/2 \sum_{0}^{h} n_k \mu_k$. Le nombre de ces variables indépendantes étant $\sum_{0}^{h} n_k < \infty$, la probabilité α de cette circonstance est positive et il vient

$$\Pr\{T < \tau\} > \frac{\alpha}{2} > 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II.4. Classification des processus. 1° *Remarque préliminaire.* — Plaçons-nous toujours dans le cas des processus sans états instantanés et observons d'abord que l'ensemble $\bar{\mathfrak{E}}$ défini au II.3.5° est de mesure nulle et fermé (puisqu'il est le complément d'une réunion d'intervalles ouverts). Montrons que : *à cela près il est quelconque.*

([15]) Au premier terme, on pourrait écrire S_0 au lieu de U. En écrivant U, nous évitons d'utiliser les propriétés de la loi de Pearson rappelées plus haut.

En effet, si l'on se donne un tel ensemble $\bar{\mathcal{E}}$ (soit de $-\infty$ à $+\infty$, soit de 0 à $+\infty$), son complément est la réunion d'au plus une infinité dénombrable d'intervalles ouverts; on peut donc les dénombrer $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \ldots)$ et faire correspondre à chaque $\bar{i}_h$ un état A_h du système. On aura ainsi évidemment l'image moyenne d'un certain processus, dans lequel l'ordre de succession des états est défini, la rapidité de l'évolution étant seule aléatoire.

Naturellement, si plusieurs des intervalles $\bar{i}_h$ sont égaux, on peut les faire correspondre à un même état A_h, qui sera ainsi réalisé plusieurs fois. Dans le cas contraire, tous les états introduits d'abord sont nécessairement distincts.

2° *Classification des fonctions* $H(t)$ *possibles.* — Cette classification repose sur celle des ensembles $\mathcal{E}$, qui sont de quatre types possibles.

Premier type, ou *type fini.* — Dans n'importe quel intervalle fini, $\mathcal{E}$ ne comprend qu'un nombre fini de points. Ces points sont alors des sauts de $H(t)$. Réciproquement, si $H(t)$ n'a pas d'autres discontinuités que des sauts, $H(t)$ est du type fini. Naturellement, s'il n'y a pas d'état final, le nombre total des sauts (de zéro à l'infini) est infini.

Deuxième type, ou *type transfini.* — $\mathcal{E}$ est un ensemble bien ordonné, avec au moins un point d'accumulation à distance finie. On peut alors utiliser la numération transfinie pour numéroter, soit les points de discontinuité T_ν, soit les valeurs successives H_ν de $H(t)$. L'instant initial sera $T_0 = t_0$ et la valeur initiale $H(t_0 + 0) = H_0$, et l'on aura toujours $H(T_\nu + 0) = H_\nu$. Les indices ν utilisés forment ce que A. Denjoy appelle une *tranche commençante* $(1, \bar{\nu})$ de l'ensemble des nombres transfinis de la première classe. Le nombre $\bar{\nu}$ est évidemment un nombre quelconque de cette classe [puisqu'on peut toujours faire l'image de la tranche $(1, \bar{\nu})$ sur l'axe des t]. Mais, bien entendu, si $\bar{\nu}$ est fini ou si $\bar{\nu} = \omega$, on est dans le cas fini; il faut que $\bar{\nu} > \omega$ pour qu'on soit dans le cas transfini.

Observons, en outre, que $\bar{\nu} = \rho + 1$ implique l'existence d'un état final A_ρ, pour lequel $\lambda_\rho = 0$.

Troisième type. — $\mathcal{E}$ est dénombrable, mais n'est pas bien ordonné.

On remarque que le premier type est caractérisé par le fait que $H(t - 0)$ et $H(t + 0)$ existent partout. L'ensemble des deux premiers est caractérisé par le fait que $H(t + 0)$ existe partout. Le troisième type est donc caractérisé par l'apparition des points où $H(t + 0)$ n'existe pas.

Il y a évidemment en tout, à ce point de vue, quatre espèces de points de discontinuité, qui se distinguent par l'existence ou la non-existence de $H(t - 0)$ et $H(t + 0)$. Toutes les quatre sont possibles pour le troisième type. On pourrait évidemment le diviser en plusieurs subdivisions, suivant celles de ces espèces qui sont effectivement réalisées. On

pourrait aussi mettre en évidence le nombre des ensembles dérivés de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas vides (ce qui introduirait une classification transfinie, pour ce type comme pour le précédent). Cela ne nous a pas paru nécessaire.

Quatrième type. — $\mathcal{E}$ est toujours de mesure nulle, mais n'est pas dénombrable.

Il résulte du 1° que ces quatre types sont effectivement possibles. Nous en donnerons d'ailleurs des exemples. On remarque que cette classification repose sur des caractères qui ne sont pas modifiés si l'on remplace $\mathcal{E}$ par son image moyenne $\overline{\mathcal{E}}$. On peut donc parler indifféremment du type de $\mathcal{E}$, de $\overline{\mathcal{E}}$ ou de $H(t)$.

3° *Cas des systèmes comportant des états instantanés.* — Ces systèmes seront étudiés au Chapitre III; mentionnons tout de suite qu'ils conduisent à introduire deux types nouveaux; pour les distinguer, nous introduirons l'ensemble E_h des racines de $H(t) = h$.

Cinquième type. — Tous les E_h sont mesurables et il existe au moins un état instantané A_h réalisé sur un ensemble E_h de mesure positive [dire que A_h est instantané revient à dire que E_h ne contient aucun intervalle].

Sixième type. — Il existe au moins un E_h non mesurable (donc au moins deux): disons tout de suite que la réunion des E_h non mesurables peut remplir des intervalles, ou au contraire former un ensemble discontinu de mesure positive).

Naturellement, la définition de $\overline{\mathcal{E}}$ ne s'applique plus ici, ou du moins devrait être convenablement précisée.

4° *Classification des processus eux-mêmes.* — La succession des états possibles, que nous avons jusqu'ici supposée connue, est naturellement le plus souvent aléatoire, et le type même de la fonction $H(t)$ qui sera réalisée peut dépendre à la fois du hasard et du choix de l'état initial. La complexité des six types qui viennent d'être définis étant croissante et la distinction entre le cas où les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont toutes mesurables et celui où certaines de ces fonctions ne le sont pas ayant aussi une grande importance, nous sommes conduits aux définitions suivantes :

Un processus est du $n^{\text{ième}}$ type ($n \leq 6$) si toutes les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont mesurables, si la fonction $H(t)$ peut être du $n^{\text{ième}}$ type, et si elle ne peut pas être d'un type de rang $> n$. Il est du septième type si une au moins des fonctions $P_{h,k}(t)$ n'est pas mesurable (il y en aura alors au moins quatre qui ne le sont pas).

II.5. Les coefficients $p_{h,k}$. — 1° *Définition.* — Il est entendu qu'il n'est plus question que des systèmes sans états instantanés; tous les λ_h sont donc finis.

Considérons l'instant aléatoire T_1, où le système quitte l'état initial A_h. Il

peut à ce moment prendre un quelconque des états *autres que* A_h. Désignons par $p_{h,k}$ la probabilité que ce soit l'état A_k. Ces coefficients $p_{h,k}$ vérifient évidemment les conditions

$$p_{h,k} \geqq 0, \qquad p_{h,h} = 0, \qquad p_h = \sum_k p_{h,k} \leqq 1,$$

$p'_h = 1 - p_h$ étant la probabilité de la non-existence de $H(T_1 + 0)$. On voit donc que :

La condition $p_h = 1$ (quel que soit h) *exprime que* $H(t+0)$ *existe en tout point où* $H(t-0)$ *existe. Elle est nécessaire pour que le processus considéré appartienne à un des deux premiers types. Elle est vérifiée, en outre, pour certains processus du troisième type* [ceux pour lesquels $H(t+0)$ peut ne pas exister, mais seulement en des points où $H(t-0)$ n'existe pas non plus].

2° *Conséquences immédiates de la définition.* — Supposons d'abord $p_h = 1$ (quel que soit h). A l'état initial succéderont successivement des états d'indices $H_1, H_2, \ldots$, qui forment une chaîne de Markoff, du type étudié au chapitre I, avec seulement la condition restrictive $p_{h,h} = 0$. Ainsi, *la donnée des* $p_{h,k}$ *définit la loi dont dépend la succession des états réalisés, tant qu'il n'y a eu qu'un nombre fini de changements d'états. Les coefficients* λ_h *antérieurement définis déterminent la loi dont dépend la rapidité de l'évolution* ([16]). Donc : *si l'on connaît à la fois les* $p_{h,k}$ *et les* λ_h *et si* $p_h = 1$ (quel que soit h), *la loi dont dépend l'évolution est complètement définie jusqu'à l'instant* T_ω (si en particulier T_ω est infini, elle est définie depuis l'instant initial jusqu'à l'infini).

A l'instant T_ω, la loi de l'évolution ultérieure n'est plus définie. Si nous voulons définir un processus du type transfini, $H(T_\omega + 0)$ devra exister; mais c'est une variable aléatoire pour laquelle nous pouvons nous donner arbitrairement une nouvelle loi de probabilité, définie par des formules de la forme

$$p_{\omega,k} = \Pr\{H(T_\omega + 0) = k\}, \qquad \text{avec} \qquad p_{\omega,k} \geqq 0, \qquad \sum_k p_{\omega,k} = 1.$$

Mais on n'a pas toujours ainsi toutes les solutions du problème. Il peut arriver que les $p_{\omega,k}$ dépendent de la succession des états qui ont précédé l'instant T_ω. En d'autres termes, on ne pourrait pas considérer qu'il existe un état fictif réalisé à l'instant T_ω, mais il pourra exister plusieurs états fictifs qu'il faudra distinguer, parce que la suite de l'évolution dépendra de celui qui est réalisé. Nous reviendrons sur cette question, Retenons pour le moment que : *après l'instant* T_ω, *la loi dont dépend la suite de l'évolution n'est pas complètement définie par la donnée des coefficients* $p_{h,k}$ *et* λ_h.

([16]) Remarquons tout de suite que, si certains des λ_h sont nuls, ils correspondent à des états finaux et, pour ces valeurs de h, la donnée des $p_{h,k}$ est devenue inutile.

La conclusion de ces remarques est le théorème suivant :

THÉORÈME II.5. — 1° *Un processus du type fini est entièrement défini par la donnée des coefficients* λ_h *et* $p_{h,k}$; 2° *pour un processus du type transfini, ces coefficients suffisent à déterminer la loi de l'évolution jusqu'à l'instant* T_ω ([17]).

Nous verrons qu'il peut arriver aussi qu'un processus du troisième type soit complètement défini par la donnée des coefficients λ_h et $p_{h,k}$, La propriété des processus du type fini que nous venons d'établir n'est donc pas caractéristique.

3° *Remarques relatives au cas fini.* — Pour qu'un processus soit de type fini :

a. Il suffit que les λ_h soient bornés supérieurement, donc les μ_h inférieurement. En effet, dans ces conditions, une suite infinie d'états ne peut pas être parcourue en un temps fini.

b. Il faut que $p'_h = 0$ (quel que soit h).

Le rapprochement de ces deux conditions montre que les conditions triviales imposées séparément aux λ_h et aux $p_{h,k}$ ne suffisent pas pour qu'il existe un processus formé avec ces coefficients. Si tous les λ_h sont bornés par un nombre fini λ, et si un au moins des p'_h est positif, un tel processus ne peut pas exister.

Il ne semble pas exister de condition nécessaire et suffisante *simple* pour reconnaître s'il existe un processus du type fini correspondant aux coefficients donnés. La marche à suivre est la suivante : il faut que $p_h = 1$, pour tous les h; les H_n forment alors une chaîne de Markoff bien définie par les $p_{h,k}$ et pour laquelle il est facile de calculer les $p'^{(n)}_{h,k}$. Chacune des chaînes ainsi possibles a une durée probable $T = \Sigma N_k \mu_k$ (N_k étant le nombre de réalisations de A_k). Il s'agit de savoir si T est presque sûrement infini.

On remarque qu'une condition nécessaire est que $E\{T\}$ soit infini, c'est-à-dire que, quel que soit h, on ait

$$\sum_k \mu_k \sum_n \Pr\{H_n = k / H_0 = h\} = \infty .$$

Elle n'est pas suffisante.

Si T peut être fini, des données complémentaires permettent, comme nous l'avons dit, de former une infinité de processus du type transfini correspondant aux coefficients donnés. Il peut aussi en exister qui appartiennent à d'autres types; nous reviendrons plus loin sur ce cas.

II.6. LES COEFFICIENTS $p'_{h,k}$. — *Leurs relations avec les coefficients* λ_h *et* $p_{h,k}$. — 1° Proposons-nous d'évaluer approximativement $P_{h,k}(t)$ pour t très petit. Nous montrerons dans un instant que l'erreur commise en négligeant la possibilité qu'il y ait plus d'un changement pendant l'intervalle de temps t est $o(dt)$.

([17]) *Cf.* W. Feller [1] et J. L. Doob [2].

Admettons-le provisoirement. Il en résulte évidemment que

$$P_{h,h}(t) = e^{-\lambda_h t} + o(t) = 1 - \lambda_h t + o(t),$$

et, si $k \neq h$,

$$P_{h,k}(t) = (1 - e^{-\lambda_h t}) p_{h,k} + o(t) = \lambda_h p_{h,k} t + o(t).$$

Par suite, on a $P_{h,k}(+0) = \delta_{h,k}$, les dérivées $P'_{h,h}(0)$ et $P'_{h,k}(0)$ existent et ont les valeurs

$$\text{(II.6.1)} \qquad \begin{cases} p'_{h,h} = P'_{h,h}(0) = -\lambda_h, \\ p'_{h,k} = P'_{h,k}(0) = \lambda_h p_{h,k} \qquad (k \neq h). \end{cases}$$

Ces équations montrent l'équivalence de la donnée des $p'_{h,k}$ et de celle de l'ensemble des coefficients λ_h et $p_{h,k}$. Elles sont en effet résolues par rapport aux premiers. Inversement, si l'on se donne les $p'_{h,k}$, on en déduit λ_h, puis les $p_{h,k}$, du moins pour les valeurs de h n'annulant pas λ_h. Mais, si $\lambda_h = 0$, l'état A_h est final, et il n'est pas nécessaire de lui associer des coefficients $p_{h,k}$. Donc la donnée des $p'_{h,k}$ est, au point de vue de la définition du processus, exactement équivalente à celle des λ_h et des $p_{h,k}$. On voit aussi que les conditions triviales qu'il faut imposer aux $p'_{h,k}$ sont

$$(\mathfrak{T}') \qquad p'_{h,h} \leq 0, \qquad p'_{h,k} \geq 0 \qquad (k \neq h),$$

$$(\mathfrak{C}') \qquad \sum_{k \neq h} p'_{h,k} \leq |p'_{h,h}|,$$

cette dernière condition devenant une égalité, soit si l'état A_h est final, soit si, à l'instant T_1 où le système le quitte, $H(T_\omega + 0)$ est presque sûrement bien défini.

2° Démontrons maintenant le résultat admis au début du 1°. Il ne s'agit pas, bien entendu, de démontrer que la probabilité qu'il y ait plus d'un changement pendant l'intervalle de temps $(0, t)$ est $o(t)$; cela est faux si $p'_h > 0$, puisque cette probabilité est au moins $(1 - e^{-\lambda_h t}) p'_h$, donc $\lambda_h p'_h t - O(t^2)$. Il s'agit (que k soit $= h$ ou $\neq h$) de la probabilité d'un changement, autre que le premier, et *intéressant l'état* A_k, de manière à modifier la probabilité de sa réalisation à l'instant t. Si T_1 est l'instant du premier changement et si $T_1 < t$, il s'agit de montrer que la probabilité d'un second changement intéressant l'état A_k est très petite si t, et, *a fortiori*, $t - T_1$, sont très petits. La probabilité de $T_1 < t$ étant $\lambda_h t - O(t^2) = O(t)$, la probabilité que ces deux circonstances soient réalisées successivement sera bien $o(t)$.

D'abord, si l'état A_k est réalisé après un premier changement, la probabilité d'un second changement est majorée par $\mu_k t$. Dans ce cas le résultat énoncé est exact.

D'autre part, si l'état A_k n'est pas réalisé après le premier changement, il s'agit de majorer la probabilité qu'un chemin *conduisant de* A_h à A_k puisse être

parcouru en un temps t. Pour démontrer que cette probabilité tend vers zéro avec t, il suffit d'observer que le temps qui s'écoule, depuis l'instant T_1 où le système quitte l'état A_h pour prendre un état inconnu, mais autre que A_k, jusqu'à la première réalisation de A_k est une variable aléatoire, finie ou infinie, mais presque sûrement positive. La probabilité qu'elle soit $< t$ tend donc vers zéro avec t. C. Q. F. D.

II.7. Les équations de Kolmogoroff. — 1° Dans le cas qui nous occupe, les équations différentielles formées par A. Kolmogoroff [1] à propos de problèmes plus généraux, s'écrivent aisément, au moins si l'on se contente d'un calcul formel. D'une part, en dérivant par rapport à s les équations $(\mathcal{C})$ du paragraphe 2 de l'introduction, puis faisant $s = 0$, il vient

$$(\mathcal{K}_1) \qquad P'_{h,k}(t) = \sum_j p'_{h,j} P_{j,k}(t).$$

Si l'on opère de la même manière après avoir échangé t et s, on trouve

$$(\mathcal{K}_2) \qquad P'_{h,k}(t) = \sum_j p'_{j,k} P_{h,j}(t).$$

Il n'y a pas lieu d'être surpris de trouver deux expressions différentes des mêmes dérivées. Considérons les fonctions $P_{h,k}(t)$ comme les éléments d'un tableau à double entrée dans lequel h indique la ligne et k la colonne. Dans le système $(\mathcal{K}_1)$, on peut fixer k; on a ainsi un système d'équations vérifié par les fonctions d'une même colonne. Le système $(\mathcal{K}_2)$ correspond au contraire à un groupement par lignes (18).

Dans le cas d'un système $\mathcal{S}_r$ sans états instantanés, les équations $(\mathcal{K}_1)$ et $(\mathcal{K}_2)$ sont toujours exactes et, jointes aux conditions initiales $P_{h,k}(+0) = \delta_{h,k}$, un quelconque de ces systèmes détermine parfaitement les $P_{h,k}(t)$. Dans le cas qui nous intéresse (systèmes $\mathcal{S}_\omega$ sans états instantanés), bien que nous ayons établi l'existence des $p'_{h,k}$ et la validité des conditions initiales $P_{h,k}(+0) = \delta_{h,k}$, la légitimité des dérivations effectuées n'est pas évidente. Cette question a été discutée par J. L. Doob [2]. Nous nous contenterons d'énoncer ses résultats : *l'existence des* $P'_{h,k}(t)$ *et la validité de* $(\mathcal{K}_1)$ *caractérisent les processus des deux premiers types; l'existence des* $P'_{h,k}(t)$ *et la validité de* $\mathcal{K}_2$ *caractérisent les processus pour lesquels* $H(t-0)$ *est presque sûrement bien défini sur tout l'axe des* t.

2° On peut être surpris, les systèmes $(\mathcal{K}_1)$ et $(\mathcal{K}_2)$ ayant l'aspect canonique,

(18) Rappelons que les rôles respectifs de ces deux systèmes apparaissent plus nettement encore si l'on étudie le problème général des processus markoviens (non nécessairement stationnaires). Alors, au lieu de $P_{h,k}(t-s)$, il faut écrire $P_{h,k}(s, t)$ (s, instant initial; t instant final). Les deux systèmes d'équations donnent alors respectivement les dérivées par rapport à s et par rapport à t.

que la solution du problème de Cauchy ne soit pas toujours bien déterminée. Cela prouve simplement que les théorèmes de Cauchy ne peuvent pas s'étendre sans précaution aux systèmes d'ordre infini. Il y a d'ailleurs à ce point de vue une différence importante entre les deux systèmes d'équations $(\mathcal{K}_1)$ et $(\mathcal{K}_2)$, provenant de ce que

$$\sum_j |p'_{h,j}| = \lambda_h(1 + p_h) \leq 2\lambda_h.$$

Donc, dans chaque équation de $(\mathcal{K}_1)$, la somme des coefficients est finie. Si, de plus, les λ_h ont une borne supérieure finie λ (ce qui implique que le processus étudié soit du type fini, donc $p'_h = 1$), la méthode de Cauchy s'applique sans difficulté et montre que toutes les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont représentables par des séries entières majorées par la série

$$e^{2\lambda t} = \sum_0^\infty \frac{(2\lambda t)^n}{n!}.$$

3° Supposons toujours $\lambda_h \leq \lambda < \infty$ et désignons par $P^{(n)}_{h,k}(t)$ la probabilité que, si $H(0) = h$, l'état A_k soit réalisé à l'instant t après n sauts. Dans le cas fini, on a toujours

$$P_{h,k}(t) = \sum_n^\infty P^{(n)}_{h,k}(t). \tag{II.7.1}$$

De plus, si $\lambda_h \leq \lambda < \infty$ et si le passage de A_h à A_k en n sauts est possible, il est presque évident que $P^{(n)}_{h,k}(t)$ est positif de zéro à l'infini et a, pour t infiniment petit, une valeur principale de la forme $c_{h,k}t^n$. Dans le cas contraire, $P^{(n)}_{h,k}(t)$ est constamment nul (sauf pour $t = 0$, si $n = 0$, $h = k$).

Par suite, *la formule* (II.7.1) *représente, pour t infiniment petit, un développement asymptotique du premier membre, dans lequel le* $(n+1)^{\text{ième}}$ *terme est* $c_{h,k}t^n + o(t^n)$. On remarque, en outre, que chaque fonction $P_{h,k}(t)$ est, ou bien constamment nulle, ou bien constamment positive. Nous ne faisons ici que mentionner ce théorème, sur lequel nous reviendrons au paragraphe II.8.

4° Si les λ_j ne sont pas bornés, les résultats précédents ne sont en général plus exacts. On peut toutefois faire une remarque sur la fonction

$$S^{(n)}_h(t) = \sum_k P^{(n)}_{h,k}(t)$$

qui est la probabilité que, si $H(0) = h$, il y ait exactement n sauts avant l'instant t. Un raisonnement analogue à celui fait plus haut (II.4.2°) à propos

du second saut montre que, dans le cas fini, s'il y a n sauts, la probabilité du $(n+1)^{\text{ième}}$ reste très petite pour t très petit, c'est-à-dire que

$$S_k^{(n+1)}(t) = o[S_k^{(n)}(t)] \qquad (t \to o).$$

Par suite, la formule

$$1 - e^{-\lambda_k t} = \sum_1^{\infty} S_k^{(n)}(t)$$

donne un développement asymptotique du premier membre, pour t infiniment petit. Ce résultat subsiste dans le cas transfini, à cela près qu'au second membre la série doit être transfiniment prolongée. Il ne subsiste pas, bien entendu, s'il peut exister des points (non connus à l'avance), pour lesquels $H(t+o)$ n'existe pas.

Il peut arriver que le résultat, vrai pour la somme $S_k^{(n)}(t)$, le soit pour chaque terme (c'est-à-dire que le développement (II.5.1) de $P_{h,k}(t)$ ait le caractère asymptotique déjà signalé dans le cas où $\lambda_h \leq \lambda < \infty$. Mais, comme nous l'avons dit, il n'en est pas toujours ainsi. En tout cas, dans un groupe cyclique, le développement considéré ne peut avoir un caractère asymptotique qu'en faisant abstraction des termes nuls. Il est facile de définir d'autres cas où ce caractère asymptotique n'existe pas. Il serait peut-être plus intéressant, à défaut de condition nécessaire et suffisante, de définir des cas aussi étendus que possibles où le développement considéré est sûrement un développement asymptotique.

II.8. Deux théorèmes sur les fonctions $P_{h,k}(t)$. — 1° Lemme II.8.1. — *Si le système peut passer de l'état A_h à l'état A_k, l'instant $T_1^{(k)}$ où il atteint A_k pour la première fois est une variable aléatoire absolument continue, à densité de probabilité positive de zéro à l'infini.*

L'état A_k ne pouvant pas être réalisé une infinité de fois en un temps fini, on peut numéroter les instants T_ν^k ($\nu = 1, 2, \ldots,$) de ses réalisations successives. Nous n'excluons pas le cas où $k = h$; alors T_1^k sera l'instant où le système revient pour la première fois à l'état A_h après l'avoir quitté. S'il n'y a pas ν réalisations de A_k, nous considérerons que $T_\nu^{(k)}$ est infini.

On a évidemment

$$T_1^{(k)} = \Sigma \mu_j S_j,$$

N_j désignant le nombre des réalisations de l'état A_j qui précèdent la première réalisation de A_k (donc $N_k = o$ si $k \neq h$ et 1 si $k = h$), et S_j étant la somme de N_j variables aléatoires indépendantes du type Γ défini au paragraphe II.1.

Le théorème est tout à fait analogue au théorème II.3.2; mais ici les N_j sont aléatoires.

Tout d'abord, l'état initial étant A_h, $T_1^{(k)}$ est la somme d'un premier terme $\mu_h U$ et d'une somme partielle non négative et indépendante de ce premier terme. Donc cette variable aléatoire dépend d'une loi absolument continue et à densité de probabilité positive depuis un certain minimum m jusqu'à l'infini. Il s'agit de montrer que $m = 0$, c'est-à-dire que, quel que soit $\tau > 0$, on a

$$\varphi(\tau) = \Pr\{T_1^{(k)} < \tau\} > 0.$$

Désignons par $\psi_\tau(N)$ la probabilité conditionnelle de la même inégalité quand on connaît les N_j. Par hypothèse, le système peut passer de A_h à A_k, c'est-à-dire qu'il y a une probabilité positive α que, partant de A_h, il prenne un chemin conduisant à A_k et dont la durée de parcours probable $\Sigma N_h \mu_h$ soit finie. Pour chacun de ces chemins, d'après le théorème II.3.2, $\psi_\tau(N) > 0$. Donc

$$\varphi(\tau) = E\{\psi_\tau(N)\} > 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° On peut faire une objection au raisonnement qui précède : l'expression $\psi_\tau(N)$ est-elle bien une variable aléatoire ? En d'autres termes, sa valeur probable n'est-elle pas l'intégrale d'une fonction non mesurable, c'est-à-dire une expression dépourvue de sens ?

Ce serait un progrès important, pour la théorie générale des processus stochastiques, de pouvoir arriver, à l'aide d'un théorème suffisamment général, à éviter d'avoir à examiner cette objection dans chaque cas particulier. Il semble que pour nos systèmes $\mathcal{S}_\omega$ sans états stationnaires, on ne risque pas de se trouver en présence de fonctions non mesurables. Plus généralement, dans la théorie des probabilités dénombrables, une fonction non aléatoire, déduite sans ambiguïté des données, donc *nommée*, est mesurable si l'on n'a pas introduit dans les données des fonctions non mesurables. Aussi ne reviendrons-nous pas dans la suite sur les objections de ce genre. Mais dans le cas qui nous occupe nous allons indiquer brièvement un raisonnement qui évite cette objection.

D'abord, en faisant abstraction des états d'indices $l > r$, on obtient un système $\mathcal{S}_r$ pour lequel il n'y a pas de difficulté. On en déduit, si h et k sont $\leq r$, que $\sum_0^r N_j \mu_j$ est une variable aléatoire; donc les séries infinies $\Sigma N_j \mu_j$ et $\Sigma \mu_j S_j$, dans les cas de probabilité α où toutes les deux sont convergentes, représentent aussi des variables aléatoires. On peut alors déterminer l de manière que

$$\Pr\left\{\sum_{l+1}^{\infty} \mu_j S_j > \frac{\tau}{2}\right\} < \frac{\alpha}{4},$$

puis c de manière que,

$$\Pr\{N_1\mu_1 + \ldots + N_l\mu_l > c\} < \frac{\alpha}{4}.$$

On aura alors

$$\Pr\left\{N_1\mu_1 + \ldots + N_l\mu_l \leq c,\ \sum_{l+1}^{\infty} \mu_j S_j \leq \frac{\tau}{2}\right\} > \frac{\alpha}{2}.$$

D'autre part, les termes $U_{j,\nu}$ qui interviennent dans les sommes S_1, S_2, ..., S_l sont indépendants de N_1, ..., N_l, S_{l+1}. S_{l+2} ...; il y a donc une probabilité positive β qu'ils soient tous inférieurs à $\frac{\tau}{2c}$, donc que

$$\mu_1 S_1 + \ldots + \mu_l S_l < \frac{\tau}{2c}(N_1\mu_1 + \ldots + N_l\mu_l).$$

Il vient donc finalement

$$\Pr\left\{\sum_1^\infty \mu_j S_j < \tau\right\} > \frac{\alpha\beta}{2} > 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3° Posons $\varphi(\tau) = \alpha F(\tau)$, de sorte que $F(t)$ est la fonction de répartition conditionnelle de $T_1^{(k)}$, relative au cas où $H(o) = h$ et où cette variable aléatoire existe (19). Désignons de même par β la probabilité de l'existence de $T_1^{(k)}$ si $H(o) = k$, et, par $G(t)$ la fonction de répartition de cette variable, si elle existe.

Plaçons-nous alors dans le cas où $H(t) = h$ et désignons par $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$, ..., les extrémités de gauche des intervalles correspondant aux réalisations successives de A_k. Toutes les différences $T_n^{(k)} - T_{n-1}^{(k)}$, sont indépendantes, et dépendent de la même loi, définie par $\beta G(t)$, de sorte que la probabilité de l'existence de $T_n^{(k)}$ est $\alpha\beta^{n-1}$ et, si cette variable existe, sa fonction de répartition est le produit de composition de *Volterra-Stieltjes*

$$F_n(t) = F(t) \star [G(t)]^{\star n-1} \quad (20).$$

Sous la même condition, la probabilité qu'une valeur donnée de t appartienne au $n^{\text{ième}}$ intervalle de réalisation de A_k est alors

$$\int_0^t e^{-\lambda_k t - u)} dF_n(u) = e^{-\lambda_k t} \star F(t) \star [G(t)]^{\star n-1}.$$

Si alors A_k est réalisé à l'instant t, t appartient à un des intervalles de réalisation, dont le rang n ne peut être que fini. On en déduit que, pour $k \neq h$

$$P_{h,k}(t) = \sum_1^\infty \alpha\beta^{n-1} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-u)} dF_n(u), \tag{II.8.1}$$

c'est-à-dire, symboliquement

$$P_{h,k}(t) = e^{-\lambda_k t} \star \alpha F(t) \star [1 - \beta G(t)]^{\star(-1)}, \tag{II.8.1'}$$

---

(19) Nous préférons mettre en évidence cette fonction $F(t)$ qui varie de zéro à un. Mais les formules seraient un peu plus simples en conservant la notation $\varphi(t)$.

(20) Nous définisons ce produit par la formule

$$F(t) \star G(t) = \int_0^t F(t-u)\,dG(u) = \int_0^t G(t-u)\,dF(u),$$

et nous utiliserons aussi la notation inspirée par celles de Volterra

$$[1 - \beta G(t)]^{\star(-1)} \equiv 1 + \sum \beta^n [G(t)]^{\star n}.$$

tandis que, si $h = k$, il faut tenir compte de l'intervalle initial, et il vient

$$\text{(II.8.2)} \qquad \begin{cases} P_{k,k}(t) = e^{-\lambda_k t} + \sum_1^\infty \beta^n \int_0^t e^{-\lambda_k (t-u)}\, d[G(u)]^{*n} \\ \qquad = e^{-\lambda_k t} + e^{-\lambda_k t} \star \beta G(t) \star [1 - \beta G(t)]^{*(-1)}. \end{cases}$$

Il nous a paru utile d'indiquer ces formules exactes. Pour la suite, il suffit de retenir que ces fonctions sont au moins égales à leurs premiers termes. Donc

$$\text{(II.8.3)} \qquad P_{h,h}(t) \geqq e^{-\lambda_h t},$$

et, si $k \neq h$,

$$\text{(II.8.4)} \qquad P_{h,k}(t) \geqq \alpha \int_0^t e^{-\lambda_k (t-u)}\, dF(u) \geqq \alpha\, e^{-\lambda_k t} F(t).$$

4° Théorème II.8.1. — *Chacune des fonctions* $P_{h,k}(t)$ *est, ou bien nulle de zéro* (inclus) *à l'infini, ou bien positive de zéro* (exclu, sauf si $h = k$) *à l'infini.*

Si en effet $k \neq h$ et $\alpha = 0$, le passage de A_h à A_k est impossible; $P_{h,k}(t)$ est toujours nul.

Si $\alpha > 0$, il résulte du lemme II.8.1 que $F(t)$ est positif pour tout $t > 0$ et, par suite de (II.8.4) que $P_{h,k}(t)$ est positif. $P_{h,h}(t)$ l'est aussi, d'après (II.8.3)

Nous verrons au chapitre III que ce théorème reste vrai pour le cinquième type et pour le sixième. Pour l'instant il n'est établi qne pour les systèmes sans états instantanés.

5° Théorème II.8.2. — *Même pour les systèmes à états instantanés, pourvu que les fonctions* $P_{h,k}(t)$ *soient mesurables, elles tendent, pour t infini, vers des limites* $P_{h,k}$.

Choisissons arbitrairement un nombre positif τ. La suite des $\Pi(n\tau)$ est une chaine stationnaire de Markoff. Il résulte alors du paragraphe I.5.7° que, pour n entier,

$$\text{(II.8.5)} \qquad P_{h,k}(n\tau) = P^{(1)}_{h,k}(n\tau) + P^{(2)}_{h,k}(n\tau).$$

le premier terme, considéré comme fonction de $t = n\tau$, étant une fonction périodique de période multiple de τ et le second tendant vers zéro pour n infini.

Utilisons maintenant un théorème de J. L. Doob [1], d'après lequel, si les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont toutes mesurables, elles sont continues pour tout $t > 0$. Il résulte d'ailleurs de son raisonnement que la continuité est uniforme dans tout intervalle (t_0, ∞) $(t_0 > 0)$ (21).

(21) Il en résulte aussi que son résultat s'applique à l'ensemble des fonctions correspondant à un

Utilisons, d'autre part, une idée de N. Kryloff et N. Bogoliouboff [1], en appliquant la formule de décomposition (II.8.5) pour deux valeurs τ' et τ'' de τ dont le rapport soit irrationnel; nous écrirons alors $P'^{(i)}$ et $P''^{(i)}$ $(i=1,2)$ au lieu de $P^{(i)}$. Nous pouvons choisir deux suites $\{t'_n\}$ et $\{t''_n\}$ de nombres indéfiniment croissants, respectivement multiples de τ' et τ'' et tels que $t'_n - t''_n$ tende vers zéro. Il en est alors de même de

$$P_{h,k}(t'_n) - P_{h,k}(t''_n), \quad P'^{(2)}_{h,k}(t'_n), \quad P''^{(2)}_{h,k}(t''_n),$$

et par suite de

$$P'^{(1)}_{h,k}(t'_n) - P''^{(1)}_{h,k}(t''_n),$$

ce qui n'est manifestement possible que si ces deux fonctions sont constantes et égales.

Il résulte alors de la formule (II.8.5) que, quel que soit τ, $P_{h,k}(n\tau)$ tend vers une constante $P_{h,k}$ indépendante de τ. La fonction $P_{h,k}(t)$ étant uniformément continue, tend vers la même constante quand t augmente indéfiniment d'une manière quelconque. C. Q. F. D.

II.9. — Propriétés presque sûres de $H(t)$. — On remarquera que ces propriétés vont être obtenues indépendamment de celles des fonctions $P_{h,k}(t)$ qui viennent d'être établies. Le point de départ est la notion bien claire de la probabilité $\alpha = \alpha_{h,k}$ que le système, partant de A_h, atteigne A_k en un temps fini $T_1^{(h,k)}$. Il n'est même pas nécessaire de savoir que $\alpha > 0$ entraîne $P_{h,k}(t) > 0$ dès que t dépasse la borne inférieure des valeurs possibles de $T_1^{(h,k)}$ [ce qui d'ailleurs se déduit bien simplement de (II.8.4)].

Cette probabilité étant définie, la notion de groupe et celles de groupe final, semi-final ou de passage se définissent exactement comme dans le cas des chaînes. La démonstration du théorème I.3.1 et la définition des groupes ergodiques subsistent aussi sans changement. Il en est de même du théorème I.3.2 de ses extensions (loi des écarts, loi du logarithme itéré), du retour aux probabilités de passage (§ I.4. 1°) qui montre simplement l'existence d'une limite en moyenne (ici, pour t infini), et de la distinction entre les groupes faiblement et fortement ergodiques, à cela près qu'il faut prendre comme point de départ, non le nombre probable c_h des réalisations d'un état A_h entre deux réalisations consécutives d'un état A_0 pris comme dénominateur commun, mais le temps probable $c_h\mu_h$ passé dans cet état. Le système sera fortement ergodique si la série $\Sigma c_h\mu_h$ est convergente et faiblement ergodique si elle est divergente. La série Σc_h elle-même ne peut d'ailleurs être convergente que dans le cas fini.

Plaçons-nous dans ce cas. La série Σc_h peut aussi bien être convergente que

même indice final, même si les autres ne sont pas mesurables. Rappelons d'ailleurs que, si λ_k est fini, la continuité de $P_{h,k}(t)$ est évidente. On a en effet

$$|P_{h,k}(t+\varepsilon) - P_{h,k}(t)| \leq 1 - e^{-\lambda_k \varepsilon}.$$

Si λ_k est fini, on déduit aisément le même résultat des remarques du II.6.2°.

divergente et, dans chacun de ces cas, on peut réaliser le cas voulu pour $\Sigma c_h \mu_h$ en choisissant convenablement les μ_h. Prenons par exemple $c_h = \frac{1}{h^2}$, $\mu_h = h$. La chaîne des indices H_n successivement réalisés sera fortement ergodique, et $\Pr\{H_n = k\}$ aura, pour n infini, si le groupe n'est pas cyclique, une limite positive indépendante de l'état initial. Mais le système restera plus longtemps dans les états d'indices élevés, et il en résultera qu'il deviendra faiblement ergodique et que $P_{h,k}(t)$ tend vers zéro pour t infini. Le contraire a lieu si l'on prend par exemple $c_h = \mu_h = \frac{1}{h}$ ([22]).

Considérons maintenant un processus qui ne soit pas du type fini et supposons, pour simplifier, le système réduit à un groupe ergodique unique. Le nombre probable total des changements d'états qui séparent deux réalisations consécutives de A_0 est alors nécessairement infini (puisque, dans des cas de probabilité positive, il y a au moins un point de discontinuité non isolé). La série Σc_h est donc toujours divergente. Mais la série $\Sigma c_h \mu_h$ est convergente ou divergente, suivant les cas. On peut aisément former des exemples de ces deux possibilités.

Attirons maintenant l'attention sur une circonstance spéciale relative au cas transfini : *l'extension de la notion de groupe liée au prolongement transfini de la chaîne des* H_n. Un exemple fera bien comprendre ce phénomène.

Supposons que les états A_h soient répartis en groupes de passage G_ν nécessairement parcourus dans l'ordre des ν croissants, le premier élément de chaque groupe étant imposé et la durée probable m_ν de la traversée de chaque G_ν étant finie. Si Σm_ν est fini, ν augmente indéfiniment en un temps fini; supposons qu'à ce moment il y ait une probabilité α_ν que le système revienne au premier état de G_ν, avec $\alpha_0 > 0$ et $\Sigma \alpha_\nu = 1$. Cette possibilité de retour à G_0 fait que maintenant tous les G_ν vont former un groupe unique, fortement ergodique.

D'une manière générale, il peut arriver que certains passages d'un état à un autre, qui ne sont pas possibles s'il n'y a qu'un nombre fini d'intermédiaires, le deviennent par le prolongement transfini de la chaîne des H_n et la définition des groupes se trouve modifiée en conséquence. Dans l'exemple précédent, et toutes les fois que, après un point d'accumulation de sauts, on ne peut que choisir le nouvel état (H_ω ou $H_{2\omega}$, . . ,) parmi les états antérieurs, et parcourir à nouveau la même suite d'états, toutes les différences $T_{n\omega} - T_{(n-1)\omega}$ auront la même valeur probable, et il est presque sûr que $T_{n\omega}$ augmente indéfiniment avec n. L'énumération transfinie des indices sera alors bornée à ω^2. Pour dépasser ω^2, il faut de nouveaux états toujours renouvelés; si l'on considère la

([22]) Nous hésitons à proposer de nouvelles définitions. Peut-être pourrait-on conserver pour les chaînes la terminologie du chapitre I, et, pour les systèmes *faiblement ergodiques dans le temps*, adopter l'expression de *systèmes dissipatifs* proposée par F. G. Foster [1], et déjà mentionnée plus haut (note du § I.3.4°).

suite des états fictifs réalisés aux instants $T_{n\omega}$, et dont chacun détermine la loi dont dépend le choix de $H(T_{n\omega}+o)$, certaines répétitions ne sont pas exclues; mais il faut que la fuite vers un nouvel infini soit possible; autrement dit, que l'ensemble de ces états fictifs ne constitue pas un groupe ergodique. Sous des conditions analogues les indices utilisés pour l'énumération des états successifs du système pourront atteindre et dépasser tous les nombres transfinis précédant le nombre transfini $\bar{\nu}$ qu'on aura choisi comme limite, qui peut être choisi arbitrairement dans la seconde classe. Il est en tout cas essentiel qu'aucun état ne soit réalisé une infinité de fois avant que ce nombre $\bar{\nu}$ soit atteint. Il dépendra alors du choix des μ_h que tous les indices précédant $\bar{\nu}$ soient atteints en un temps presque sûrement fini.

Remarquons que, quel que grand que soit ν, cela n'empêche pas que tous ces états peuvent former un groupe unique. Ce sera le cas, par exemple, si tous les états d'indices $\nu < \bar{\nu}$ se succèdent dans l'ordre des indices croissants, à cela près que chaque état A_ν donne une probabilité très faible α_ν au retour à A_0. Si la somme de tous les α_ν est finie, l'ensemble forme un groupe non ergodique; après un nombre plus ou moins grand de retours à A_0, la fuite vers $\bar{\nu}$ finira par se produire.

II.10. Exemples. — Les trois premiers exemples n'ont pas d'autre but que de rappeler des exemples concrets de types de processus bien connus depuis le Mémoire de J. L. Doob [2].

1° $\qquad p_{h,h+1}=1-\alpha_h, \qquad p_{h,0}=\alpha_h, \qquad \Sigma\alpha_h<\infty, \qquad \Sigma\mu_h<\infty.$

Alors le système atteint en un temps fini un état fictif A_ω, après lequel on définit par des coefficients $p_{\omega,h}$ un nouvel état initial. Si tous les α_h sont nuls (ce qui, si de plus $p_{\omega,0}=1$, donne l'exemple le plus simple de processus du type transfini), on a

$$E\{T_{2\omega}-T_\omega\}=\sum_0^\infty \mu_h \sum_0^h p_{\omega,k}.$$

2° $\qquad p_{h+1,h}=1-\alpha_h, \qquad \Sigma\alpha_h<\infty, \qquad \Sigma\mu_h<\infty,$

tous les autres $p_{h,k}$ sont nuls. A l'instant où le système quitte l'état A_h, il y a alors une probabilité α_h que $H(t+o)$ ne soit pas défini. Cela n'est possible que d'une seule manière : le passage à l'état fictif A_ω, à partir duquel les autres états seront parcourus dans l'ordre des indices décroissants, jusqu'au retour suivant à A_ω.

Remarques. — Le fait qu'il n'y ait qu'un chemin pour revenir de l'infini, donc qu'une manière d'échapper à ce que $H(t+o)$ ait une valeur déterminée, fait que le processus est bien défini par les $p_{h,k}$ et les λ_h. Il est facile de donner d'autres exemples de cette circonstance. En dehors des exemples de cette nature, ou du type fini, la donnée des λ_h et des $p_{h,k}$ ne suffit jamais à déterminer un processus.

Si $\Sigma\mu_h=\infty$, et au moins un $\alpha_h>0$, les données sont incompatibles. La seconde condition implique la possibilité du passage à un état fictif A_ω, d'où le système ne pourrait plus revenir en un temps fini. Il devrait être prévu comme état possible.

Si l'on modifie l'exemple précédent, en prenant par exemple $p_{h+2,h}=1-\alpha_h<1$, tous les

autres $p_{h,k}$ nuls, il y aurait deux chemins pour revenir de l'infini; il n'y a pas d'incompatibilité. Au contraire, une donnée supplémentaire est nécessaire, pour définir les conditions du choix entre ces deux chemins.

3° $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $p_{h,h-1} = 1$, tous les autres $p_{h,k}$ nuls; $\Sigma \mu_h < \infty$. $H(t)$ devient infini en un temps fini et passe instantanément de $+\infty$ à $-\infty$. A cet instant, on a un nouveau type de discontinuité; ni $H(t-0)$, ni $H(t+0)$, n'existent. On peut modifier cet exemple et rendre possible, soit le passage de $+\infty$ à une valeur finie, soit celui d'une valeur finie à $-\infty$. On peut ainsi réaliser toutes les combinaisons théoriquement prévisibles entre les divers types de singularités possibles pour $H(t)$.

4° *Exemple de processus du quatrième type.* — Établissons une correspondance biunivoque $r_h = f(h)$ entre les états A_h et les nombres rationnels r_h; $\mu_h = \varphi(r_h)$, $\varphi(r+1) = \varphi(r)$; $\varphi(r) = 0$ pour r irrationnel. Aux $r_h \geq r$ et $< r+1$ correspondent des μ_h de somme finie S. Enfin, les A_h se succèdent dans l'ordre des r_h croissants, la rapidité de l'évolution étant seule aléatoire. Alors $f[H(t)]$ est une fonction continue, non décroissante; à chaque r_h correspond un arrêt de durée probable μ_h; aucun temps d'arrêt n'est réservé à l'ensemble des nombres irrationnels. Ils correspondent à des points de discontinuité, pour chacun desquels ni $H(t-0)$, ni $H(t+0)$ n'existent, et qui forment, sur l'axe des t, un ensemble de mesure nulle.

Il y a dans cet exemple une sorte de périodicité moyenne. Le temps probable pour que $f[H(t)]$ augmente d'une unité est toujours S, et les écarts relatifs à prévoir sont d'autant plus faibles que le plus grand des $\frac{\mu_h}{S}$ est plus petit.

On pourrait ralentir le processus en réservant du temps aux valeurs irrationnelles, qui pourraient par exemple être parcourues avec une vitesse constante donnée. Le processus serait encore markovien et stationnaire. Mais on ne pourrait plus considérer comme fictifs les états correspondant aux valeurs irrationnelles de r; il ne s'agirait plus d'un système $\mathcal{S}_\omega$.

5° *Autre exemple.* — Cet exemple différera essentiellement du précédent, parce qu'un même état fictif A_ω sera réalisé une infinité non dénombrable de fois. Il est défini par

$$p_{h,h-1} = 1 - \alpha_h > 0, \qquad p_{h,\omega} = \alpha_h, \qquad p_{0,\omega} = 1, \qquad \Sigma \alpha_h = \infty \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

et de plus

$$(11.10.1) \qquad S = \sum_0^\infty \mu_h \varphi(h) < \infty \qquad \left[\varphi(h) = \frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_h)}\right],$$

[donc $\varphi(0) = 1$]. La divergence de $\Sigma \alpha_h$ semble exclure la possibilité pour le système de quitter l'état A_ω. Nous allons voir que, grâce à la dernière condition, il n'en est rien.

Faisant d'abord abstraction de toute considération métrique, plaçons sur l'axe des t des intervalles qui indiqueront l'ordre de succession des différents états, l'intervalle $I_h^{(\nu)}$ correspondant à la $\nu^{\text{ième}}$ réalisation de A_h après un intervalle

initial $I_0^{(n)}$. Nous pouvons placer d'abord les $I_0^{(\nu)}$, puis, par des interpolations successives, placer les $I_1^{(\nu)}$, puis les $I_2^{(\nu)}$, et ainsi de suite. Pour chaque indice h, nous commencerons par placer $I_h^{(1)}$ entre $I_0^{(n)}$ et I_{h-1}^{1}; puis nous effectuerons un tirage au sort pour savoir si cet intervalle $I_h^{(1)}$ doit être suivi par une réalisation de A_{h-1} ou par un retour à A_ω; dans ce dernier cas, I_h^{2} sera placé entre $I_h^{(1)}$ et $I_{h-1}^{(1)}$; dans le premier cas, il sera placé à droite de $I_{h-1}^{(1)}$ et éventuellement de tous les autres intervalles $(I_{h-2}^{(1)}, \ldots)$ qui précéderaient I_{h-1}^{2}, mais à gauche de ce dernier intervalle. Dans les deux cas, on procédera à un nouveau tirage au sort pour savoir si $I_h^{(2)}$ est immédiatement suivi d'un I_{h-1}^{2}, ou s'il faut placer d'abord $I_h^{(3)}$; et ainsi de suite. Si pour chacun de ces tirages au sort on donne respectivement à ces deux éventualités les probabilités $1-\alpha_h$ et α_h, et qu'on recommence pour toutes les valeurs de h rangées dans l'ordre naturel, il est bien clair qu'au point de vue de l'ordre de succession, on aura réalisé le schéma défini par les $p_{h,k}$. D'ailleurs, puisque $\Sigma\alpha_h = \infty$, donc $\varphi_1(\infty) = \infty$, deux intervalles $I_h^{(\nu)}$ et $I^{(\nu')}$ finiront toujours par être séparés par une infinité d'intervalles, de sorte que, si on ne laisse aucun vide entre les intervalles placés, l'axe des t sera constitué par des intervalles dans chacun desquels $H(t)$ ne peut que décroître, l'ensemble complémentaire E_ω étant un ensemble parfait discontinu.

Sans changer l'ordre ainsi obtenu, nous pouvons réaliser l'image moyenne de l'évolution qu'il définit en donnant à chaque intervalle $I_h^{(\nu)}$ la longueur μ_h, et à E_ω une mesure nulle, c'est-à-dire que l'origine de chaque $I_h^{(\nu)}$ aura exactement pour abscisse la longueur totale des intervalles analogues qui le précèdent. Il faut bien entendu que cette longueur totale soit finie. Cela résulte de ce que, entre les origines de $I_0^{(\nu)}$ et $I_0^{(\nu+1)}$, par exemple, il y a, outre le premier de ces intervalles, N_1 intervalles $I_1^{(\nu)}$, N_2 intervalles $I_2^{(\nu)}$, et ainsi de suite. Or, $E(N_h) = \varphi_1(h)$ (la vérification par récurrence est immédiate). La distance qui sépare les deux points considérés a donc pour valeur probable l'expression (II.10.1), que nous avons supposé finie. Elle est donc elle-même finie.

Naturellement, ce que nous venons de définir n'est que l'image moyenne de l'évolution. Il reste à faire les expériences qui détermineront les durées $\mu_h U_h^{(\nu)}$ des séjours représentés sur cette image moyenne par les intervalles $I_h^{(\nu)}$. Mais la conclusion qui précède subsiste pour le mouvement réel (d'après le théorème II.3.1). Nous avons donc bien défini un processus pour lequel l'état A_ω est réalisé pour les points d'un ensemble E_ω parfait discontinu, et de mesure nulle.

6° *Remarques.* — Considérant toujours l'exemple précédent, nous pouvons définir sur E_ω un paramètre τ continu et constamment croissant. Si en effet N_h' désigne le nombre des $I_h^{(\nu)}$ compris entre deux points donnés t_1 et t_2 de l'axe des temps, on déduit aisément de la loi forte des grands nombres que $\frac{N_h'}{\varphi_1(h)}$ a presque sûrement, pour h infini, une limite positive; c'est cette limite qui sera

la variation $\tau_2 - \tau_1$ de τ entre ces deux points. La durée de parcours de ces N'_h intervalles étant d'ailleurs pour h infini un infiniment petit presque sûrement équivalent à $N'_h \mu_h$, donc à $(\tau_2 - \tau_1)\mu_h \varphi(h)$, on peut dire que cette variation de τ mesure le temps consacré, à l'intérieur de l'intervalle (t_1, t_2), aux états d'indices élevés.

Cette définition de τ ayant un caractère stationnaire, il est bien clair que, si l'on prend τ comme variable, le processus reste markovien et stationnaire; $t = X(\tau)$ est alors une fonction aléatoire constamment croissante, ne croissant que par sauts, dépendant d'un processus additif et stationnaire. C'est un type de processus bien connu. On sait qu'il peut être défini par une formule du type

$$\log E\{e^{iz X(\tau)}\} = \tau \int_0^\infty (e^{izu} - 1)\, dF(u), \tag{II.10.2}$$

la fonction $F(u)$ étant non décroissante, et infinie négative pour $u = 0$.

Une formule analogue, mais avec une autre fonction $F(u)$, s'applique aussi à l'image moyenne du mouvement.

Remarquons d'autre part que si, au lieu de $t = X(\tau)$, on prend $t = c\tau + X(\tau)$, l'ensemble E_ω sera maintenant de mesure positive; A_ω ne sera plus un état fictif et le processus devra être rattaché au cinquième type.

Ces remarques sont susceptibles de généralisation. Toutes les fois qu'il existe un état instantané A_ω susceptible d'être réalisé sur un ensemble parfait discontinu, on peut définir sur cet ensemble un paramètre τ, et le temps $X(\tau)$ consacré aux états autres que A_ω est une fonction aléatoire du type (II.10.2). Posant alors $t = c\tau + X(\tau)$, on obtient une famille de processus associés, dont un seul (obtenu pour $c = 0$) est du quatrième type; les autres sont du cinquième type.

Nous reviendrons plus loin, à propos des processus du cinquième type, sur les processus du quatrième type ayant au plus une infinité dénombrable d'états fictifs. Par contre si, comme dans l'exemple du 4° ci-dessus, il y a une infinité non dénombrable d'états fictifs, réalisés dans leur ensemble sur un ensemble parfait discontinu E, et si chacun d'eux est réalisé au plus une infinité dénombrable de fois, E doit être de mesure nulle, et le processus ne peut pas être associé à des processus du cinquième type. On peut encore définir sur E un paramètre τ, et étudier $t = X(\tau)$ en fonction de τ. Mais le caractère stationnaire des accroissements de $X(\tau)$ disparaît et, si dans l'exemple rappelé ci-dessus le caractère additif se conserve, il n'en sera pas toujours ainsi, car on ne saura pas toujours à l'avance quel état fictif associer à une valeur donnée de τ.

II.11. Esquisse d'une théorie générale des états fictifs. — Les remarques qui suivent ne sont qu'une esquisse, au cours de laquelle nous ferons quelques hypothèses qui semblent raisonnables, sans démontrer (ce dont nous pouvons seulement dire que cela nous semble exact) qu'elles résultent nécessairement

de celles sur lesquelles repose la définition des processus markoviens. Tout d'abord, nous admettrons qu'on peut raisonner sur un état fictif comme sur un état réellement possible. En d'autres termes si, à un certain instant t, $H(t-0)$[ou $H(t+0)$] n'a pas une valeur bien définie, nous considérerons que le système est à l'instant $t-0$ (ou $t+0$) dans un état fictif A_η (ou A_ζ), et qu'on peut parler des fonctions $P_{\eta,k}(t)$ et $P_{\zeta,k}(t)$ aussi bien que des fonctions $P_{h,k}(t)$. Alors η est une fonction non aléatoire du passé immédiat; sa connaissance résume tout ce qui reste du passé. Une expérience faite à l'instant t lui-même définit le passage de η à ζ, et la connaissance de ζ définit les conditions initiales de l'évolution ultérieure. Ainsi, il y a une transition en trois étapes (passages du passé à η, de η à ζ, de ζ à l'avenir) et, en précisant les lois de ces passages, on peut à première vue espérer compléter les renseignements déduits des $p_{h,k}$ et des λ_h et obtenir dans tous les cas une définition infinitésimale du processus. *A priori* cela n'est pas absurde, puisque, quelque petit que soit $\tau > 0$, la connaissance de tous les $P_{h,k}(t)$ pour $0 < t < \tau$ suffit à définir le processus. Mais on n'arrive pas à des résultats aussi simples et précis que dans le cas fini, où la donnée des $p_{h,k}$ et des λ_h est suffisante.

Occupons-nous d'abord de la première étape : le passage du passé à la valeur η de $H(t-0)$. En raison du caractère markovien du processus, il suffit de connaître, par exemple, la suite des $H(t-\frac{1}{n})$; la connaissance de chacun de ces nombres rend inutile la connaissance de ceux qui les précèdent. On peut grouper les suites possibles en classes, deux suites appartenant à une même classe si et seulement si elles coïncident à partir d'un certain moment; η a nécessairement la même valeur pour toutes les suites d'une même classe.

Mais ce n'est pas une fonction quelconque des classes ainsi définies. Nous admettrons qu'elle a nécessairement le caractère de fonction P-mesurable (la lettre P indiquant que la mesure est la probabilité de la réalisation des suites considérées). Des propriétés connues des fonctions mesurables résultent alors quelques conséquences importantes qu'un exemple fera bien comprendre.

Supposons que chaque état A_h ait deux formes possibles A'_h et A''_h, de même durée probable μ_h; $\Sigma\mu_h < \infty$ et $p_{h,h+1} = 1$, de sorte que $h = H(t)$ devient infini en un temps fini; quand le système passe de A_h à A_{h+1}, l'indice supérieur a une probabilité α_h de varier. Si alors $\Sigma\alpha_h < \infty$, cet indice a presque sûrement une valeur finale déterminée et l'on peut distinguer deux états fictifs A'_ω et A''_ω. Si $\Sigma\alpha_h(1-\alpha_h) < \infty$, on est aisément ramené au cas précédent. Mais si $\Sigma\alpha_h(1-\alpha_h) = \infty$, une fonction mesurable de la suite des indices ne peut être qu'une constante, et il n'est plus possible de distinguer deux états fictifs A'_ω et A''_ω. Cela est d'ailleurs lié au fait que les indices associés à deux valeurs de h suffisamment éloignées l'une de l'autre sont presque indépendants. Donc, quelque grand que soit h, l'indice supérieur associé à A_h finira par être oublié. Il ne reste alors aucun souvenir du passé permettant, à l'instant où $H(t)$ devient infini, de

distinguer deux états fictifs. Bien entendu, ce dernier raisonnement ne devient rigoureux qu'en vertu de l'hypothèse de mesurabilité indiquée ci-dessus.

D'une manière générale, on déduit de cette hypothèse que la durée accidentellement plus ou moins grande du séjour dans ses états successifs ne peut avoir aucune influence. On peut alors faire abstraction des valeurs effectives de t et ne tenir compte que du *temps moyen* u nécessaire à l'évolution considérée. Si alors on pose $H(t) = K(u)$, η apparaîtra comme une fonction de la suite des $K\left(u - \frac{1}{n}\right)$ (ou d'autres suites analogues, $\frac{1}{n}$ pouvant être remplacé par une autre fonction de n qui tende vers zéro). On est ainsi conduit à considérer l'espace des A_η comme une *fermeture à droite* de l'espace des A_h, dans une topologie où un état A_k serait considéré comme *voisin de* A_h *et à sa droite* si le système peut passer de A_h à A_k en un *temps moyen* très petit, donc en un temps réel très petit en probabilité. De même, l'espace des A_ζ serait une fermeture à gauche.

L'élimination du temps réel pour la définition de A_η n'épuise pas les conséquences du caractère mesurable de η. Il faut que η soit une fonction P-mesurable de la suite des $K\left(u - \frac{1}{n}\right)$. La détermination de cette suite comporte en général un certain nombre de choix, donc de bifurcations. Si ces choix sont rendus définitifs par l'exclusion de toute communication entre les différents chemins possibles, ou si du moins ces communications sont assez peu probables pour que le choix relatif à chaque $K\left(u - \frac{1}{n}\right)$ ait une influence ne tendant pas vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$ sur les probabilités relatives à $K\left(u - \frac{1}{\nu}\right)$ ([23]), il peut y avoir plusieurs états fictifs; il peut même y en avoir une infinité non dénombrable. Si, au contraire, cette influence tend vers zéro, il ne peut y avoir qu'un état fictif.

Des remarques analogues, avec naturellement quelques différences dues au fait que les processus considérés ne sont en général pas réversibles, s'appliquent à l'ensemble des A_ζ. Il s'agit ensuite de définir, dans cet espace, une loi de probabilité qui dépende de η, la seule restriction étant l'exclusion des fonctions non mesurables. Tout cela ne semble pas permettre une définition constructive générale et simple, comparable à celle relative au cas fini. Faisons seulement quelques remarques.

2° Donnons d'abord un nouvel exemple de cas où l'ensemble des A_η n'est

([23]) Nous entendons par là que, F désignant un ensemble quelconque d'états A_h,

$$\operatorname*{Max}_{h,h',F}\left|P\left\{K\left(u-\frac{1}{\nu}\right)\in F/K\left(u-\frac{1}{n}\right)=h\right\}-P\left\{K\left(u-\frac{1}{\nu}\right)\in F/K\left(u-\frac{1}{n}\right)=h'\right\}\right|$$

ne tend pas vers zéro.

pas dénombrable; mais au lieu que ces états soient tous réalisés dans un ordre déterminé, il n'y aura que des réalisations isolées dont chacune comporte un choix ([24]).

Considérons à cet effet un ensemble d'états $A_{h,r}$ (h entier, r rationnel); $h = H(t)$ suivra le processus simple défini par $p_{h,h+1} = 1$, $\Sigma \mu_h < \infty$. A chaque variation de h, r_h augmentera d'une quantité rationnelle ε_h; les ε_h seront indépendants, et la série $\Sigma \varepsilon_h$ presque sûrement convergente, sa somme dépendant d'une loi continue (on peut, par exemple, prendre $\varepsilon_h = \pm \frac{1}{h}$; les valeurs possibles de la somme varient alors de $-\infty$ à $+\infty$). Il y a alors une infinité non dénombrable d'états fictifs $A_{\tau} = A_{\omega,R}$, R étant un nombre réel quelconque.

On peut faire une hypothèse analogue pour le retour de l'infini. Le système reviendrait de $A_{-\omega,R'}$ (R' étant choisi d'après une loi fonction de R; la plus simple est sans doute $R' = R$; dans ce cas il n'y a pas lieu de distinguer A_{τ} et $A_{\tau'}$). Mais on peut aussi supposer qu'à chaque h négatif ne corresponde qu'un état A_{-h}, le second indice n'intervenant que si $h \geq 0$. Alors il n'y a qu'un $A_{\tau'}$ et, bien qu'il y ait une infinité de A_{τ} possibles, il devient inutile de les distinguer. On peut aussi supprimer les indices h négatifs et se donner, pour le choix de l'état $A_{0,r}$ qui succédera à $A_{\omega,R}$, une loi qui dépende de R d'une manière quelconque. On voit ainsi qu'un processus de type transfini peut comporter l'existence d'une infinité non dénombrable d'états fictifs A_{τ}, et la nécessité d'introduire pour sa définition des coefficients $p_{R,h,r}$ qui dépendent du paramètre continu R.

3° Dans le cas transfini, on peut numéroter les points de discontinuité et parler de $H(T_{\omega} - 0)$, $H(T_{2\omega} - 0)$ ou $H(T_{\omega^2} - 0)$, par exemple, comme de variables aléatoires ayant chacune une certaine loi de probabilité dans l'espace des A_{τ}. La même remarque s'applique si, comme dans l'exemple précédent, on peut numéroter les points de discontinuité autres que des sauts. Mais dans d'autres cas, et notamment dans tous ceux du quatrième type, cette numérotation n'est pas possible. On ne peut donc qu'introduire *a priori*, comme nous l'avons fait, la notion d'un état fictif défini par la succession de ceux qui le précèdent ou par une suite partielle extraite de cette succession.

4° Terminons ces remarques en indiquant la relation évidente entre les états A_{τ} et les fonctions $P_{h,k}(t)$. Compte tenu toujours du caractère mesurable de τ_1 et de $\mu_k > 0$, on a

$$P_{\tau_1,k}(t) = \lim_{n \to \infty} P_{h_n,k}(t).$$

([24]) Remarquons d'ailleurs qu'on peut modifier l'exemple II.10.4° en introduisant des sauts dans la variation de r; ils peuvent être vers la droite ou vers la gauche et leur probabilité peut être répartie comme on veut entre les r_h rationnels et les valeurs irrationnelles de r.

$\{h_n\}$ désignant les indices d'une suite d'états dont A_{η_i} est la limite à droite (au sens de la topologie définie au 1°) et

$$P_{\eta_i,k} = \lim_{t \to 0} P_{\eta_i,k}(t).$$

Si l'on pose alors $p_{\eta_i} = \Sigma p_{\eta_i,k}$, on peut caractériser le cas transfini par l'ensemble des conditions

$$p_h = 1, \qquad p_\eta = 1.$$

pour tous les indices d'états réels ou fictifs. Ces formules montrent bien que cela a un sens de parler des probabilités évaluées à l'instant où un état fictif est réalisé, et qu'il y avait intérêt à se rendre compte des difficultés que présente l'étude directe des états fictifs et la définition des processus par leur intermédiaire.

CHAPITRE III.

Systèmes a états instantanés.

III. 1. Un lemme de la théorie des ensembles (lemme de Baire). — *Si la réunion d'au plus une infinité dénombrable d'ensembles* E_n *recouvre entièrement un ensemble compact* $\mathcal{E}$, *on peut trouver au moins un* E_n *et un ensemble ouvert* $\mathcal{O}_n$ *intérieur à* $\mathcal{E}$, *tel que la fermeture* $\overline{E}_n$ *de* E_n *recouvre* $\mathcal{O}_n$.

Si, en effet, $\overline{E}_1$ ne recouvre pas $\mathcal{E}$, on peut trouver dans $\mathcal{E}$ un ensemble ouvert E'_1 dont la fermeture soit extérieure à $\overline{E}_1$. Si E'_1 n'est pas recouvert par $\overline{E}_2$, on peut y trouver un ensemble ouvert E'_2 dont la fermeture soit extérieure à $\overline{E}_2$; et ainsi de suite. Tous les E'_n ont au moins un point commun, qui n'appartient ainsi à aucun $\overline{E}_n$, donc à aucun E_n. Cela est en contradiction avec l'hypothèse que tout point de $\mathcal{E}$ soit recouvert par au moins un E_n. Cette hypothèse implique donc que, pour au moins un n, E'_{n-1} soit recouvert par $\overline{E}_n$ et puisse être pris pour $\mathcal{O}_n$, C. Q. F. D.

Corollaire. — *La réunion des ensembles tels que* $\mathcal{O}_n$ *est partout dense dans* $\mathcal{E}$ (cela résulte évidemment de ce que le lemme s'applique à tout ensemble compact intérieure à $\mathcal{E}$).

Dans la suite, ce lemme ne sera appliqué qu'au cas où $\mathcal{E}$ est un segment de l'axe des t.

III. 2. Processus du cinquième type. — 1° D'après la définition de ce type les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont mesurables et il existe au moins un état instantané A_h qui

peut être réalisé sur un ensemble E_h de mesure positive. Supposons d'abord qu'il n'y en ait qu'un, soit A_0. Soit τ la mesure de la partie de E intérieure à $(0, t)$. On sait que, sauf sur un ensemble de mesure nulle, la dérivée $\frac{d\tau}{dt}$ existe et est égale à un sur E_0 et est nulle en dehors de E_0. En ne considérant que la dérivée à droite, cela veut dire que, sauf pour un ensemble e_0 de mesure nulle, un point t choisi sur E_0 a la propriété suivante : la mesure de la portion de E_0 intérieure $(t, t+u)$ est, quand u tend vers zéro, de la forme $u - o(u)$.

Or la valeur probable de cette mesure est

$$\int_0^u P_{0,0}(t)\, dt.$$

Donc $P_{0,0}(t)$ tend en moyenne vers 1 quand t tend vers zéro. D'après un théorème de J. L. Doob [1] déjà rappelé plus haut, si les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont mesurables, elles sont continues pour tout t positif. Si elles le sont aussi pour $t = 0$, il résulte de la remarque précédente que $P_{0,0}(+0) = 1$. Il y a lieu de se demander si cette conclusion n'est pas toujours exacte pour le cinquième type.

2° Montrons maintenant que : E_0 *est un ensemble parfait discontinu et* τ *croît constamment sur cet ensemble.*

Observons à cet effet que, si E_0 est connu jusqu'à un certain point t (par exemple celui où τ atteint pour la première fois une valeur donnée), la probabilité que ce point appartienne à e_0 est nulle. De même, la probabilité qu'un intervalle donné comprenne des points de E_0 et que tous ces points appartiennent à e_0, est nulle. Il est, par suite, aussi presque impossible que, parmi l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles, il y en ait un seul qui ait cette propriété. Donc la portion de E_0 intérieure à un intervalle (ouvert) quelconque, est, soit vide, soit de mesure positive (puisqu'il en est ainsi s'il y a un point de E_0 n'appartenant pas à e_0). En d'autres termes encore, τ est constamment croissant sur E_0.

La fermeture $\bar{E}_0$ de E_0 est donc un ensemble parfait discontinu, et E_0 ne peut différer de $\bar{E}_0$ que par un ensemble de mesure nulle. Rien n'empêche sans doute d'imaginer un état instantané A'_0 qui serait réalisé sur un ensemble de mesure nulle, E'_0, sous-ensemble de $\bar{E}_0$. Mais ce serait un état fictif, qui n'aurait aucune chance d'être réalisé pour une valeur donnée de t. Il n'y a aucune raison de l'introduire. Il n'est donc pas nécessaire de distinguer E_0 et E_0, ce qui achève la démonstration du résultat énoncé.

3° Désignons par $\theta = t - \tau = X(\tau)$ la longueur totale des intervalles extérieurs à E_0 compris entre les points 0 et τ de cet ensemble. Dans ce qui suit, nous pouvons indifféremment raisonner sur θ, ou bien sur sa valeur moyenne $\bar{\theta} = \bar{X}(\tau)$ (durée probable de la succession d'états dont θ est la durée réelle;

elle reste aléatoire puisqu'on ne sait pas à l'avance quels seront ces états). Ces fonctions sont manifestement additives, à accroissements stationnaires [c'est-à-dire que la loi dont dépend $X(\tau+c)-X(\tau)$ ne dépend que de c], et constamment croissantes. Comme nous l'avons dit plus haut, on a alors

$$\log E\{e^{izX_\tau}\}=\tau\int_0^\infty (e^{izu}-1)\,dN(u),$$

$N(u)$ désignant une fonction non décroissante, telle que

$$N(0)=-\infty, \qquad \int_0^\infty \frac{u}{1+u}\,dN(u)<\infty.$$

Comme elle n'est définie qu'à une constante près, on peut supposer $N(\infty)=0$; $c\,|N(u)|$ est alors le nombre probable des sauts supérieurs à u sur un segment de longueur c de l'axe des τ: c'est-à-dire des intervalles extérieurs à E_0 et de longueurs $>u$ entre deux points τ et $\tau+c$ de E_0. Leur nombre réel est évidemment une variable de Poisson; sa loi est bien définie par cette valeur probable.

Les mêmes résultats s'appliquent évidemment à $\bar{\theta}=X(t)$, $N(u)$ devant seulement être remplacé par une autre fonction $\bar{N}(u)$. Il y a d'ailleurs une différence importante entre les deux représentations analogues ainsi obtenues. La durée réelle du parcours d'une succession d'états étant une variable aléatoire continue (et cela est vrai même si cette succession est elle-même aléatoire), la fonction $N(u)$ est continue. La fonction $\bar{N}(u)$, au contraire, peut être continue ou discontinue.

Ainsi, considérons l'exemple du II.10.5°, modifié d'après une remarque du 6°; en prenant $t=\tau+X(\tau)$, on a bien un processus du cinquième type. Dans ce cas les sauts possibles de $X(\tau)$, donc les discontinuités de $\bar{N}(u)$, sont les nombres $u_h=\sum_0^h p_k\ (h=0,1,\dots)$ et, dans chaque intervalle, (u_h, u_{h+1}) $N(u)$ est constant. Si l'on modifie les $p_{h,k}$, en prenant par exemple $p_{h,h-1}=p_{h,h-2}=\frac{1-\alpha_h}{2}$, (pour $h>1$), et les autres sans changement, les sommes ci-dessus seront remplacées par des sommes partielles ayant une infinité non dénombrable de valeurs possibles; la fonction $\bar{N}(u)$ sera alors continue, mais sa nature peut encore dépendre du choix des $p_{h,k}$. Si, par exemple, $p_{h,k}=\frac{1}{(h+1)^2}$, elle est absolument continue, si, au contraire, $p_{h,k}$ tend vers zéro rapidement $\left(\text{par exemple } p_{h,k}=q_h \text{ avec } q<\frac{1}{2}\right)$, elle ne varie que sur un ensemble parfait discontinu, de mesure nulle).

4° D'après la loi forte des grands nombres, le nombre des sauts de $X(\tau)$ [ou

de $X(\tau)]$ supérieurs à un nombre très petit η_1 (aussi bien que la somme des sauts inférieurs à η_1) est presque sûrement asymptotiquement proportionnel à la variation de τ, et, comme nous l'avons vu à propos d'un exemple (II.10.6°), on peut, en connaissant seulement la suite des sauts de $X(\tau)$, retrouver τ, à un facteur constant près. En prenant alors $t = c\tau + X(\tau)$ $(c \geq 0)$, on a une infinité de processus du cinquième type et un seul du quatrième type (pour $c = 0$).

On peut ainsi considérer qu'on a obtenu une définition constructive pour le processus le plus général du quatrième ou du cinquième type, n'ayant qu'un seul état instantané A_0 (donc l'ensemble des discontinuités est la réunion de E_0 et d'un ensemble dénombrable). En effet, dans chacun des intervalles n'appartenant pas à E_0, le processus se réduit à un processus d'un type antérieurement étudié.

Il faudrait d'ailleurs, pour que le problème d'une définition constructive apparaisse comme définitivement résolu, résoudre deux problèmes accessoires, que nous ne faisons que mentionner ici :

a. Définir pour $N(u)$ et pour $\overline{N}(u)$ le champ des fonctions possibles :

b. Le choix d'une de ces fonctions restreignant l'ensemble des processus possibles, même si l'on avait obtenu pour les trois premiers types une définition constructive maniable, il resterait à choisir parmi eux ceux qui peuvent être associés à une fonction $N(u)$ [ou $\overline{N}(u)$] donnés. En outre, pour la construction effective de $H(t)$ dans chacun des intervalles extérieur à E_0, on se trouvera en présence d'un problème de probabilité conditionnelle, puisqu'on connaît à l'avance la longueur réelle de cet intervalle [ou la variation correspondante de $\overline{X}(\tau)$] ([25]).

5° Supposons maintenant qu'il y ait plusieurs états instantanés, ou même une infinité, nécessairement dénombrable. Dans ces conditions, d'après le lemme de Baire (paragraphe III.1), il est impossible que la réunion de l'ensemble de mesure nulle qui correspond aux états fictifs et des ensembles parfaits discontinus E_{τ_i} qui correspondent à ces états instantanés remplisse un intervalle. Il faut donc qu'en plus des états instantanés A_τ il y ait des états stables A_n, et que l'ensemble des E_n soit partout dense sur l'axe des t. Il est même évident qu'il faut une infinité d'états stables (un même état ne peut, en effet, être réalisé qu'un nombre fini de fois en un temps fini. Or il doit y avoir une infinité d'intervalles correspondant chacun à un état stable).

Dans chacun des intervalles extérieurs aux E_{τ_i}, on se trouvera dans les mêmes conditions que s'il n'y a qu'un état instantané. D'autre part, en ce qui concerne

([25]) Ce dernier problème semble plus simple que le précédent. Il l'est au moins dans le cas où, comme dans l'exemple du paragraphe II.10.5°, une valeur donnée de la variation de $\overline{X}(\tau)$ dans un de ces intervalles ne peut être réalisée que d'une seule manière.

l'ordre de succession des A_η, on n'a qu'à appliquer exactement ce qui a été dit pour les processus des trois premiers types. Ainsi, s'il n'y a que deux ensembles E_η, on peut, comme nous l'avons expliqué, choisir sur ces ensembles des paramètres τ et τ' (qui pourront être leurs mesures réelles si ces mesures ne sont pas nulles), et la probabilité du passage d'un des états considérés à l'autre pendant un intervalle correspondant à une variation $d\tau$ ou $d\tau'$ sera de la forme $\lambda\, d\tau$ ou $\lambda'\, d\tau'$, λ ne pouvant ici être infini. De même, s'il y a plus de deux états instantanés, le choix des paramètres τ permet de ramener l'étude de leur ordre de succession à celle d'un processus sans états instantanés.

Naturellement, comme nous l'avons déjà observé, l'étude des processus du quatrième type à une infinité dénombrable d'états fictifs ne rentre pas dans le cadre de la construction qui vient d'être définie.

III. 3. Processus du sixième type. — 1° Ils sont caractérisés par le fait que, les fonctions $P_{h,k}(t)$ étant encore mesurables, un au moins des E_h peut ne pas l'être. La réunion des ensembles disjoints E_h étant mesurable, il y en a alors au deux moins qui ne le sont pas.

Nous avons déjà rappelé l'exemple trivial $P_{h,k}(t) = P_k$ (indépendant de h et t). Il y a dans ce cas indépendance complète des différentes valeurs de $H(t)$, donc absence complète de toute continuité. Il est en particulier presque sûr que $H(t)$ n'est pas mesurable.

Attirons à ce sujet l'attention sur le fait suivant : une probabilité nulle est l'inverse d'une puissance. Si l'on choisit un nombre X au hasard entre zéro et un (la répartition étant uniforme), la probabilité de trouver exactement une valeur donnée est nulle; c'est ici l'inverse de la puissance du continu. Si l'on répète cette expérience de manière à considérer une fonction aléatoire $X(t)$ dont toutes les déterminations sont indépendantes, on ne peut pas dire que la probabilité que $X(t)$ prenne exactement au moins une fois une valeur donnée est encore nulle; on ne peut pas non plus dire qu'elle soit positive. C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ à laquelle il est absolument possible d'attribuer une signification ([26]).

Introduisons maintenant un second paramètre u; tous les $X(t, u)$ étant indépendants, demandons-nous quelle est la probabilité pour que, pour au moins un u, $X(t, u)$ se réduise à une fonction donnée de t. C'est encore une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$; mais ici nous avons au numérateur la puissance du continu et au dénominateur une puissance supérieure et il semble qu'on puisse considérer cette probabilité comme nulle.

Si l'on admet ce genre de raisonnement, on peut montrer qu'il est encore plus impossible de trouver pour $H(t)$ une fonction continue (ou même mesurable) que de trouver exactement un nombre donné par le choix au hasard de ses décimales.

2° L'exemple trivial du 1° se généralise aisément de la manière suivante : on

([26]) Les contradictions auxquelles on arrive en cherchant à lui donner une signification sont identiques à celles dont M. Émile Borel rend l'axiome de Zermelo responsable. Pour nous, elles viennent de ce qu'on cherche à mesurer des ensembles non mesurables.

considère un système d'états possibles dépendant de deux indices h et l; pour chaque valeur de h, l a un certain nombre n_h (fini ou infini) de valeurs possibles; un au moins des n_h est >1. La variation du premier indice dépend d'un processus d'un des cinq premiers types; pour chaque h, la variation de l dépend d'un processus du type défini au 1° ci-dessus.

Les probabilités de passage de $(h, l_0$ à $k, l)$ sont alors de la forme

$$P_{h,k}(t)P'_{k,l}$$

(l_0 n'intervenant pas). On remarque que, si $h=k$ et $n_h>1$, elle tend, pour $t=0$, vers la limite $P'_{k,l}$, nécessairement >0 et <1).

Considérons un des h pour lesquels $n_h>1$. Si A_h (en faisant abstraction du second indice), est un état stable, les $E_{h,l}$ ne sont pas mesurables, et leur réunion E_h est une réunion d'intervalles. Si A_h est un état instantané (la variation de h dépendant donc d'un processus du cinquième type), les ensembles non mesurables $E_{h,l}$ forment par leur réunion un ensemble parfait discontinu de mesure positive. L'ensemble des points de discontinuité peut donc comprendre des intervalles, mais n'en comprend pas nécessairement.

3° Nous allons maintenant démontrer que :

Théorème III.3. — *Il n'y a pas d'autres processus du sixième type que ceux formés au* 2°.

Lemme. — *S'il y a un état* A_0 *instantané et presque sûrement réalisé pour les points d'un ensemble* E_0 *partout dense sur l'axe des t, le processus est du type trivial* $P_{h,k}(t)=P_k$ (il est entendu que nous supposons toujours les fonctions $P_{h,k}(t)$ mesurables, donc continues).

Pour simplifier la démonstration, nous admettrons l'axiome du choix sous la forme suivante : l'ensemble E_0 étant partout dense, nous pouvons, dans n'importe quel petit intervalle (t_0-a, t_0), choisir un point t' de E_0 et la connaissance de la relation $H(t')=0$ ne modifie pas les probabilités relatives à $H(t)$ pour $t>t'$ ([27]).

L'existence de t' étant presque sûre, on a, pour $t>\varepsilon$, $t_0=t-\varepsilon$ et $a<t_0$,

$$P_{h,k}(t)=P_{0,k}(t-t').$$

Or la fonction $P_{0,k}$ est continue. On a donc

$$P_{h,k}(t)=\lim_{a\to 0} P_{0,k}(t-t')=P_{0,k}(t-t_0)=P_{0,k}(\varepsilon).$$

Comme ε est arbitrairement petit, $P_{h,k}(t)$ est bien indépendant de h et de t.

([27]) Pour rendre ce raisonnement indépendant de l'axiome de Zermelo, il suffirait de démontrer que la suite des points $t_0-\frac{a}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ contient presque sûrement au moins un point de E_0. C'est exact, mais non évident si l'on n'admet pas l'axiome de Zermelo.

Pour démontrer le théorème III.3, considérons un état A_0 de la nature qui caractérise le sixième type, c'est-à-dire que, au moins dans des cas de probabilité positive, l'ensemble E_0 est discontinu et non mesurable. Sa fermeture $\bar{E}_0$ est mesurable; soit τ la mesure de la partie de $\bar{E}_0$ intérieure à $(0, t)$. Nous pouvons prendre τ comme variable pour la succession des états $A_{0,l}$ qui se succèdent sur $\bar{E}_0$. Le processus qui définit cette succession est évidemment markovien et stationnaire, et l'on vérifie aussi aisément que les probabilités de passage sont mesurables, donc continues, en même temps que celles relatives au processus initial. On peut alors appliquer le lemme, qui nous montre qu'en chaque point de $\bar{E}_0$ l'indice l résulte d'un tirage au sort régi par une loi indépendante aussi bien de τ que des résultats des tirages antérieurs.

Ce résultat s'appliquant à tous les ensembles $\bar{E}_h$ analogues à $\bar{E}_0$, le théorème énoncé est établi.

Remarque. — Si, les fonctions $P_{h,k}(t)$ étant mesurables, l'ensemble des points de discontinuité peut remplir un ou plusieurs intervalles, il résulte immédiatement du lemme III.1 que le processus est du sixième type. Nous avions d'ailleurs déduit de ce lemme que cette circonstance est exclue pour le cinquième.

III.4. Processus du septième type. — Ce dernier type est caractérisé par le fait qu'au moins une des fonctions $P_{h,k}(t)$ n'est pas mesurable. Il y a alors au moins deux valeurs de k telles que, quel que soit h, $P_{h,k}(t)$ soit, ou bien non mesurable, ou bien identiquement nul; donc au moins quatre de ces fonctions ne sont pas mesurables.

J. L. Doob [1] a montré par un exemple l'existence de ce type. Il faut naturellement utiliser l'axiome de Zermelo, sans lequel on n'a jamais réussi à prouver l'existence de fonctions non mesurables. Nous généraliserons son exemple de la manière suivante :

Considérons deux ensembles F et F′ de nombres réels, qui vérifient les conditions suivantes :

a. Tout t réel peut être mis d'une manière et d'une seule sous la forme $u + u'$, où $u \in F$, $u' \in F'$;

b. Si $u_1 \in F$, $u_2 \in F$, toutes les combinaisons linéaires $u = r_1 u_1 + r_2 u_2$ à coefficients rationnels (positifs, nuls, ou négatifs) appartiennent à F;

b′. Propriété analogue pour F′;

c. F est dénombrable (et non vide, donc, compte tenu de *b*, partout dense sur l'axe des t; F′ est évidemment non dénombrable et partout dense).

En prenant pour F n'importe quel ensemble qui vérifie les conditions *b* et *c*,

on déduit aisément de l'axiome de Zermelo qu'il existe des ensembles F' tels que toutes les conditions indiquées soient vérifiées.

Établissons une correspondance biunivoque entre les éléments de F et les états A_h; l'indice h devient une fonction de u, que nous supposons lui-même fonction bien déterminée de t; donc h est une fonction bien déterminée $f(t)$ de t. Prenant maintenant $H(t)=f(t-a)$ (a, constante inconnue), nous obtenons évidemment un processus markovien [puisque la fonction $H(t)$ est complètement déterminée par la connaissance de sa valeur en un seul point] et stationnaire. Les probabilités de passage sont discontinues, donc non mesurables (d'après le théorème de Doob rappelé au paragraphe III.2,1°).

On remarque que, dans cet exemple, le hasard n'intervient pas, ou n'intervient que par le choix de l'état initial.

Nous appellerons *type de Doob* (généralisé) le type qui vient d'être défini et nous appellerons processus du *septième type pur* tous les processus de ce type pour lesquels les fonctions $P_{h,k}(t)$ n'ont pas d'autres valeurs que zéro ou un; le hasard ne peut intervenir que par le choix de l'état initial. Tout processus de Doob est de ce septième type pur. Nous ne savons pas si la réciproque est vraie.

On peut évidemment former des processus de type mixte par des combinaisons d'indices analogues à celles indiquées à propos du sixième type. On peut introduire ici trois indices successifs, h, k, l. Le premier indice h varierait d'après un processus d'un des cinq premiers types. Pour certaines valeurs de h (et en tout cas au moins pour une), k aurait une infinité de valeurs possibles et varierait (en fonction du paramètre τ relatif à l'ensemble E_h considéré) d'après un processus du septième type pur. Enfin, pour chacun des ensembles $E_{h,k}$ correspondant à des valeurs données des deux premiers indices, on peut introduire un troisième indice, ayant plusieurs valeurs possibles ou même une infinité dénombrable et qui, en chaque point de $E_{h,k}$, serait choisi d'après une loi fonction de h et k et indépendante aussi bien de t que des choix antérieurs.

Une question qui se pose naturellement est de savoir si par des combinaisons de ce genre on obtient le processus le plus général du septième type. Nous ne l'avons pas résolue.

III.5. Retour aux théorèmes généraux. — 1° *Continuité des fonctions* $P_{h,k}(t)$. — D'après les définitions et le théorème de Doob rappelé au paragraphe III.2.2°, ces fonctions sont continues pour les six premiers types, sauf peut-être au point $t=0$. En ce point, pour les quatre premiers types, $P_{h,k}(+0)$ existe et a la valeur $\delta_{h,k}$. Pour le cinquième type, nous avons seulement démontré l'existence d'une limite en moyenne, encore égale à $\delta_{h,k}$; la question de savoir si $P_{h,k}(+0)$ existe (et est alors égal à $\delta_{h,k}$) n'est pas résolue. Pour le sixième type, il y a de même limite en moyenne, mais, pour la fonction relative au passage de $A_{h,l}$ à $A_{k,l}$, cette limite est de la forme $\delta_{h,k}P'_{k,l}$, donc, si $h=k$ et qu'à cette valeur de k soient associées au moins deux valeurs de l, comprise entre zéro et

un. Il y a limite véritable si la variation de h dépend d'un processus d'un des quatre premiers types (le cas du cinquième restant en suspens).

Naturellement, pour un processus du septième type, celles des fonctions $P_{h,k}(t)$ qui ne sont pas mesurables ne sont pas continues.

2° *Extension du théorème* II.8.1. — Nous l'avons démontré pour les quatre premiers types. L'apparition d'un état instantané A_0 dans le cinquième type ne change rien d'essentiel. Si cet état intervient dans les successions d'états qui peuvent conduire de A_h à A_k, le temps τ passé dans cet état est une variable aléatoire du type μU (U ayant toujours la signification indiquée au paragraphe II.1) et peut être arbitrairement petit; il en est de même de la durée totale de chacune des successions d'états considérés. S'il y a plusieurs états instantanés, cela ne change rien non plus. Le théorème considéré reste vrai.

Il le reste aussi pour le sixième type, puisqu'on le déduit du précédent en multipliant certaines des probabilités de passage par des facteurs constants.

Il est manifestement faux pour le septième type, au moins pour les exemples de ce type considérés au paragraphe III.4 et pour celles des probabilités de passage qui ne sont pas mesurables.

3° Nous savons déjà que le théorème II.8.2 est vrai pour les six premiers types. Il est évidemment en défaut, pour le septième, au moins pour certaines des fonctions $P_{h,k}(t)$.

BIBLIOGRAPHIE.

Pour le cas des systèmes S_r (cas fini), nous renvoyons le lecteur à la bibliographie indiquée dans le livre de M. Fréchet [1]. Même pour le cas dénombrable, la liste qui suit n'est pas complète; nous ne mentionnons que les travaux qui nous ont paru le plus en rapport avec la présente étude.

Doeblin (W.) :

[1] *Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'états* (*Thèse*, Paris, 1937).

[2] *Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff* (*Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, 57, 1940, p. 61-101).

Doob (J. L.) :

[1] *Topics in the theory of Markoff chains* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 52, 1942, p. 37-64).

[2] *Markoff chains. Denumerable case* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 58, 1945, p. 455-473).

FELLER (W.) :

[1] *On the integro differential equations of purely discontinuous Markoff processes* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 48, 1940, p. 488-515 et erratum, 58, 1945, p. 474).

FORTET (R.) :

[1] *Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne* (*Thèse*, Paris, 1939; *voir* not., p. 21-43).

FOSTER (F. G.) :

[1] *Markoff chains with an enumerable number of states and a class of cascade processes* (*Proc. Cambridge phil. Soc.*, 47, 1951, p. 77-85).

FRÉCHET (M.) :

[1] *Recherches théoriques modernes sur le Calcul des probabilités* (t. 1, fasc. III du traité publié par E. Borel et divers collaborateurs; en deux livres; *voir* not. le second livre, qui est en cours de réimpression).

KOLMOGOROFF (A.) :

[1] *Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen* (*Rec. Math. de Moscou*, 1, n° 43, 1936, p. 607-610).

[2] *Chaînes de Markoff avec une infinité dénombrable d'états possibles* (en russe; *Bull. de l'Univ. d'État de Moscou*. Sect. A, 1, 1937, fasc. III).

KRYLOFF (N.) et BOGOLIOUBOFF (N.) :

[1] *Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, 64, 1936, p. 49-56).

LÉVY (P.) :

[1] *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Paris, Gauthier-Villars, 1937).

[2] *Processus à la fois stationnaires et markoviens pour les systèmes ayant une infinité non dénombrable d'états possibles* (*Congrès intern. des mathématiciens*. Cambridge, Mass., 1950).

[3] Quatre Notes présentées à l'Académie des Sciences (*C. R. Acad. Sc.*, 231, p. 467 et 1268; 232, p. 1400 et 1803).

YOSIDA (K.) and KAKUTANI (S.) :

[1] *Markoff process with an enumerable infinite number of possible states* (*Japan. J. Math.*, 16, 1939, p. 47-55).

SUR LES FONCTIONS AUTOMORPHES

PAR M. P. J. MYRBERG.

I. — Introduction.

1. La base de la théorie des fonctions automorphes est constituée par un groupe de transformations biuniformes. Le problème principal réside dans la recherche des fonctions analytiques, invariables par rapport à de telles transformations. Dans le cas d'une seule variable, les transformations en question se réduisent aux substitutions linéaires

$$(S) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Dans la théorie des fonctions automorphes, nous intéressent seulement les groupes discontinus dans un certain sens.

Soit Γ un groupe des substitutions linéaires que nous écrirons dans la forme unimodulaire

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

La première condition indispensable est que le groupe ne contienne pas de substitutions infinitésimales, c'est-à-dire des suites infinies de substitutions pour lesquelles le schéma de coefficients converge vers le schéma unitaire $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement, le groupe en question contiendrait des substitutions représentant des déplacements infinitésimaux dans le plan complexe, de quoi il résulte que les fonctions invariantes se réduisent nécessairement à des constantes. Mais la condition que nous venons de poser n'est pas suffisante. C'est ainsi que, par exemple, le groupe de Picard, formé par l'ensemble des substitutions linéaires dont les coefficients sont des nombres entiers de Gauss, remplit notre condition, n'ayant cependant pas d'intérêt du point de vue de la théorie des fonctions. Comme une condition complémentaire suffisante, il faut poser l'exigence de discontinuité propre, pour laquelle on donne la définition suivante :

Soit Γ un groupe de transformations linéaires (S). On dit que le groupe Γ est *proprement discontinu* dans un point z, si ce point peut être couvert par un domaine dont les transformés sont situés en dehors de ce domaine, à l'exception peut-être d'un nombre fini. Les points où le groupe est proprement discontinu forment un domaine D_0 composé d'une ou de plusieurs parties que nous appellerons le *domaine de discontinuité*. Les points intérieurs de ce domaine sont des *points réguliers* et les points de la frontière sont les *points singuliers* du groupe. Les points singuliers qui sont des point-limites pour les points équivalents du groupe sont constitués, ou bien par un ensemble discret des points, ou bien d'un nombre de continus.

2. La définition que nous venons de donner de la discontinuité peut être mise en liaison avec la définition donnée par M. Montel pour les familles normales des fonctions analytiques. On peut en effet démontrer que le domaine D_0 est identique au domaine D où les substitutions du groupe forment une famille normale de fonctions. Il est en effet possible d'extraire, de chaque suite infinie de substitutions de Γ, une suite partielle infinie dont les fonctions linéaires correspondantes convergent, dans chaque domaine intérieur de D_0, uniformément vers une fonction-limite qui se réduit à une constante. Ainsi, le domaine de discontinuité D_0 est, dans ce cas, identique au *domaine normal* D du groupe.

Remarquons cependant que c'est le cas seulement quand il s'agit d'une seule variable. Dans le cas de deux ou de plusieurs variables, par contre, le domaine normal D ne constitue généralement qu'une partie du domaine de discontinuité D_0. Dans mes recherches sur les fonctions automorphes de plusieurs variables, j'ai démontré l'importance capitale du domaine normal en tant que domaine d'existence de fonctions automorphes, ce qui rend possible d'expliquer quelques phénomènes remarqués par Picard, qui auparavant avaient compliqué la théorie des fonctions en question [14].

3. Dans la théorie des fonctions automorphes, le concept de *domaine fondamental* a une importance primordiale. On entend par là chaque domaine qui contient un et un seul point équivalent à un point donné du domaine de discontinuité ou à celui d'une partie connexe de ce domaine. Comme les substitutions linéaires ont ceci de particulier qu'ils conservent l'ensemble de cercles, les droites y comprises, on peut toujours choisir pour domaine fondamental un polygone dont les côtés constituent des arcs de cercles. Ces côtés sont conjugués deux par deux, de sorte qu'à chaque couple appartient une substitution transformant le côté correspondant sur son conjugué. En combinant, de toute manière possible, ces subtitutions fondamentales, on obtiendra l'ensemble de substitutions du groupe donné, et les polygones correspondants remplissent simplement le domaine D_0 ou une partie connexe de ce domaine.

Examinons maintenant d'une manière un peu plus détaillée les groupes de substitutions ayant un *cercle invariable principal* C. Les substitutions en question qui dépendent de trois paramètres réels peuvent être interprétées comme des mouvements du plan hyperbolique consistant en l'intérieur du cercle principal, où l'on a introduit la métrique de la géométrie de Lobatsheffsky.

Soit Γ un groupe de telles substitutions. Dès que le groupe ne contient pas de substitutions infinitésimales, il est proprement discontinu dans l'intérieur (et aussi dans l'extérieur) de C. Ce résultat, bien connu, est d'ailleurs une conséquence immédiate d'un théorème général concernant les groupes de certaines transformations biuniformes d'un nombre quelconque de variables ayant un domaine invariant fini, comme j'ai démontré dans un travail publié dans les *Acta mathematica* [14].

Les groupes ayant un cercle principal peuvent, d'un certain point de vue, être répartis en deux catégories différentes. Ou bien tous les points de la circonférence C sont des points singuliers, ou bien les points singuliers forment un ensemble discret des points sur C. Dans le premier cas, renfermant les groupes de Schwarz et, en particulier, le groupe modulaire, le polygone fondamental est situé complètement à l'intérieur du cercle principal; dans le deuxième cas, auquel conduisent, par exemple, les groupes de Schottky, le polygone fondamental comprend aussi quelques parties de la circonférence C.

En adoptant un autre point de vue, on arrive à une classification différente. Nous appellerons notre groupe un *groupe fuchsien*, si le nombre des substitutions fondamentales est fini, et un *groupe fuchsoïde*, si le nombre en question est infini.

Dans le premier cas, le nombre de côtés du polygone fondamental B est fini, dans le deuxième cas infini. Comme côtés de B on peut, pour les groupes de la première catégorie, toujours choisir des arcs de cercles coupant orthogonalement C. Quant aux *sommets ordinaires* du polygone B, ils peuvent être situés, ou bien à l'intérieur de C — ce sont les sommets elliptiques ou adventifs — ou bien sur C — les sommets paraboliques. Outre les sommets mentionnés, on aura, dans le cas d'un groupe fuchsoïde, encore des *sommets singuliers*, en nombre fini ou infini, qui sont des points-limites des sommets ordinaires.

Pour les groupes de la deuxième catégorie, la frontière du polygone fondamental comprend encore quelques parties de la circonférence C, en nombre fini ou infini.

En joignant les côtés conjugués du polygone fondamental d'un groupe fuchsien par les points correspondants, on obtient une surface fermée B' (pointée ou non), dont le genre p est zéro, ou un nombre positif fini. En partant d'un groupe fuchsoïde, on arrivera de la même manière à une surface ouverte, le genre pouvant maintenant aussi être infini. Dans les deux cas, le nombre p donne par définition *le genre* du groupe en question.

Dans le cas d'un groupe de la deuxième catégorie, on doit cependant remplacer le polygone fondamental par la somme du polygone B et de son image par rapport au cercle principal.

4. Passons maintenant à l'étude des *fonctions automorphes* de nos groupes, c'est-à-dire des fonctions analytiques qui restent invariables par rapport aux substitutions du groupe donné. Avant d'en démontrer l'existence, remarquons que chaque point singulier étant un point-limite des points équivalents, est nécessairement un point singulier essentiel pour l'ensemble des fonctions automorphes non constantes. Notre définition est cependant trop générale pour qu'on puisse trouver quelques propriétés communes caractéristiques des fonctions ainsi définies. C'est le cas déjà des fonctions simplement périodiques. Il est bien connu comment on arrive, dans ce cas-ci, à une catégorie bien naturelle de fonctions, exprimées rationnellement par une fonction exponentielle, en supposant que les fonctions en question doivent, au plus, avoir un accroissement exponentiel dans le domaine fondamental, composé d'une bande limitée par deux droites parallèles. Dans d'autres cas, comme par exemple dans le cas des fonctions doublement périodiques, on n'a pas besoin de telles restrictions, parce que le polygone fondamental est un domaine fini, dont la frontière ne contient pas de points singuliers du groupe en question.

Revenons maintenant aux groupes fuchsiens, où l'on est en présence de circonstances analogues. A propos de la définition des fonctions automorphes correspondantes, appelées *fonctions fuchsiennes*, on peut distinguer entre deux cas, selon qu'il existe des substitutions paraboliques ou non. Dans le premier cas, on doit compléter la définition des fonctions automorphes en exigeant qu'elles puissent être développées, aux environs d'un sommet parabolique, suivant une fonction exponentielle, dont le point singulier coïncide avec le sommet en question. Dans le deuxième cas, on n'a pas besoin de telles conditions complémentaires.

Quant aux groupes fuchsoïdes, la définition des fonctions automorphes, des *fonctions fuchsoïdes*, exigera des conditions nouvelles relatives au comportement des fonctions au voisinage des sommets singuliers — question dont l'explication a jusqu'ici pu être abordée seulement dans quelques cas particuliers.

5. Nous nous proposons maintenant de traiter brièvement de la question concernant l'existence des fonctions automorphes. On a à cet effet employé deux méthodes différentes. Dans ses recherches sur les fonctions automorphes, Poincaré s'est servi des séries infinies, nommées ensuite séries de Poincaré, qui non seulement prouvent l'existence des dites fonctions, mais aussi donnent un moyen de les représenter analytiquement. La méthode de Klein, entièrement différente de celle de Poincaré et qui repose sur l'utilisation des idées de Riemann, a le caractère d'une démonstration d'existence.

Nous répéterons brièvement l'exposé de Poincaré.

Soit $H(z)$ une fonction rationnelle restant finie dans les points singuliers du groupe donné Γ. Formons ensuite la série infinie

$$\Theta(z) = \sum H(S) \left(\frac{dS}{dz}\right)^m, \tag{1}$$

où S parcourt l'ensemble des substitutions de Γ et où m est un nombre entier au moins égal à 2. Il est aisé de voir que la série converge absolument et uniformément dans chaque domaine situé à l'intérieur du domaine de discontinuité, si l'on supprime, au besoin, un nombre fini de termes devenant infinis dans le domaine. La somme de (1) définit alors une fonction analytique, méromorphe à l'intérieur du cercle principal qui, par rapport aux substitutions S de Γ, se transforme d'une manière multiplicative selon la formule

$$\Theta(S) = \Theta(z) \left(\frac{dS}{dz}\right)^{-m}. \tag{2}$$

Il s'ensuit que le rapport de deux fonctions (1) est une fonction automorphe du groupe donné.

C'est un fait capital de la théorie de Poincaré que, dans le cas d'un groupe fuchsien, toute fonction automorphe peut s'exprimer par les quotients de deux fonctions Θ convenablement choisies. Quant aux groupes fuchsoïdes, il en est autrement. En effet, comme le noyau rationnel H ne comprend qu'un nombre fini de paramètres, on ne peut, avec les séries de Poincaré, représenter que des fonctions automorphes d'une nature particulière.

6. Il est cependant possible, dans certains cas, de représenter des fonctions automorphes d'une manière entièrement différente, comme l'ont montré Schottky et Burnside.

Supposons, à cet effet, que notre groupe soit de la deuxième catégorie, c'est-à-dire qu'il soit proprement discontinu même sur quelques parties de la circonférence C. On peut alors, par une considération géométrique simple, démontrer la convergence absolue de la série (1) déjà pour $m = 1$. Dans ce cas, les équations fonctionnelles (2) se réduisent aux équations

$$\Theta(S)\, dS = \Theta(z)\, dz, \tag{2'}$$

exprimant que $\Theta(z)\,dz$ est une différentielle automorphe de Γ. La fonction intégrale

$$\varphi(z) = \int \Theta(z)\, dz$$

est donc une fonction additive de Γ satisfaisant aux équations

$$\varphi(S) = \varphi(z) + \omega_S.$$

L'importance de cette nouvelle méthode consiste dans le fait que les expressions en question conduisent d'une manière directe aux fonctions automorphes, dont les zéros et pôles ou les pôles avec les résidus sont donnés, toutes ces fonctions pouvant être obtenues par une combinaison linéaire des intégrales, tandis que la méthode de Poincaré nous donne la solution sous une forme implicite et difficile à exécuter.

Malheureusement, la convergence absolue des séries en question n'a pas lieu dans les cas les plus importants, dans ceux des groupes fuchsiens de la première catégorie. Il est cependant, au moins dans les cas très étendus, possible de démontrer la convergence *non absolue* des séries en question et ainsi obtenir pour les fonctions automorphes une représentation nouvelle simple essentiellement différente de celle de Poincaré.

Mais avant de traiter de cette question, nous nous rappellerons quelques propriétés connues des fonctions automorphes, utiles pour nos développements prochains.

7. Soit Γ un groupe fuchsien de genre p. Si $p=0$, toutes les fonctions automorphes peuvent s'exprimer comme fonctions rationnelles d'une fonction spéciale entre elles

$$x=x(z), \tag{3}$$

qui n'obtient dans le domaine fondamental aucune valeur plus d'une fois. Cette fonction, définie à une transformation linéaire près, sera appelée une *fonction fondamentale* de Γ.

Dans le cas $p>0$, il existe un couple de fonctions automorphes

$$x=x(z), \qquad y=y(z), \tag{4}$$

liées entre elles par une relation algébrique

$$P(x,y)=0 \tag{5}$$

et tel que toute fonction automorphe peut s'exprimer comme une fonction rationnelle $R(x,y)$ de (4). Les fonctions (4), définies à une transformation birationnelle près, forment par définition un *système fondamental* pour le groupe Γ.

Quant à la fonction uniformisante polymorphe z, elle peut être représentée comme quotient de deux intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$\frac{d^2v}{dx^2}+p(x,y)\frac{dv}{dx}+q(x,y)v=0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles sur la surface riemannienne F du genre p, définie par l'équation (5) (dans le cas spécial $p=0$, les coefficients sont des fonctions rationnelles de x).

L'importance capitale des fonctions automorphes consiste dans le fait qu'étant inversement donnée une surface algébrique quelconque (5), il sera toujours possible d'exprimer les variables x et y comme fonctions automorphes (fuchsiennes) d'une variable auxiliaire et de trouver ainsi une solution complète au problème d'uniformisation des surfaces algébriques d'un genre quelconque, problème dont la solution pour les surfaces de genre zéro a été fourni par les fonctions rationnelles et pour les surfaces de genre un par les fonctions elliptiques.

8. Parmi les fonctions polymorphes, se distingue la fonction conduisant à un groupe fuchsien de la première catégorie et n'ayant aucun point de ramification par rapport à la surface F.

On peut en prouver l'existence en partant d'un système canonique de coupures composé de p rétrosections

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p$$

et de p sections conjuguées

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_p$$

et en représentant la surface de recouvrement correspondante d'une manière conforme sur l'intérieur du cercle unité. Par la fonction z ainsi obtenue, toutes les fonctions non ramifiées par rapport à F peuvent s'exprimer comme fonctions uniformes, parmi elles les fonctions rationnelles de F et les intégrales abéliennes de première et deuxième espèce de F.

Parmi les fonctions uniformisantes polymorphes conduisant aux groupes sans cercle principal, on peut mentionner les fonctions appartenant à un groupe de Schottky, dont le domaine fondamental est limité par un nombre de courbes fermées, situées en dehors l'une de l'autre.

9. Nous avons parlé, dans ce qui précède, seulement de l'uniformisation des surfaces riemanniennes *fermées*. On peut cependant traiter d'une manière semblable des surfaces riemanniennes *ouvertes* les plus générales. En effet, étant donnée une fonction analytique multiforme quelconque $y(x)$, on peut représenter les variables x et y par exemple comme des fonctions automorphes (4) appartenant à un groupe fuchsoïde Γ et cela d'une infinité de manières.

Partons inversement d'un groupe fuchsoïde donné Γ. Soit d'abord le genre de Γ égal à zéro. Il existe alors une fonction automorphe $x = x(z)$ n'obtenant aucune valeur plus d'une fois dans le polygone fondamental B et représentant, par conséquent, le polygone B sur un domaine simple T du plan x, *domaine principal* de $x(z)$. Comme fonction de x, chaque fonction automorphe de Γ sera uniforme dans le domaine T. La fonction fondamentale $x(z)$ est déter-

minée à une transformation biunivoque arbitraire près, définie par une représentation conforme de T sur un autre domaine simple quelconque.

Soit maintenant le genre p plus grand que zéro. Il est alors, et même d'une infinité de manières, possible de former deux fonctions automorphes $x(z)$, $y(z)$ qui n'obtiennent dans le polygone fondamental aucun couple de valeurs plus d'une fois. Il s'ensuit que chaque fonction automorphe du groupe sera une fonction uniforme sur la surface riemannienne représentée par les fonctions x et y.

Dans le cas d'une fonction algébrique, les fonctions en question peuvent s'exprimer, comme on le sait, sous forme de fonctions rationnelles des variables x et y. Ce résultat peut, d'après M. Henri Cartan [6], se transmettre aux cas où l'équation algébrique (5) est remplacée par une relation transcendante de la forme

$$G(x, y) = 0,$$

où G est une fonction entière de deux variables, chaque fonction méromorphe sur la surface en question pouvant s'exprimer comme une fonction méromorphe $F(x, y)$ des variables x et y. Quant au cas général, ce résultat ne subsiste plus, comme nous montre l'exemple de la surface riemannienne définie par $y = x^{\mu}$, où μ est une quantité réelle irrationnelle. En effet, la fonction $t = \log x$ est ici une fonction méromorphe pour laquelle il est évidemment impossible de trouver une représentation de la forme

$$t = \varphi(x, y)$$

par une fonction φ qui était partout uniforme dans son domaine d'existence dans l'espace (x, y).

II. — Sur la représentation analytique des fonctions fuchsiennes.

10. Soit Γ un groupe fuchsien de la première catégorie et $f(z)$ une fonction automorphe correspondante (fonction fuchsienne) ayant dans le polygone fondamental les zéros resp. pôles

$$a_\nu, \quad b_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Étant méromorphe à l'intérieur du cercle principal C

$$|z| = 1,$$

la fonction $f(z)$ peut s'exprimer, et même d'une infinité de manières, comme quotient

$$f(z) = \frac{g(z)}{g_0(z)} \tag{6}$$

de deux fonctions *entières*, c'est-à-dire régulières dans le domaine $|z|<1$, ayant ses zéros dans les points

$$S(a_\nu) \text{ resp. } S(b_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où S parcourt l'ensemble de substitutions de Γ. Les fonctions

$$g(z), \quad g_0(z), \tag{7}$$

définies à un facteur commun près ayant la forme $e^{h(z)}$, où $h(z)$ est une fonction entière arbitraire, satisferont pour chaque substitution de Γ à une équation de la forme

$$g(S) = e^{u_S(z)} g(z), \tag{8}$$

où les exposants $u_S(z)$ sont des fonctions entières dépendant de S et du choix des fonctions (7).

Il s'agit maintenant de choisir les fonctions (7) d'une manière à donner aux équations (8) la forme la plus simple possible.

On peut, dans des cas particuliers, poser $u_S(z) \equiv 0$, à savoir dans les cas où il existe des fonctions automorphes partout régulières, et c'est le cas par exemple pour le groupe modulaire. En laissant de côté ces cas, on peut, en général, essayer de satisfaire aux équations (8) par des fonctions dont les exposants forment un ensemble linéaire

$$u_S(z) = \alpha_S u(z) + \beta_S, \tag{9}$$

où $u(z)$ désigne une fonction entière. Les fonctions en question, satisfaisant pour chaque substitution S de Γ à une équation de la forme

$$g(S) = e^{\alpha_S u(z) + \beta_S} g(z), \tag{10}$$

pourraient, si elles existaient, être regardées comme une généralisation des fonctions elliptiques aux multiplicateurs exponentiels.

11. Pour étudier la nature de nos fonctions hypothétiques, nous remarquons, ce qu'il est facile de vérifier, que la fonction $u(z)$ doit pour chaque S de Γ satisfaire à une équation de la forme

$$u(S) = a_S u(z) + b_S. \tag{11}$$

Comme fonction sur la surface algébrique riemannienne F, correspondante à notre groupe Γ et définie par le couple fondamental (4), la fonction u est une fonction multiforme $u(x)$, dont les branches dépendent l'une de l'autre par la relation

$$u(x') = a_S u(x) + b_S. \tag{11'}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{u''(x)}{u'(x)} = r(x, x'),$$

est une fonction uniforme et méromorphe sur F, donc une fonction rationnelle de x et y. On aura ainsi pour la fonction u l'expression

$$u = \int e^{\int r(x,y)dx} dx. \tag{12}$$

Quant aux fonctions g correspondant à u, on trouve qu'elles peuvent s'exprimer sous la forme

$$g(x) = e^{\int \varphi(x)du} \tag{13}$$

par la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{D}\log g(x)}{\mathrm{D}\, u(x)} \tag{14}$$

satisfaisant aux équations

$$\varphi(x') = \frac{1}{a}\varphi(x) + \frac{\alpha}{a} \tag{15}$$

et ayant donc une expression de la forme

$$\varphi(x) = \int e^{\int \mathrm{R}(x,y)dx} dx, \tag{16}$$

où $\mathrm{R}(x, y)$ est une fonction rationnelle. On peut aussi, par un calcul élémentaire, vérifier que les fonctions $\log g(x)$ et $u(x)$ sont des intégrales de l'équation différentielle linéaire

$$v''' - (\mathrm{R} + 2r)v'' + (r^2 + r\mathrm{R} - r')v' = 0. \tag{17}$$

Les fonctions (12) appartiennent à la catégorie des intégrales des fonctions à multiplicateurs constantes étudiées par Appell et Prym.

Dans le cas le plus simple, où toutes les constantes a_s sont égales à l'unité, la fonction $u(x)$ se réduit à une intégrale abélienne de la première espèce de F. Les fonctions (12) ainsi obtenues conduisent à la représentation connue des fonctions automorphes comme quotients des fonctions entières composées par la fonction Θ de Riemann définie par la série multiple

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\sum_{\mu,\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{p} m_\nu u_\nu}$$

et des intégrales abéliennes normales de la première espèce

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

sous la forme

$$g(z) = \vartheta[u_1(z) - \mathrm{C}_1, \ldots, u_p(z) - \mathrm{C}_p], \tag{18}$$

où C_ν sont des constantes. Les fonctions (18) satisfont alors aux équations

$$g(S) = e^{\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu^{(s)} u_\nu(z) + \tau^{(s)}} \, g(z),$$

un peu plus générales que (10).

12. On arrive à une autre catégorie de fonctions plus remarquables au point de vue application, en supposant les constantes a_S égales à ± 1. Nous traiterons de ce problème d'abord le cas spécial où (5) se réduit à la surface hyperelliptique

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{2p+2} (x - e_\nu). \tag{19}$$

Soit alors $u(x)$ une intégrale elliptique de la première espèce ayant comme

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{\prod_{\nu=1}^{4} (x - e_\nu)}} \tag{20}$$

quatre quelconques entre les points

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_{2p+2}$$

pour points de ramification. Comme fonction sur la surface F, la fonction $u(x)$ est égale à l'intégrale d'une fonction à multiplicateurs constantes (12) vérifiant les équations

$$u(x') = \pm u(x) + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

où m_1 et m_2 sont des nombres entiers. Quant aux fonctions correspondantes (13), elles peuvent maintenant s'exprimer par la formule

$$g = e^{\int du \int \mathrm{E}(u) du}, \tag{21}$$

où $\mathrm{E}(u)$ désigne une fonction doublement périodique ayant les périodes primitives ω_1 et ω_2 de l'intégrale elliptique (20) comme périodes.

Dans le cas actuel, le groupe Γ sera un sous-groupe invariant d'un groupe fuchsien Γ_0 de genre zéro et d'indice deux ayant la fonction $x(z)$ comme fonction fondamentale. En exigeant que les équations (10) subsistent même pour les substitutions de Γ_0, la fonction (14) se réduira à une fonction rationnelle de x. La plus simple de telles fonctions est la fonction

$$\mathrm{E}(u) = -[p(u+a) + p(u-a)],$$

ayant des pôles doubles dans les points $\pm a$. La fonction correspondante g devient

alors, en la multipliant par une fonction exponentielle de la forme e^{Au^2+B}, la fonction

$$H[u(z)] \tag{22}$$

formée par la fonction H (u) de Jacobi.

Comme fonction de u, notre fonction (22) satisfera, après un changement de variable, aux équations

$$H(u+\omega_1) = -H(u), \qquad H(u+\omega_2) = e^{-\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)} H(u).$$

Par la fonction (22), la fonction automorphe $x(z)$ s'exprime sous la forme

$$x(z) - x(z_0) = C\frac{\varphi(z, z_0)}{\varphi(z, 0)}, \tag{23}$$

où

$$\varphi(z, z_0) = H[u(z) + u(z_0)]\, H[u(z) - u(z_0)]$$

est une fonction entière de z, satisfaisant pour chaque S de Γ_0 à une équation de la forme (10).

13. Pour obtenir une expression semblable pour la fonction $y(z)$, on peut introduire un nombre fini q des intégrales elliptiques de la forme (20) et l'on obtient ainsi pour les radicales $\sqrt{x-e_i}$ des expressions comme quotients de fonctions Θ dont les arguments sont des intégrales elliptiques mentionnées. On arrive de cette manière à la représentation

$$y(z) = C'\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} \tag{24}$$

de la fonction $y(z)$ comme quotient de deux fonctions entières composées de fonctions Θ elliptiques et de certaines fonctions entières analogues à la fonction $u(z)$. Et comme enfin chaque fonction automorphe de Γ peut s'exprimer rationnellement par x et y, on aura finalement pour chacune des telles fonctions une représentation sous forme d'un quotient de deux fonctions entières $\psi(z)$ satisfaisant pour chaque S de Γ à une équation

$$\psi(S) = e^{\sum_{\nu=1}^{q} A_\nu^{(S)} u_\nu(z) + B^{(S)}}\, \psi(z), \tag{25}$$

où

$$u_1(z), \quad u_2(z), \quad \ldots, \quad u_q(z) \tag{26}$$

sont des intégrales elliptiques. On peut toujours, par une transformation simple, attendre que toutes les constantes $A_\nu^{(S)}$ s'évanouissent pour $\nu > 1$ et que, par conséquent, les équations (25) se réduisent à la forme simple (10) [18].

Nous avons ainsi démontré la possibilité de composer nos fonctions automorphes de certaines fonctions elliptiques et des fonctions entières (26).

14. Il reste à étudier de plus près ces dernières fonctions. Nous pouvons nous borner à la fonction $u(z)$. On peut facilement montrer que cette fonction entière est une fonction automorphe fondamentale d'un groupe fuchsoïde Γ' du genre zéro, sous-groupe invariant de Γ_0, dont on peut trouver un polygone fondamental de la manière suivante :

Regardons le réseau des parallélogrammes des périodes de l'intégrale elliptique u et coupons le plan suivant les côtés λ_ν correspondant aux côtés C_ν du polygone fondamental B_0 de Γ_0. En joignant une infinité de tels réseaux suivant des coupures λ_ν, nous obtiendrons une surface F′ de recouvrement pour la fonction polymorphe $z(u)$ regardée comme fonction de u. Par la représentation conforme de la surface F′ sur l'intérieur du cercle C, le réseau découpé sera transformé en un polygone B′ ayant un nombre infini de côtés, lequel polygone B′ est un polygone fondamental du groupe Γ' cherché.

Soit maintenant Π_n le parallélogramme constitué d'un nombre fini de parallélogrammes dans le plan u. A ce parallélogramme correspond un polygone B'_n à un nombre fini de côtés, qui s'obtient en traçant dans le polygone fondamental B′ les lignes correspondant aux diverses parties des côtés de Π_n. Outre ces côtés, que j'appellerai les côtés de première espèce, la frontière L_n de B'_n renferme un nombre fini de côtés de seconde espèce, provenant des parties des coupures λ_ν situées à l'intérieur de Π_n.

Cela posé, formons pour le parallélogramme Π_n une surface de recouvrement en joignant un nombre fini q_n de ces parallélogrammes suivant les coupures λ_ν. A la surface ainsi obtenue correspond un polygone A_n composé d'un nombre fini de transformés de B'_n. Soit L'_n resp. L''_n l'ensemble des côtés de première resp. de seconde espèce appartenant à la frontière

$$L_n = L'_n + L''_n \tag{27}$$

de A_n. On peut alors, par des considérations relativement compliquées, mais tout à fait élémentaires, que nous laisserons ici de côté, déduire pour la longueur de L''_n une inégalité de la forme

$$L''_n < \varepsilon_n, \tag{28}$$

où ε_n désigne une quantité tendant vers zéro pour $n \to \infty$. Il s'ensuit, d'autre part, de la définition de L'_n que

$$|u(z)| \geqq kn \quad \text{sur } L'_n, \tag{29}$$

où k est une quantité positive.

15. Formons maintenant la fonction

$$f(z) = \frac{u'(a)}{u(z) - u(a)}, \tag{30}$$

qui est, ainsi que $u(z)$, une fonction automorphe fondamentale de notre groupe

fuchsoïde Γ'. On peut, en vertu de la formule de Cauchy, écrire

$$(31) \qquad f(z)=\sum_{A_n}\frac{S'(a)}{z-S(a)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Pour les intégrales, on a les évaluations

$$(32) \qquad \left|\int_{L_n'}\right|<\frac{k'}{n}, \qquad \left|\int_{L_n''}\right|<k''\varepsilon_n,$$

si $f(z)$ reste bornée aux côtés de L_n, ce qu'on peut d'ailleurs supposer sans restriction. Pour $n\to\infty$, on obtient ainsi l'expression

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{A_n}\frac{S'(a)}{z-S(a)},$$

que nous écrirons simplement

$$(33) \qquad f(z)=\sum_{\Gamma'}\frac{S'(a)}{z-S(a)},$$

en faisant toutefois observer qu'il s'agit ici d'une série dont la convergence est uniforme, mais pas absolue. Il faut donc prendre les termes de (33) dans un ordre bien déterminé et les réunir d'une manière convenable. La loi qu'il faut suivre est cependant aisée à exprimer et indépendante du choix de la fonction automorphe $f(z)$ en question [18].

Comme fonction du paramètre a, notre série (33) est identique à une série de Poincaré de la dimension $m=1$. Par l'intégration de (33) par rapport au paramètre, on obtient pour la fonction $u(z)$ l'expression

$$(34) \qquad \frac{u(z)-u(a)}{u(z)-u(b)}:\frac{u(z_0)-u(a)}{u(z_0)-u(b)}=\prod_{\Gamma'}\left[\frac{S(z)-a}{S(z)-b}:\frac{S(z_0)-a}{S(z_0)-b}\right].$$

Ce produit, dont la convergence est uniforme, mais pas absolue, est en réalité identique à un produit de Schottky.

En combinant les expressions ci-dessus avec des expressions connues des fonctions elliptiques on peut obtenir, pour les fonctions automorphes $x(z)$ et $y(z)$, des produits infinis ayant la forme la plus simple possible. On peut aussi, à l'aide de la formule de Cauchy, trouver pour toutes les fonctions automorphes et même pour les intégrales abéliennes, une représentation analytique par des séries infinies, ayant des propriétés remarquables, analogues à celles des développements des fonctions elliptiques : l'invariance formelle par rapport au groupe donné, ainsi que la dépendance la plus simple possible des éléments de la fonction en question [18].

16. Nos développements s'étendent aussi aux surfaces algébriques les plus générales. Regardons d'abord le cas le plus simple $p=0$. Soit donc Γ_0 un groupe

fuchsien quelconque de genre zéro et $x(z)$ une fonction automorphe fondamentale, définie à une transformation linéaire près. Soient (e_i) les points de ramification de la fonction polymorphe $z(x)$ et (ν_i) les ordres de ces points. Ces entiers satisfont, comme on le sait, à l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\nu_i} < q - 2.$$

Il est toujours possible, comme nous l'avons démontré dans un travail publié dans les *Annali di Matematica* [20], de construire une surface algébrique F de genre un, dont les points de ramification sont situés sur les points (e_i), l'ordre de ces points de ramification étant alors ν_i. Soit alors u une intégrale elliptique de première espèce de la surface F. La fonction $u(z)$, uniforme et régulière pour $|z| < 1$ est une fonction automorphe fondamentale d'un groupe fuchsoïde du genre zéro, sous-groupe de notre groupe fuchsien Γ_0. Pour cette fonction, les développements précédemment donnés sont valables.

Comme, d'autre part, x est une fonction elliptique de u, on aura ainsi finalement, par combinaison, des expressions pour la fonction $x(z)$ et ensuite pour toutes les fonctions automorphes du groupe Γ_0 donné.

17. Quant au cas général, où le genre du groupe Γ est un entier quelconque, nous sommes obligés de nous borner aux remarques suivantes :

Soit F une surface riemannienne algébrique quelconque et (e_i) les projections des points de ramification de F sur le plan x. Soit alors $z = z(x)$ une fonction polymorphe de x, ayant les points (e_i) comme points de ramification et telle que l'ordre de chacun de ces points soit un multiple d'ordre du point correspondant de F. On peut alors regarder la fonction $z(x)$ comme une fonction polymorphe de la surface F avec une ramification relative. Il s'ensuit que les fonctions rationnelles sur F seront des fonctions automorphes d'un groupe fuchsien, sous-groupe d'un groupe de genre zéro. Pour les fonctions en question tous nos développements précédents sont donc valables.

Choisissons en particulier $\nu_1 = \nu_2 = \infty$. La fonction

$$u = \log \frac{x - e_1}{x - e_2},$$

qui est une fonction automorphe d'un groupe fuchsoïde Γ', joue alors dans le cas qui nous occupe le même rôle que l'intégrale elliptique u dans le cas hyperelliptique. On arrivera ainsi à une nouvelle représentation analytique des fonctions automorphes, dont nous avons traité en détail dans un travail publié dans les *Acta mathematica* [15].

Il est donc possible, pour chaque surface algébrique d'un genre quelconque, de trouver une fonction polymorphe, par laquelle la représentation analytique des fonctions automorphes est possible, en se servant des expressions canoniques les plus simples.

18. Pour terminer, nous faisons encore la remarque suivante : on peut regarder la méthode précédente comme une généralisation de la représentation des fonctions périodiques par les séries de Fourier.

En effet, chaque fonction elliptique ayant les périodes ω_1, ω_2 devient, par l'introduction de la variable

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z},$$

une fonction uniforme de t, automorphe par rapport aux substitutions

$$t' = e^{\frac{2\pi i \omega'}{\omega}} t.$$

Mais la fonction $t(z)$ est une fonction automorphe fondamentale pour le groupe des substitutions

$$z' = z + m\omega,$$

sous-groupe invariant du groupe formé par l'ensemble des substitutions

$$z' = z + m\omega + m'\omega'.$$

On voit ainsi que dans nos développements précédents les fonctions fuchsoïdes $u(z)$ jouent le même rôle que la fonction exponentielle $t(z)$ dans le cas présent. C'est dans ce sens qu'on peut regarder nos développements comme une généralisation des séries de Fourier.

III. — Remarques sur la théorie des fonctions fuchsoïdes.

19. Dans le chapitre précédent, j'ai traité des groupes fuchsiens, auxquels amène l'uniformisation des fonctions algébriques, c'est-à-dire des surfaces riemanniennes fermées. Passant maintenant aux groupes fuchsoïdes, nous aurons affaire à un problème général de la théorie des fonctions, dont nous ne pouvons obtenir que des résultats très incomplets. En effet, comme toute surface riemannienne et toute fonction analytique peut être uniformisée par ces nouvelles fonctions, leur théorie est équivalente à la théorie générale des fonctions analytiques sur une surface riemannienne la plus générale.

On rencontre des difficultés nouvelles déjà à propos de la définition d'une fonction automorphe. En effet, si nous exigeons seulement que nos fonctions restent invariables par rapport aux substitutions du groupe donné et méromorphes à l'intérieur du cercle principal, nous aurons affaire à une classe de fonctions qui est trop étendue pour qu'on puisse en trouver les propriétés spéciales. Afin d'éclaircir notre assertion nous traiterons de l'exemple suivant :

Soit

$$(e) \qquad e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad \ldots$$

un nombre infini dénombrable des points du plan complexe x ayant le point

à l'infini comme seul point d'accumulation. Soit $z(x)$ la fonction polymorphe, inverse d'une fonction fuchsoïde, ayant les points (e) comme points de ramification logarithmique. En traçant par les points (e) une courbe convenable, on obtiendra pour le groupe fuchsoïde correspondant un domaine fondamental formé par un polygone avec un nombre infini de côtés et des angles tous égaux à zéro. Pour notre groupe Γ, la fonction $x(z)$ est une fonction automorphe fondamentale, ayant comme domaine principal le plan x pointé à l'infini. Mais avec la fonction $x(z)$, toute fonction méromorphe de x sera une fonction de z, méromorphe à l'intérieur du cercle principal et invariante par rapport au groupe Γ. Rien que cet exemple nous montre qu'il sera indispensable de préciser d'une façon plus détaillée la définition des fonctions automorphes.

20. Les groupes fuchsoïdes peuvent, comme les groupes fuchsiens, être répartis entre deux catégories suivant que le groupe sera discontinu seulement à l'intérieur (et à l'extérieur) du cercle principal, ou encore sur quelques parties de la circonférence C. On définira, de même, le genre d'un groupe fuchsoïde, ce nombre pouvant maintenant aussi être infini. Mais, outre ces propriétés déjà connues, on rencontre ici des circonstances entièrement nouvelles, qui conduisent à une nouvelle classification importante des groupes fuchsoïdes. Nous en traiterons d'abord dans le cas le plus simple, à propos des groupes du genre zéro.

Il existe dans ce cas, par définition, une fonction automorphe $x(z)$ n'obtenant aucune valeur plus d'une fois dans le domaine fondamental B du groupe. Cette fonction fondamentale, qui donne une représentation conforme de B sur un domaine simple T, est encore très arbitraire. Si, en effet, $x' = f(x)$ désigne une fonction analytique quelconque représentant le domaine T d'une manière conforme sur un tel autre domaine T', la fonction composée $f[x(z)]$ sera également une fonction fondamentale du groupe Γ ayant le domaine T' comme domaine principal.

21. Notre classification nouvelle des groupes fuchsoïdes se fonde sur la notion de la *capacité* de la frontière du domaine T, en réunissant dans la première classe A_0 tous les groupes pour lesquels la capacité est nulle, dans la seconde classe A_1 tous les autres groupes. Il est peut-être utile de rappeler ici la définition de la capacité et quelques faits relatifs.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n points de l'ensemble donné μ fini et fermé. Formons l'expression

$$\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<k} |x_i - x_k|}, \tag{35}$$

donnant la moyenne géométrique des distances de ces points pris deux à deux. Quand les points x_ν parcourent, indépendamment l'un de l'autre, les points

de l'ensemble donné μ, la fonction (35) aura un maximum fini d_n, le $n^{\text{ième}}$ diamètre de l'ensemble μ. On peut démontrer facilement que les nombres ainsi définis $d_1, d_2, d_3, \ldots$ forment une suite décroissante, d'où il s'ensuit qu'il existe la valeur limite

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d.$$

Cette quantité non négative, le *diamètre transfini*, est par définition la capacité de l'ensemble donné.

On peut arriver à cette notion aussi par un autre chemin. Soit, en effet, T le domaine infini limité par μ. Approximons ce domaine par les domaines $T_1, T_2, T_3, \ldots$ limités par courbes fermées entourant les points de μ et choisies de telle manière que T_n soit une partie de T_{n+1} et que chaque point de T soit contenu dans T_n, n étant suffisamment grand. Soit maintenant $g_m(x)$ la fonction de Green pour le domaine T_m ayant son pôle à l'infini, c'est-à-dire la fonction harmonique dans T_m qui est égale à zéro sur la frontière de T_m et qui, à l'infini, a un développement de la forme

$$g_m(x) = \log|x| + \gamma_m + \left(\frac{1}{x}\right), \tag{36}$$

où $\left(\frac{1}{x}\right)$ devient zéro pour x infini. Les constantes γ_m forment, comme on le voit aisément, une suite croissante ayant donc une valeur limite

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m = \gamma,$$

finie ou infinie. Entre la *constante de Robin* γ ainsi définie et la capacité C a toujours lieu la relation

$$C = e^{-\gamma}.$$

On peut distinguer entre deux cas essentiellement différents, selon que la capacité est positive ou zéro. Dans le premier cas, il existe pour le domaine T une fonction de Green g qui peut être déduite de g_m en passant aux limites [17]. Il en est autrement dans le second cas, où les fonctions (36) tendront vers l'infini pour $m\to\infty$. Les domaines de la première espèce ont une frontière positive, ceux de la seconde espèce sont des domaines ayant une frontière nulle [26]. Les ensembles de la capacité nulle sont d'ailleurs aussi identiques aux ensembles des points qui sont des points réguliers pour chaque fonction harmonique, bornée dans un certain entourage de l'ensemble en question [17].

22. Pour expliquer la dépendance de la capacité des mesures ordinaires de l'ensemble, nous remarquons, ce qui est aisé à voir, que chaque ensemble contenant un nombre fini ou un nombre infini dénombrable de points a une capacité nulle, et que chaque ensemble contenant un continu a, au contraire, une capacité positive. Soit, plus généralement, $h(t)$ une fonction réelle

croissante de t. Nous dirons que ladite fonction est de la première espèce, si l'intégrale

$$\int_0^t \frac{h(t)}{t}\,dt \tag{37}$$

est divergente, de la seconde espèce, si l'intégrale est convergente.

Soient maintenant $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ les rayons des cercles qui recouvrent les points de l'ensemble. Formons l'expression

$$\sum_\nu h(\rho_\nu).$$

La limite inférieure

$$\underline{\lim} \sum_\nu h(\rho_\nu)$$

de ces sommes sera par définition la h-mesure de notre ensemble μ. Pour $h(t)=t$, on obtiendra la mesure linéaire, tandis que pour $h=\frac{1}{\log t}$, on obtiendra la mesure logarithmique. On doit à Erdös et Gillis le théorème suivant :

Si la mesure logarithmique est finie, la capacité est nulle.

D'autre part, j'ai démontré que la capacité est sûrement positive, si la mesure appartenant à une fonction de la seconde espèce h est positive [17]. Il suffit, par exemple, de prendre pour $\varepsilon > 0$

$$h(t)=\frac{1}{|\log t \log_2 t \ldots \log_n t (\log_{n+1} t)^{1+\varepsilon}|}.$$

23. Revenons maintenant à nos groupes et fonctions fuchsoïdes. Soit Γ un tel groupe de genre nul et $x=f(z)$ une fonction automorphe fondamentale. Nous pouvons distinguer entre deux types de groupes selon la nature du domaine principal T de x. Pour les groupes du premier type le produit infini

$$\Pi|S_\nu(z)|, \tag{38}$$

est divergent; pour ceux du second type, il est convergent. Dans le deuxième cas, l'expression

$$-\log\Pi=\Sigma\log\frac{1}{|S_\nu(z)|}, \tag{39}$$

définit une fonction harmonique qui est automorphe et qui, comme fonction de x, est identique à la fonction de Green g du domaine T. Quant à la série (39), elle converge simultanément avec des séries de Poincaré de la dimension $m=1$.

En vertu de ce qui précède, la détermination du type d'un groupe fuchsoïde est un problème équivalant à la recherche de la convergence absolue des séries

de Poincaré mentionnées. Le dernier problème est cependant très difficile à résoudre, et même dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour les domaines simplement connexes, on n'a pu jusqu'ici expliquer que des cas très particuliers [26].

Parmi les résultats un peu plus généraux, citons le suivant, dont la vérité est facile à constater : Si la mesure linéaire de l'ensemble fermé m des points du domaine fondamental appartenant à la circonférence principale C est positive, le groupe sera du deuxième type.

24. On pourra se demander s'il n'est pas possible d'intervertir ce résultat ou, plus précisément : est-il possible pour chaque domaine dont la frontière a la capacité positive de définir un groupe fuchsoïde dont le domaine principal est T, de sorte que la mesure linéaire de l'ensemble correspondant m soit positive.

Envisageons à cet effet le domaine T constitué par l'intérieur du cercle unité E du plan x, excepté un nombre infini des points

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

convergents vers la périphérie E′ de E, chaque point de E′ étant un point limite de l'ensemble (a) (cas hyperbolique). En joignant les points (a) par des lignes droites aux points les plus rapprochés de E′, on aura un système de coupures formant la frontière d'un domaine simplement connexe T′. Soit maintenant z la fonction polymorphe ayant les points (a) comme points singuliers logarithmiques et représentant la surface de recouvrement de T′ sur le cercle unité. En effectuant, au besoin, une déformation des parties intérieures des coupures, on aura pour le domaine fondamental du groupe Γ de z un polygone, limité par un système infini de demi-cercles, les côtés conjugués ayant un sommet commun situé sur C. On peut procéder d'une manière analogue dans le cas où T est identique au plan infini, pointé sur un ensemble de points convergeant vers l'infini (cas parabolique).

On peut maintenant distinguer entre deux cas différents, selon que la mesure linéaire de l'ensemble m est nulle ou positive. Dans le cas parabolique, on a toujours affaire au premier cas, d'après le théorème mentionné ci-dessus. Quant au cas hyperbolique, la mesure de m peut être nulle ou positive, selon la densité de l'ensemble (a).

Pour éclaircir cela, nous supposerons que les points (a) soient situés d'une manière régulière exprimée par la formule

$$a_n^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{q_n}\right) e^{\frac{2\pi i k}{p_n}} \qquad (0 \leqq k < p_n),$$

où $q_1, q_2, q_3, \ldots$ est une suite croissante de nombres positifs et p_n des entiers devenant infinis avec n. On aura alors le théorème :

Si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\infty,$$

la mesure de m est nulle; si, au contraire,

$$\sum\frac{p_n}{q_n}<\infty,$$

la mesure est positive [21].

En prenant, par exemple, $q_n=2^n$, on aura le premier cas pour $p_n=2^{n(1+\varepsilon)}$ et le second cas pour $p_n=2^{n(1-\varepsilon)}$, où $\varepsilon>0$. Dans les deux cas, la fonction automorphe $x(z)$ nous fournit l'exemple d'une fonction bornée, dont les valeurs limites de Fatou sont toutes absolument égales à l'unité. C'est un fait remarquable que dans le premier cas la dite fonction obtient ces valeurs limites déjà pour un ensemble de points de mesure nulle.

25. De ce qui précède, il suit qu'il existe des groupes fuchsoïdes ayant la même structure et dont les polygones fondamentaux se ressemblent parfaitement, l'un des groupes conduisant au cas hyperbolique et l'autre au cas parabolique. Pour distinguer entre les deux cas tout à fait différents, on doit donc tenir compte non seulement de la mesure de l'ensemble m, mais aussi de l'ensemble des côtés du polygone fondamental.

On pourrait songer qu'il serait, dans le cas hyperbolique, toujours possible, par un choix convenable de coupures, d'arriver à un groupe fuchsoïde dont le polygone fondamental ait un ensemble m de la mesure positive. Il n'en est aucunement ainsi, comme nous l'apprend l'exemple suivant [21]. En partant de l'exemple hyperboliqne précédent, nous choisirons les points a_n d'après les conditions

$$q_n=n,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}=\infty.$$

On peut alors démontrer que la mesure de l'ensemble m est nulle et cela pour tous les systèmes des coupures.

Notre condition est remplie, par exemple, si $p_n=n^n$.

26. Nous traiterons dans ce qui suit d'une catégorie de groupes pour lesquels on peut d'une manière simple résoudre la question. J'entends par là les groupes fuchsoïdes de genre zéro qui sont contenus comme sous-groupe invariant dans un groupe fuchsien. On aura, en effet, pour les groupes en question, le théorème suivant :

Tout groupe fuchsoïde Γ_0 *du genre zéro qui est contenu comme sous-groupe*

invariant dans un groupe fuchsien est parabolique, si le groupe factoriel $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ *n'est pas isomorphe à un groupe de transformations linéaires*

$$x' = ax + b, \tag{40}$$

autrement hyperbolique [22].

Soit, en effet, $x = x(z)$ une fonction fondamentale de Γ_0, définie à une transformation biuniforme près, et soit T le domaine principal correspondant. S étant une substitution quelconque du groupe fuchsien Γ, la fonction $x(S) = f(x)$ est en même temps une fonction fondamentale de Γ_0, dont le domaine principal coïncide avec T. Il s'ensuit que les substitutions

$$x' = f(x) \tag{41}$$

forment un groupe G isomorphe au groupe factoriel $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ et ayant T comme domaine invariant.

Dans le cas où le groupe G est isomorphe avec un groupe des substitutions (40), la frontière de T contient évidemment tout au plus deux points, et l'on aura affaire au cas parabolique. Dans tous les autres cas, la frontière de T contient une infinité de points. D'après un théorème que j'ai démontré, la capacité de la frontière de T est alors positive, c'est-à-dire le groupe en question est hyperbolique [21].

On obtient un exemple remarquable des groupes mentionnés en choisissant pour le groupe Γ le groupe de la fonction polymorphe $z(x)$ non ramifiée d'une surface riemannienne algébrique F et pour Γ_0 le groupe d'une fonction polymorphe appartenant à un groupe de Schottky. Dans ce cas, la frontière du domaine T se compose d'un ensemble infini fermé de points discrets, sauf le cas $p = 1$, où l'ensemble en question renferme au plus deux points. Dans le cas général $p > 1$, il s'agit donc d'un groupe hyperbolique; dans le cas particulier $p = 1$, d'un groupe parabolique.

27. La classification établie ci-dessus n'est pas la seule qu'on puisse imaginer. Nous traiterons dans le suivant de quelques autres classes de groupes, importantes au point de vue de la théorie des fonctions [25].

Nous partons pour cela de la classe A_1 des domaines T dont la frontière se compose d'un ensemble μ dont la capacité est positive. Les domaines en question sont, comme nous l'avons déjà dit, identiques aux domaines où il existe des fonctions harmoniques bornées non constantes. La classe A_1 contient la classe A_2 de domaines où il existe des fonctions analytiques absolument bornées non constantes. Dans le cas spécial où les points limites de T sont situés sur une droite, le domaine T appartient à la classe A_2 toujours et seulement quand la mesure linéaire de la frontière est positive.

Nous introduisons finalement la classe A_3 des domaines où il existe des fonctions analytiques $f(x)$ pour lesquelles l'intégrale de Dirichlet

$$\iint_T |f'(x)|^2 d\xi d\eta, \qquad x = \xi + i\eta,$$

a une valeur finie. C'est une sous-classe de A_2, comme il s'ensuit des travaux récents de Schiffer.

La classification précédente implique immédiatement la classification des groupes fuchsoïdes correspondants.

Comme application, nous démontrons le théorème suivant :

Pour chaque domaine de la classe A_3 *il existe une transformation non linéaire* (41) *par laquelle* T *sera représenté sur un domaine simple. Pour tous les autres domaines, la transformation* (41) *est toujours linéaire.*

Soit, en effet, $u(x)$ une fonction non linéaire transformant le domaine T en un domaine simple renfermant le point à l'infini et ayant à l'infini le développement

$$u(x) = ax + b + \left(\frac{1}{x}\right).$$

La différence $u(x) - (ax + b)$ est alors évidemment une fonction non constante, régulière dans T et ayant l'intégrale de Dirichlet finie.

Soit inversement T un domaine quelconque de la classe A_3. D'après un théorème de Schiffer, il existe alors dans T une fonction régulière transformant T en un domaine simple, dont la frontière a la mesure extérieure positive. La transformation en question est alors certainement non linéaire, si la mesure de la frontière μ de T est nulle. Dans le cas ou la mesure μ est positive, on obtient une transformation non linéaire en représentant le domaine T sur un domaine limité par un système de fentes parallèles à l'axe réel (théorème de Koebe). Notre théorème est ainsi complètement démontré.

28. L'importance de notre classification ressortira aussi de ce qui suit, où nous nous proposons de représenter analytiquement les fonctions automorphes de nos groupes fuchsoïdes.

Commençons par le cas parabolique et traitons d'abord du cas le plus simple où le domaine T est identique au plan u entier pointé à l'infini. Les points de ramification

$$(e) \qquad e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad \cdots$$

de la fonction polymorphe $z(u)$ auront alors comme seul point d'accumulation le point à l'infini.

Nous supposons pour simplifier que les points (e) sont des points singuliers logarithmiques pour $z(u)$. En découpant alors le domaine T par une courbe

simple convenable K traversant les points (e), on obtient pour domaine fondamental B du groupe fuchsoïde Γ de z un polygone ayant un nombre infini des angles égal à zéro, les côtés conjugués

$$(C) \qquad C_\nu, \quad C'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

correspondant aux parties $(e_\nu, e_{\nu+1})$ de K. Les sommets de B auront alors comme seul point d'accumulation le point π, où la fonction automorphe $u(z)$, inverse de $z(u)$, a la valeur limite infinie.

Sur les côtés (C) de B il y a lieu l'inégalité

$$(42) \qquad |u(z)| > M_n,$$

dès que ν surpasse un nombre ν_0 devenant infini avec M_n.

Nous adjoignons maintenant à B l'ensemble des polygones adjacents par des côtés équivalents aux côtés (C), où $\nu \leqq \nu_0$ et nous continuerons ainsi de suite. Après un nombre fini q_n de telles opérations, on arrivera à un polygone B_n dont la frontière L_n se compose d'un nombre fini de côtés de deux catégories différentes, les uns étant équivalents à un des côtés (C) où $\nu > \nu_0$, les autres à un des côtés (C) où $\nu \leqq \nu_0$. Soit L'_n la somme des côtés de la première catégorie, L''_n la somme des autres. On aura alors l'inégalité (42) sur chaque côté appartenant à L'_n.

On peut démontrer, et c'est un point capital de notre théorie, que

$$\lim_{n\to\infty} L''_n = 0,$$

si les nombres q_n croissent d'une manière suffisamment rapide avec n. Nous renvoyons à notre travail [19].

29. Formons maintenant l'expression

$$(43) \qquad f(z) = \frac{u'(a)}{u(z) - u(a)},$$

qui définit une fonction fondamentale du groupe Γ. En vertu de la formule de Cauchy, on aura

$$(44) \qquad f(z) = \sum_{B_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

la somme étant étendue sur l'ensemble des pôles $S(a)$ de $f(z)$ situés dans le domaine B_n limité par L_n. Quant à l'intégrale dans la formule (44), on aura d'abord

$$\int_{L_n} = \int_{L'_n} + \int_{L''_n}.$$

A cause de (42), on aura sur L'_n

$$|f(z)| < \frac{|u'(a)|}{M_n - |u(a)|},$$

donc

$$\left|\int_{L'_n}\right| < \frac{k}{M_n},$$

k étant une constante, indépendante de n, d'où il suit

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L'_n} = 0.$$

On aura également pour la seconde intégrale

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L''_n} = 0,$$

parce que la longueur de L''_n tend vers zéro pour $n \to \infty$, si aucun pôle de $f(z)$ n'est situé sur L''_n, ce qu'on peut supposer sans restriction. On aura ainsi pour $f(z)$ l'expression

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{R_n}\frac{S'(a)}{z - S(a)}, \tag{45}$$

que nous écrirons brièvement

$$f(z) = \sum_{\Gamma}\frac{S'(a)}{z - S(a)}. \tag{46}$$

Il s'agit ici d'une série dont la convergence est uniforme, mais pas absolue.

En intégrant par rapport au paramètre a et en passant à la fonction exponentielle, on en déduit l'expression

$$\frac{u(z) - u(a)}{u(z) - u(b)} : \frac{u(z_0) - u(a)}{u(z_0) - u(b)} = \prod_{\Gamma}\left[\frac{S(z) - a}{S(z) - b} : \frac{S(z_0) - a}{S(z_0) - b}\right], \tag{47}$$

sous la forme d'un produit infini. La convergence n'étant pas absolue, on doit prendre les termes du produit dans un ordre bien déterminé, défini par le groupe Γ, mais indépendant de la fonction considérée. Notre expression que nous avons déjà rencontrée à propos de la représentation analytique des fonctions fuchsiennes, met en évidence les propriétés fondamentales de la fonction en question, à savoir les pôles et les zéros de la fonction, et ultérieurement l'invariance formelle de l'expression pour les substitutions du groupe correspondant. Malheureusement on ne peut, en général, donner aucune règle simple pour l'ordre des termes de (47). On devra pour cela connaître la croissance des entiers q_n, problème que l'on peut résoudre, à l'aide de théorèmes de Ahlfors, au moins dans des cas particuliers [19].

30. Comme second exemple, nous traiterons du cas hyperbolique, où T est constitué par l'intérieur du cercle unité E, pointé dans un nombre infini dénombrable de points logarithmiques

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ \cdots$$

ayant ses points d'accumulation sur la frontière de E. La fonction inverse $x(z)$ de la fonction polymorphe correspondante est alors une fonction fondamentale bornée

$$|x(z)|<1,$$

ayant toutes les valeurs limites de Fatou, en valeur absolue, égales à l'unité, abstraction faite d'un ensemble dénombrable de valeurs, correspondant aux points de ramification.

D'après un théorème bien connu de Blaschke, on aura pour la fonction $x(z)$ l'expression

$$x(z)=\prod \frac{|a_\nu|-ze^{-i\alpha_\nu}}{1-a_\nu z},$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\frac{x(z)}{x(z_0)}=\prod_{\Gamma}\left[\frac{S(z)-a}{S(z)-b}:\frac{S(z_0)-a}{S(z_0)-b}\right]. \tag{47'}$$

Cette dernière expression, identique à notre produit (47), est maintenant absolument convergente.

31. Après ces remarques préliminaires, nous pouvons aborder le cas général. Commençons par le cas parabolique.

Nous pouvons supposer que la frontière du domaine T renferme au moins trois points différents, les autres cas pouvant être réduits au cas précédemment traité. On peut encore, par une transformation linéaire, obtenir que trois points de la frontière coïncident respectivement avec o, 1 et ∞.

Soit $\zeta(x)$ la fonction polymorphe, inverse à la fonction modulaire de Legendre. La fonction composée $\zeta[x(z)]$ est alors uniforme et identique à une fonction fondamentale d'un groupe fuchsoïde Γ' hyperbolique du genre zéro, sous-groupe invariant de Γ_0. Cette fonction ayant comme domaine principal l'intérieur du cercle unité, peut être représenté, d'après ce qui précède, par un produit absolument convergent (47). En le joignant à l'expression de la fonction modulaire, nous obtenons finalement une expression pour notre fonction fuchsoïde $x(z)$. L'expression ainsi obtenue est encore une fois de la forme (47), la convergence de ce produit n'étant pas absolue.

Il ne reste plus que le cas hyperbolique, pour lequel on peut immédiatement donner la solution. On peut, en effet, d'après un théorème connu [26], représenter la dite fonction comme quotient de deux fonctions bornées sous la forme

$$f(z)=\frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)}e^{\kappa(z)},$$

où $\pi_1(z)$ et $\pi_2(z)$ sont des produits de Blaschke et $g(z)$ une fonction régulière representée par

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}d\psi(\vartheta)+i\lambda,$$

où

$$\psi(\vartheta)=\lim_{r\to 1}\int_0^{\vartheta}\log|x(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

est défini par les valeurs limites de la fonction bornée $f(z)$.

Nous avons donc, dans tous les cas, trouvé pour notre fonction fondamentale une expression sous la forme d'un produit infini, dont la convergence est absolue ou non, selon que le groupe fuchsoïde en question est hyperbolique ou parabolique.

32. La plupart des résultats ci-dessus s'étendent immédiatement aux groupes fuchsoïdes dont le genre p est un nombre fini positif quelconque. Il existe dans ce cas un couple de fonctions automorphes

$$x=x(z),\qquad y=y(z), \tag{48}$$

liées par une équation algébrique

$$P(x,y)=0, \tag{49}$$

par lesquelles toute fonction automorphe peut s'exprimer comme fonction uniforme de deux variables x et y. Le couple (48), déterminé à une transformation birationnelle près

$$x'=R_1(x,y),\qquad y'=R_2(x,y).$$

constitue un système fondamental de Γ.

Comme dans le cas $p=0$, deux cas essentiellement différents peuvent se présenter ici, selon que le produit infini

$$\prod_{\Gamma}|S_\nu(z)|$$

est convergent ou non. Dans le premier cas, c'est-à-dire le cas hyperbolique, la surface riemannienne correspondante F aura une fonction de Green, représentée par le logarithme de $\frac{1}{\Pi}$, dans le second cas, le cas parabolique, une pareille fonction n'existe pas. Les surfaces de la première catégorie sont, d'après la terminologie de M. Nevanlinna, les surfaces ayant une frontière réelle ou idéale positive, les autres surfaces ayant une frontière zéro [26].

Dans le dernier cas, que l'on obtient, en particulier, en partant d'une surface fermée en supprimant un ensemble de points de la capacité nulle,

l'ensemble de fonctions automorphes n'obtenant une valeur donnée qu'un nombre fini de fois dans le polygone fondamental peut s'exprimer rationnellement par un système fondamental (x, y) et l'on peut les représenter, comme dans le cas $p = 0$, par des séries et produits dont la convergence n'est pas absolue.

Soit, dans le cas hyperbolique, $g(z, a)$ la fonction de Green ayant son pôle dans $z = a$. Soit alors $f(z)$ une fonction automorphe n'obtenant dans le polygone fondamental B aucune valeur plus d'un nombre n de fois. En désignant par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les pôles en nombre fini de f situés dans B, nous formons la fonction

$$\psi_0(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \psi(z, z_\nu),$$

où

$$\psi(z, z_\nu) = e^{-g(z,z_\nu)-ih(z,z_\nu)},$$

h étant la fonction harmonique conjuguée de g. Le produit

$$f(z)\psi_0(z) = \psi(z)$$

est alors évidemment, tout comme la fonction $\psi_0(z)$, une fonction bornée qui, par rapport aux substitutions de Γ, se transforme d'après l'équation

$$\psi(S) = e^{\Omega_S}\psi(z).$$

Il est donc possible de représenter, dans ce cas, chaque fonction automorphe de cette espèce comme quotient de deux fonctions bornées multiplicatives

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\psi_0(z)}.$$

On arrive au cas hyperbolique, par exemple en partant d'une surface fermée, dépourvue d'un ensemble des points ayant la capacité positive. Si, particulièrement, cet ensemble contient un continu, le groupe correspondant aura des fonctions automorphes bornées.

IV. — Les fonctions analytiques définies sur une surface riemannienne donnée.

33. Dans ce qui précède, nous avons traité seulement des groupes de genre fini. Quant au cas général, où le genre est infini, on y rencontre des phénomènes essentiellement nouveaux. Il s'agit d'un champ de recherches très vaste et peu exploré, c'est-à-dire de recherche des fonctions analytiques définies sur une surface riemannienne transcendante. Nous nous proposons de traiter dans ce qui suit de quelques problèmes de ce domaine.

Il est naturel ici d'aborder en premier lieu les surfaces dont la frontière a la mesure harmonique zéro, parce qu'elles peuvent être regardées comme une généralisation plus naturelle des surfaces algébriques.

La première question se rattache à l'existence des fonctions additives généralisant les intégrales abéliennes. Tandis que la théorie de ces dernières intégrales a été exposée depuis longtemps, on n'a étudié que dans ces tout derniers temps les fonctions définies sur les surfaces transcendantes. Dans leurs travaux récents, quelques mathématiciens finlandais se sont efforcés de démontrer l'existence d'intégrales, analogues aux intégrales abéliennes et ils ont obtenu des résultats d'une portée remarquable [1], [23], [27], [33].

Dans ces recherches, on peut distinguer entre deux tendances différentes : ou bien il s'agit de prouver l'existence des fonctions analogues aux intégrales abéliennes sous les conditions les plus générales possibles, ou bien de pousser leur étude dans des cas particuliers aussi loin que possible.

Dans tous les cas, on a d'abord le problème fondamental suivant : est-il possible de construire une intégrale dont les singularités et périodes sont données en avance? Il est aisé de voir que si ce problème a une solution, il en possède une infinité. C'est une conséquence immédiate d'un résultat récemment obtenu par Behnke et Stein, d'après lequel il existe, sur chaque surface riemannienne ouverte, des fonctions analytiques uniformes partout régulières. Pour trouver une solution unique de notre problème, il faut donc imposer aux intégrales des conditions complémentaires.

34. Dans ses travaux récents, M. Nevanlinna a introduit comme condition complémentaire pour les intégrales de la première espèce, l'exigence que l'intégrale de Dirichlet

$$\iint |f'(x)|^2 \, d\xi \, d\eta, \qquad x = \xi + i\eta$$

doit avoir une valeur finie. Sous cette condition, il a pu démontrer l'existence d'une classe remarquable d'intégrales possédant les propriétés connues des intégrales abéliennes de la première espèce [27]. Il est facile d'étendre les résultats en question aux intégrales de la seconde et de la troisième espèce en supposant que le nombre des points singuliers est fini. Par contre, dans le cas général où le nombre en question est infini, on aura des difficultes nouvelles, dont l'explication n'a pas encore réussi.

Afin de pouvoir pousser plus loin le développement de la théorie, je me suis borné dans mes propres travaux à un cas spécial de surfaces, c'est-à-dire celui des surfaces symétriques. Un exemple remarquable de cette catégorie de surfaces nous fournit la surface à deux feuilles généralisant les surfaces hyperelliptiques et représentée par l'équation

$$y^2 = G(x),$$

où G est une fonction entière (régulière dans tout le plan x fini) ayant les zéros en nombre infini réels [23].

Pour les surfaces symétriques, on peut former des intégrales, analogues aux intégrales abéliennes de trois espèces, qui sont parfaitement déterminées par les singularités et les périodes en introduisant comme condition complémentaire que la partie imaginaire doit rester bornée sur la surface riemannienne découpée par un système canonique de coupures.

On peut aussi introduire des intégrales ayant une infinité de points singuliers et même construire à l'aide de telles intégrales des fonctions uniformes sur la surface donnée. Les zéros et les pôles d'une telle fonction satisfont alors à une infinité d'équations correspondant aux relations abéliennes. Les fonctions ainsi obtenues peuvent, dans un certain sens, être regardées comme une généralisation des fonctions rationnelles définies sur une surface algébrique.

Quant à la formation des intégrales en question, on peut, ou bien les obtenir comme fonctions limites des intégrales abéliennes relatives aux surfaces algébriques convergentes à la limite vers la surface transcendante donnée, ou bien en effectuant l'uniformisation de la surface donnée.

Les résultats cités ci-dessus sont cependant d'une nature très spéciale et l'on ne connaît pour le moment aucune méthode pour les appliquer au cas général des surfaces non symétriques.

35. Nous donnerons, pour terminer, l'exemple d'un phénomène qui d'une manière remarquable montre la différence profonde existant entre les surfaces de genre fini et infini.

Regardons de nouveau la surface hyperelliptique (5o), où $G(x)$ désigne une fonction entière ayant un nombre infini de zéros simples réels ou complexes. En enlevant d'une des feuilles, par exemple de la feuille supérieure l'intérieur d'une courbe fermée C, il restera un domaine D comprenant la feuille inférieure tout entière. Il existe, comme on le sait, dans le cas algébrique dans D une fonction uniforme bornée non constante, qu'on peut facilement construire à l'aide des intégrales abéliennes. Je dis qu'il n'en est pas ainsi dans le présent, où la surface (5o) est transcendante.

Soit, en effet, $f(x, y)$ une telle fonction. On peut évidemment l'écrire

$$f(x, y) = A(x) + B(x)\,y(x),$$

où

$$A(x) = \frac{f+\bar{f}}{2}, \qquad B(x) = \frac{f-\bar{f}}{2y},$$

$\bar{f} = A(x) - B(x)y$ étant la fonction conjuguée de f. A et B^2y^2 sont alors des fonctions de x, régulières et bornées en dehors de la courbe C_0, projection de C sur le plan x. Mais en vertu de $B^2G = \frac{1}{4}(f-\bar{f})^2$, la fonction B^2G doit être une fonction régulière et bornée de x en dehors de C_0 et donc aussi à l'infini.

Comme, d'autre part, ce point est un point limite des zéros de la fonction f, cette fonction doit se réduire à zéro. On aura donc $B(x) \equiv 0$.

Mais, en vertu de notre supposition, la fonction f est régulière aussi à l'intérieur et sur C_0. D'après le théorème de Liouville, la fonction f doit donc se réduire à une constante.

V. — Sur les fonctions automorphes de plusieurs variables.

36. Nous avons, dans les chapitres précédents, traité de diverses questions qui se rattachent aux fonctions automorphes dépendant d'une seule variable. Dans ce dernier chapitre, je me propose d'envisager, dans les grandes lignes, quelques problèmes de la théorie des groupes discontinus et des fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables.

On entend par cette dénomination, dans le sens le plus général du mot, les fonctions analytiques qui restent invariables par rapport aux substitutions analytiques biuniformes

$$x'_\nu = T_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{51}$$

d'un groupe discontinu donné.

Un cas important de telles fonctions nous est fourni par l'exemple classique des fonctions abéliennes, c'est-à-dire des fonctions méromorphes dans tout l'espace (x) ayant $2p$ systèmes de périodes. Dans ce cas-ci, les substitutions ont l'expression

$$x'_\nu = x_\nu + \omega_{\nu\mu},$$

et elles forment un groupe commutatif discontinu pour chaque point fini.

Les premiers exemples de groupes et de fonctions automorphes généraux ont été donnés par Émile Picard qui, en profitant des idées de Poincaré, a construit des fonctions de plusieurs variables analogues aux fonctions fuchsiennes (fonctions hyperfuchsiennes) [28]. Les groupes en question sont formés par substitutions linéaires

$$y'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_{\mu\nu} y_\nu, \qquad y_\mu : y_{n+1} = x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{52}$$

conservant une variété quadratique, dont on obtient l'équation sous une forme homogène en posant une forme hermitienne quadratique égale à zéro. Une autre généralisation des groupes fuchsiens nous est fournie par les groupes *hyperabéliens* de Picard [29]. Parmi les travaux antérieurs se rattachant aux fonctions automorphes, on peut distinguer entre deux tendances différentes : tandis que quelques-unes de ces recherches ont trait aux questions relatives à l'existence et aux propriétés des fonctions des groupes les plus généraux, les

autres s'occupent d'une manière plus approfondie des propriétés des fonctions automorphes ayant un intérêt spécial du point de vue de l'application, en premier lieu à la théorie des nombres. Parmi les auteurs du premier groupe, on peut mentionner Hurwitz, Fubini et Giraud, parmi les autres Hecke, Blumenthal et tout récemment Siegel.

37. Dans une série de travaux, dont les premiers datent d'une trentaine d'annees, j'ai abordé quelques questions de la théorie des fonctions automorphes qui se rattachent d'une part à la recherche géométrique des groupes discontinus généraux, d'autre part aux rapports entre les singularités essentielles des fonctions automorphes et la structure du groupe discontinu correspondant [14]. Le problème en question, dont la solution dans le cas d'une seule variable se trouve immédiatement, amène des difficultés considérables dès que l'on passe aux fonctions de plusieurs variables où l'on a trouvé des phénomènes essentiellement nouveaux, indiqués déjà par Picard. Nous verrons qu'il sera possible de conserver l'analogie avec la théorie des fonctions d'une variable par une définition nouvelle de la discontinuité.

Quoique la plupart de nos résultats puissent être étendus aux groupes des transformations plus générales, nous nous bornerons, dans ce qui suit, en premier lieu aux groupes des transformations linéaires (52). Soit Γ un tel groupe sans substitutions infinitésimales. Le groupe sera dit *normal* dans un point P de l'espace (x), s'il existe un domaine renfermant P où l'ensemble des fonctions (52) forme une famille normale dans le sens de M. Montel. L'ensemble des points où le groupe est normal constitue un domaine non nécessairement connexe, que nous appellerons le *domaine normal* du groupe en question.

La formation du domaine normal pour un groupe Γ donné se ramène à l'étude de suites infinies des substitutions de Γ. Soit

$$(S) \qquad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots$$

une telle suite. Il est alors possible d'extraire de (S) une suite infinie partielle

$$(\sigma) \qquad S_{\nu_1}, \quad S_{\nu_2}, \quad S_{\nu_3}, \quad \ldots$$

convergente vers une substitution limite

$$(53) \qquad y'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_{\mu\nu} y_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1).$$

En supposant que Γ ne contient pas de substitutions infinitésimales, la substitution limite (53) doit évidemment être dégénérée, ayant donc le déterminant égal à zéro.

Soit ρ le rang de la matrice

$$(54) \qquad \|\beta_{\mu\nu}\|,$$

que nous appellerons aussi le rang de la suite normal (σ). On peut alors démontrer, par des considérations tout à fait élémentaires, que pour (σ) les points de l'espace (x) situés en dehors d'une certaine variété linéaire $\overline{M}_{n-\rho}$ de la dimension $2(n-\rho)$ convergent vers des points situés sur une certaine variété linéaire $M_{\rho-1}$ de la dimension $2(\rho-1)$, la convergence étant uniforme dans chaque domaine fermé ne renfermant pas de points de $\overline{M}_{n-\rho}$. Les fonctions (52) correspondant à la suite σ forment donc une suite normale de fonctions en dehors de $\overline{M}_{n-\rho}$.

La variété $M_{\rho-1}$ sera appelée l'*élément primaire*, la variété $\overline{M}_{n-\rho}$ l'*élément secondaire* de σ. En remplaçant au besoin σ par une suite partielle, nous pouvons supposer qu'aussi la suite σ' de substitutions inverses de σ est normale. Entre les éléments

$$M_{\rho-1}, \quad \overline{M}_{n-\rho} \text{ resp. } M'_{\rho'-1}, \quad \overline{M}'_{n-\rho'}$$

de σ et de σ', il existe alors une relation simple, la variété $M_{\rho-1}$ étant toujours contenue dans $\overline{M}'_{n-\rho'}$ et $M'_{\rho'-1}$ dans $M_{n-\rho}$.

Regardons maintenant l'ensemble $(\overline{M})$ fermé des éléments secondaires, correspondant aux diverses suites normales du groupe Γ.

L'ensemble de points de l'espace (x) situés en dehors de $(\overline{M})$ constitue, s'il existe, un domaine D non nécessairement connexe, identique au domaine normal du groupe en question. Ce domaine est donc le domaine le plus étendu, où les fonctions linéaires (52) correspondant aux diverses substitutions de Γ forment une famille normale de fonctions. Le groupe discontinu Γ sera alors dit *normal dans* D.

Dans le cas d'une seule variable, la notion de la discontinuité normale est toujours identique à la notion de la discontinuité propre. Il en est autrement en général pour les groupes de substitutions de deux ou plusieurs variables. Dans tous les cas, le domaine normal est toujours contenu dans le domaine de la discontinuité propre.

38. En vertu de ce qui précède, il est permis de démontrer la discontinuité normale (et donc aussi la discontinuité propre) pour la plupart des groupes linéaires connus [14]. Il résulte, en effet, de nos définitions et des propriétés connues des familles normales des fonctions analytiques qu'étant donné un domaine fini D_0 restant invariable pour certaines substitutions linéaires, tout groupe formé par telles substitutions est normal dans D_0 dès qu'il ne renferme pas de substitutions infinitésimales.

Au lieu de supposer que D_0 est fini, il suffit de supposer qu'il existe un système d'hyperplans sans points communs et ne contenant aucun point intérieur de D_0 (condition A).

En choisissant pour le domaine D_0 l'intérieur de l'hypersphère

$$|y_1|^2+|y_2|^2+\ldots+|y_n|^2<|y_{n+1}|^2, \tag{55}$$

on constate ainsi la discontinuité normale des groupes hyperfuchsiens dans le domaine (55).

On arrivera à une catégorie remarquable plus générale de groupes linéaires en considérant des substitutions qui conservent une variété quadratique représentée par l'équation

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})=0, \tag{56}$$

où φ est une forme quadratique ordinaire ou hermitienne. On peut alors, par des considérations tout à fait élémentaires, démontrer que pour chaque groupe normal formé par de telles substitutions les éléments secondaires $\overline{M}$ sont contenus dans certaines variétés linéaires, hyperplans tangents à la variété (56). On en déduit immédiatement les théorèmes suivants [14] :

Tout groupe de substitutions linéaires réelles conservant une variété ordinaire φ *est normal dans le domaine* $D(\varphi)$ *limité par les hyperplans tangents réels de la variété dès qu'il n'existe pas de substitutions infinitésimales.*

Tout groupe de substitutions linéaires complexes conservant une variété ordinaire ou hermitienne est normal dans le domaine $D(\varphi)$ *limité par les hyperplans tangents de la variété dès qu'il n'existe pas de substitutions infinitésimales.*

Le domaine $D(\varphi)$, défini par φ, sera appelé le *domaine normal de la variété* en question.

Comme application, nous regardons les variétés quadratiques, Soit d'abord φ une forme réelle quadratique, donnée par l'expression canonique

$$\varphi=\sum_{\mu=1}^{p} y_\mu^2-\sum_{\nu=p+1}^{p+q} y_\nu^2, \qquad (q\leq p, p+q=n+1). \tag{57}$$

On peut alors, d'une manière élémentaire, démontrer le théorème :

Pour $q=1$, *le domaine normal est défini par l'inégalité*

$$\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu\bar{y}_\mu-y_{n+1}\bar{y}_{n+1}<\left|\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu^2-y_{n+1}^2\right|, \tag{D_1}$$

pour $q=2$ *par l'inégalité*

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} y_\mu\bar{y}_\mu-y_n\bar{y}_n-y_{n+1}\bar{y}_{n+1}<-\left|\sum_{\mu=1}^{n-1} y_\mu^2-y_n^2-y_{n+1}^2\right|. \tag{D_2}$$

Si $q>2$, *il n'existe pas de domaine normal.*

Quant au domaine D_1, il est connexe si $n > 2$, mais composé de trois parties connexes si $n = 2$.

Le domaine D_2 est connexe si $n > 3$, mais composé de trois parties connexes si $n = 3$.

Quant aux formes quadratiques hermitiennes

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{p} y_\mu \bar{y}_\mu - \sum_{\nu=p+1}^{p+q} y_\nu \bar{y}_\nu, \tag{58}$$

elles ont un domaine normal seulement pour $q = 1$, ce domaine étant alors défini par $\varphi < 0$. C'est le cas des groupes hyperfuchsiens, introduits par Picard.

On peut, d'une manière analogue, traiter des groupes de substitutions linéaires ayant une variété algébrique quelconque.

39. Les résultats précédents auront une portée remarquable par l'application d'un principe général, dû à Hesse et Klein.

Partons pour cela d'une forme ordinaire

$$g = \sum z_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \tag{59}$$

dont les coefficients z_λ sont des paramètres arbitraires. En effectuant la substitution

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{ik} y_k, \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1), \tag{60}$$

la forme g sera transformée en une forme nouvelle g' de la même espèce ayant les coefficients

$$z_\mu' = \sum_\nu c_{\mu\nu} z_\nu, \tag{61}$$

où $c_{\mu\nu}$ sont des fonctions rationnelles entières des quantités α_{ik} ayant comme coefficients des nombres entiers. Nous aurons ainsi pour notre groupe Γ une représentation dans l'espace (z) dont la dimension est en général supérieure à celle de l'espace (y).

On constate facilement que les substitutions transformées (61) laissent invariable la variété rationnelle définie par les équations

$$z_\lambda = (\lambda) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}}, \tag{V}$$

ou (λ) sont des coefficients polynomiaux. La variété

$$g = 0, \tag{62}$$

linéaire par rapport aux variables z, représente alors un hyperplan osculateur de V.

Regardons maintenant l'ensemble $(\overline{M})$ des variétés (62) appartenant aux points réels de V. En supposant que les points de l'ensemble $(\overline{M})$ ne remplissent pas tout l'espace (z), il existe un domaine $D(g)$ non nécessairement connexe formé par l'ensemble des points situés en dehors de $(\overline{M})$ et invariant par rapport aux substitutions (61). L'importance capitale du domaine $D(g)$ apparaît du théorème suivant :

Tout groupe de substitutions (61) *obtenu d'un groupe* Γ *de substitutions réelles* (60) *est normal dans le domaine* $D(g)$ *dès que le groupe* Γ *ne contient pas de substitutions infinitésimales.*

On peut traiter de la même manière des groupes de substitutions complexes (60) en remplaçant la forme ordinaire g par une forme hermitienne.

Notre théorème peut être regardé comme une généralisation du théorème connu, d'après lequel tout groupe de substitutions binaires

$$y'_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \qquad y'_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

sans substitutions infinitésimales, sera proprement discontinu dans l'espace hyperbolique.

Dans notre travail [14] cité plus haut, nous avons donné plusieurs exemples de groupes normaux pouvant être obtenus par l'application du principe mentionné.

On y trouve aussi les premiers exemples concernant les groupes sans variétés invariantes qui peuvent, dans un certain sens, être regardés comme une généralisation des groupes kleinéens.

Comme nous l'avons déjà dit, les définitions et résultats précédents peuvent être appliqués aussi aux groupes de substitutions birationnelles non linéaires, contenus comme sous-groupe dans un groupe crémonien continu fini. En effet, tout groupe de cette nature peut, par changement des variables, être représenté par un groupe de substitutions linéaires appartenant à un espace supérieur et possédant une variété invariante algébrique Ψ dont les points correspondent aux points de l'espace donné. Il s'ensuit que les éléments des suites normales du groupe transformé coïncident avec des intersections de la variété Ψ par certains hyperplans. On peut de cette manière appliquer directement nos résultats à plusieurs groupes importants, parmi lesquels nous relevons les groupes hyperabéliens de Picard et certains groupes étudiés par Giraud et qui se rattachent aux modules des fonctions algébriques.

40. Passons maintenant à la recherche des *fonctions automorphes* appartenant aux groupes précédents. Formons à cet effet pour notre groupe la série

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\Gamma} \mathfrak{R}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \left(\frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right)^p \tag{63}$$

dont le noyau $\mathcal{H}$ est une fonction rationnelle et p un domaine entier positif. En supposant la convergence absolue et uniforme de (63) au moins en supprimant un nombre fini de termes dans un domaine T de l'espace (x), la somme de la série définit une fonction analytique des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, méromorphe dans le domaine T et satisfaisant pour chaque S de Γ à l'équation fonctionnelle

$$\Theta(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)^{-p}. \tag{64}$$

Il s'ensuit que le rapport de deux fonctions Θ est une fonction automorphe de Γ, méromorphe dans T.

Quant à la convergence de (63), on peut la démontrer sous la condition suivante, un peu plus restrictive que la condition antérieure A.

Nous dirons que le groupe Γ satisfait à la condition A′, s'il existe un domaine D′, dont les transformés par Γ sont tous situés dans l'espace fini, exception faite peut-être d'un nombre fini d'entre eux.

Notre condition est certainement remplie s'il existe un domaine borné invariable par rapport au groupe donné.

Cela posé, regardons notre série en choisissant $p = 2$. Il est possible, en vertu de notre condition A′, de choisir la fonction rationnelle $\mathcal{H}$ de telle manière que les singularités algébriques de divers termes de la série (63) seront situés, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, en dehors du domaine D′. Les singularités π en question sont ici des variétés algébriques provenant des variétés singulières polaires de $\mathcal{H}$ et de la variété à l'infini par les substitutions de Γ.

Soit maintenant T un domaine quelconque ne renfermant qu'un nombre fini de singularités algébriques en question. On peut alors démontrer, par des considérations tout à fait élémentaires, dans le cas présent, la validité d'un théorème analogue au théorème connu de Kœbe (Verzerrungssatz) [14]. Il s'ensuit que la convergence de la série (63) se ramène à la convergence de la somme des hypersphères qu'on obtient d'une hypersphère convenablement choisie par les substitutions diverses du groupe donné. Notre série converge donc uniformément et absolument, en laissant de côté peut-être un nombre fini de termes, sur chaque domaine fermé qui ne renferme pas d'ensembles limites des variétés polaires π.

41. Il reste encore à établir la relation entre le domaine de la convergence de (63) et le domaine normal du groupe. On peut distinguer ici entre deux cas essentiellement différents.

Supposons d'abord que les éléments secondaires du groupe sont tous des variétés de la dimension maximum $2(n-1)$, donc des hypersurfaces algébriques

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{65}$$

On peut alors démontrer que les ensembles limites en question se confondent avec les variétés (65). Pour chaque fonction automorphe de Γ, le domaine d'existence coïncide donc avec le domaine normal D du groupe (plus précisément avec une partie connexe du domaine D). On aura ici affaire à des fonctions automorphes ayant des singularités essentielles fixes, c'est-à-dire indépendantes du choix de la fonction.

Il en est autrement dans les cas où les éléments secondaires n'ont pas tous la dimension maximum $2(n-1)$. Dans ce cas, on peut démontrer seulement que le domaine d'existence des fonctions automorphes est toujours une partie du domaine normal du groupe et que, par conséquent, les singularités peuvent partiellement pénétrer dans l'intérieur de D, ces parties dépendant du choix de la fonction. Parmi les fonctions de la première catégorie, on peut mentionner les fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes, ensuite les fonctions automorphes appartenant à nos groupes hyperkleinéens.

Nous remarquons en plus qu'il est possible de construire des fonctions automorphes pour une classe étendue de groupes par des expressions qui peuvent être regardées comme une généralisation des séries de Dirichlet. Partons pour cela de la forme générale (59) d'ordre p des variables y_1, y_2, ..., y_{n+1}. Formons ensuite la série multiple

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=-\infty} \frac{1}{\left[\sum_{\lambda} z_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}\right]^\rho}. \tag{66}$$

La somme de cette série, supposée absolument convergente, définit un invariant arithmétique de la forme g, c'est-à-dire une fonction analytique des variables z_λ qui reste invariable quand on remplace la forme g par une forme arithmétiquement équivalente. Quant à la série (66), on peut démontrer qu'elle converge pour $\rho > \frac{n+1}{p}$ uniformément et absolument dans chaque domaine situé dans l'intérieur du domaine normal de la forme g. Les fonctions ainsi obtenues sont donc des fonctions automorphes des groupes modulaires généralisés, et leur domaine d'existence coïncide avec une partie connexe du domaine normal $D(g)$ de la forme g.

Citons encore le théorème suivant, auquel conduisent nos développements précédents.

Étant donné un groupe quelconque de substitutions crémoniennes d'un degré borné, qui transforment un domaine fini en lui-même, il existe toujours des fonctions automorphes qui sont méromorphes dans le domaine en question.

42. Les résultats précédents reposent essentiellement sur l'emploi des séries par lesquelles nous avons défini et représenté des fonctions automorphes. On peut se demander s'il ne serait pas possible de démontrer, d'une manière

indépendante de la définition des fonctions automorphes, la dépendance entre leur domaine d'existence et le domaine normal du groupe correspondant. C'est en vérité un problème difficile qu'on a jusqu'ici pu résoudre d'une manière satisfaisante seulement pour les groupes de substitutions linéaires de deux variables [7]. Au moins dans ce cas, le domaine d'existence des fonctions automorphes coïncide en général avec une partie connexe du domaine normal du groupe correspondant. Mais il y a certainement des exceptions.

En effet, déjà l'exemple des fonctions abéliennes nous apprend qu'il existe des groupes discontinus normaux même dans tout l'espace fini et n'ayant pas de fonctions automorphes. Pour qu'il existe des fonctions périodiques, méromorphes dans tout l'espace fini, il faut et il suffit que les périodes satisfassent à une condition arithmétique, exprimée par des relations bilinéaires de Riemann. Dans quelques autres cas, il existe des fonctions périodiques ayant des singularités essentielles situées dans l'espace fini, mais en général les groupes en question ne possèdent pas de fonctions automorphes [16].

43. Les développements précédents se rapportent à une catégorie très vaste et importante de groupes discontinus, c'est-à-dire des groupes contenus dans un groupe crémonien continu fini comme sous-groupe. Nos substitutions sont donc d'un degré borné, ce qui signifie une restriction. En abandonnant cette condition, on est en présence de phénomènes essentiellement nouveaux qui, déjà dans le cas le plus simple, celui des groupes cycliques, conduisent aux difficultés considérables, connus par les travaux de Fatou, de Lattès et de Julia, sur l'itération des fonctions rationnelles.

Pour illustrer brièvement ces phénomènes, je me bornerai aux deux exemples suivants :

Considérons d'abord la substitution

$$(C) \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{a(x)y + b(x)}{c(x)y + d(x)},$$

où les quantités α, β, γ, δ sont des constantes et les quantités

$$(67) \qquad a(x), \quad b(x), \quad c(x), \quad d(x)$$

sont des fonctions analytiques de x dont la déterminante Δ ne s'évanouit pas identiquement. C'est une transformation de l'espace (x, y) partout uniforme, exception faite de certaines variétés où la substitution homographique de y devient singulière. En supposant que les coefficients (67) sont polynomes, on obtiendra une substitution crémonienne qui devient singulière pour les zéros de la déterminante Δ.

Dans le cas général, la substitution C aura quatre points fixes, un de ces points étant attractif et un autre répulsif par rapport à l'itération de la substi-

tution. On peut alors, sous quelques conditions complémentaires, démontrer l'existence de deux courbes analytiques transcendantes invariantes

$$y = \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2),$$

et d'une infinité de droites

$$x = \lambda_\mu,$$

telles que le groupe cyclique en question sera normal en dehors des lignes mentionnés. De même, lorsqu'on emploie des séries analogues aux séries de Poincaré, il est possible de construire des fonctions automorphes, dont le domaine d'existence coïncide avec le domaine normal du groupe considéré [24].

44. L'exemple précédent a été, dans un cas particulier, traité déjà par Poincaré. Voici un autre exemple, généralisant un exemple de Picard [29].

Envisageons la substitution

$$x' = x^\alpha y^\beta, \qquad y' = x^\gamma y^\delta, \tag{68}$$

où les exposants α, β, γ, δ sont des nombres entiers dont la déterminante est égale à l'unité. Faisons correspondre à notre substitution, qui est une substitution crémonienne, la substitution modulaire

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \tag{69}$$

On arrivera ainsi à une isomorphie entre les groupes modulaires et les groupes G crémoniens formés par (68).

Les substitutions elliptiques (69) conduisant aux groupes cycliques finis, nous supposerons que (69) soit hyperbolique ou parabolique. Soient dans le premier cas ζ_1, ζ_2 les points fixes de (69). On peut alors démontrer que le groupe cyclique engendré par (68) est normal en dehors des variétés à trois dimensions

$$|xy^{-\zeta_1}| = 1, \qquad |xy^{-\zeta_2}| = 1 \tag{70}$$

divisant l'espace entier en quatre parties distinctes. Quant au cas parabolique, où les variétés (70) coïncident, le domaine normal se compose de deux parties.

Cela posé, repartons d'un groupe quelconque Γ de substitutions (69), sous-groupe du groupe modulaire. On peut alors distinguer entre deux cas essentiellement différents selon que le groupe Γ sera partout singulier sur l'axe réel ou non. Dans le premier cas, les variétés singulières (70) relatives aux substitutions diverses du groupe crémonien G remplissent l'espace (x, y) tout entier et le groupe G n'est nulle part normal. Dans le second cas, le groupe G est normal en dehors d'un ensemble infini des variétés

$$|xy^{-\zeta}| = 1,$$

où ζ parcourt les points singuliers du groupe modulaire correspondant. Dans

le premier cas, il n'existe pas de fonctions automorphes. Dans le dernier cas, on peut démontrer l'existence de telles fonctions par des séries infinies, chacune d'elles définissant simultanément une infinité de fonctions automorphes ayant pour domaine d'existence une partie connexe du domaine normal.

Dans le cas spécial d'un groupe cyclique, les fonctions se réduisent, par un changement de variables, à certaines fonctions étudiées par Hecke.

Les questions traitées dans ce qui précède se rattachent seulement à une partie élémentaire de la théorie des fonctions automorphes. Il reste encore dans ce domaine une foule de problèmes qui attendent leur solution. Il est probable que les résultats importants obtenus ces derniers temps dans la théorie générale des fonctions analytiques de plusieurs variables pourront conduire à des progrès nouveaux dans l'étude des fonctions automorphes.

Bibliographie.

[1] Ahlfors, L. V., *Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math. Phys.*, t. 35, 1947).

[2] Appell, P., *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*, Mémoire couronné (*Acta mathematica*, n° 13, 1889).

[3] Behnke, H. et Stein, K., *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen* (*Math. Ann.*, t. 120, 1948).

[4] Blumenthal, O., *Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 56, 1903; t. 58, 1904).

[5] Burnside, W., *On a class of automorphic functions* (*Proc. of the London Math. Soc.*, t. 23, 1892).

[6] Cartan, H., *Sur les variétés définies par une relation entière* (*Bull. Sc. math.*, t. 55, 1931).

[7] Cartan, H., *Sur un cas de prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables complexes* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. 61, 1949).

[8] Erdös, P. et Gillis, J., *Note on the transfinite diameter* (*Proc. of the London math. Soc.*, t. 12, 1937).

[9] Fubini, G., *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, Pisa, 1908.

[10] Giraud, G., *Leçons sur les fonctions automorphes*, Paris, 1920.

[11] Hecke, E., *Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (*Math. Ann.*, t. 71, 1911).

[12] Hurwitz, A., *Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln* (*Math. Ann.*, t. 61, 1905).

[13] Myrberg, P. J., *Zur Theorie der Konvergenz der Poincaréschen Reihen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, A. 9, 1916; A. 11, 1917).

[14] MYRBERG, P. J., *Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variablen* (*Acta mathematica*, n° 46, 1925).

[15] MYRBERG, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen durch bedingt konvergente Reihen und Produkte* (*Acta mathematica*, n° 69, 1932).

[16] MYRBERG, P. J., *Über die Existenz von vierfachperiodischen Funktionen, deren Perioden den Riemannschen Bedingungen nicht genügen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, A. 36, 1932).

[17] MYRBERG, P. J., *Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche* (*Acta mathematica*, n° 61, 1933).

[18] MYRBERG, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei hyperelliptischen Riemannschen Flächen* (*Acta mathematica*, n° 65, 1935).

[19] MYRBERG, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei gewissen fuchsoiden Gruppen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. 48, 1936).

[20] MYRBERG, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null* (*Ann. di Mathematica*, t. XVII, 1938).

[21] MYRBERG, P. J., *Über den Fundamentalbereich der automorphen Funktionen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math. Phys.*, t. 2, 1941).

[22] MYRBERG, P. J., *Die Kapazität der singulären Menge der linearen Gruppen* (*Ibid.*, t. 10, 1941).

[23] MYRBERG, P. J., *Über analytische Funktionen auf transzendenten zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten* (*Acta mathematica*, n° 76, 1944).

[24] MYRBERG, P. J., *Über gewisse Cremonagruppen und ihre automorphen Funktionen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. 53, 1948).

[25] MYRBERG, P. J., *Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen* (*Ibid.*, t. 58, 1949).

[26] NEVANLINNA, R., *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin. 1936.

[27] NEVANLINNA, R., *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. 1, 1941).

[28] PICARD, E., *Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, n° 2, 1883).

[29] PICARD, E., *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*J. de Math.* [4], t. 1, 1885).

[30] POINCARÉ, H., *Œuvres complètes*, t. II, Paris 1916.

[31] SCHOTTKY, F., *Über eine specielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments ungeändert bleibt* (*J. für Math.*, t. 101, 1897).

[32] SIEGEL, C., *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n : ten Grades* (*Math. Ann.*, t. 116 1939).

[33] VIRTANEN, K., *Über Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichem Geschlecht* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. 56, 1949).

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-HUITIÈME.

Pages.

Sur la théorie des surfaces de Riemann, par M. *Léonce Fourès*..... 1

Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières, par M. *Yu Chia-Yung*.... 65

Prolongement analytique de la série de Taylor, par MM. *J. Dufresnoy* et *Ch. Pisot*. 105

Quelques propriétés des transformations intérieures d'un domaine borné, par M. *Michel Hervé*..... 125

Sur les points fixes des transformations cycliques des domaines plans, par M. *N. Pastidès*..... 169

Sur la réduction des anneaux d'opérateurs, par M. *J. Dixmier*..... 185

Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, par M. *Robert Croisot*..... 203

Etude des réseaux de courbes tracés sur une surface close et en général localement homéomorphes à un faisceau de droites parallèles, par M^me^ *Dubois-Violette*. 267

Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable, par M. *Paul Lévy*..... 327

Sur les fonctions automorphes, par M. *P. J. Myrberg*..... 383

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.

Quai des Grands-Augustins, 55.

138415-51